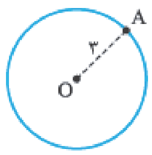
فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

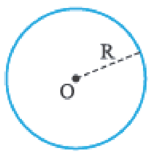
درس ۱

ترسیم‌های هندسی

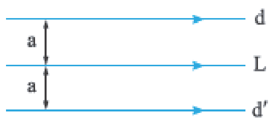


دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ را در نظر بگیرید. نقاط روی این دایره همگی دارای یک ویژگی مشترک‌اند. همه‌ی این نقاط از نقطه‌ی O به فاصله‌ی ۳ هستند.

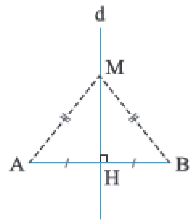
شکل‌هایی مانند دایره که نقاطشان ویژگی مشترکی دارند، در مسائل هندسی خصوصاً یافتن نقاط با ویژگی خاص و رسم شکل‌های هندسی بسیار مهم هستند. گاهی از این نقاط که دارای ویژگی مشترک هستند با نام «مکان هندسی» یاد می‌کنند. در ادامه با چندتا از این شکل‌ها آشنا می‌شویم.



۱) نقطه‌ی ثابت O را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم نقاطی از صفحه را بیابیم که فاصله‌ی آن‌ها از O برابر R باشد، باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم کنیم.

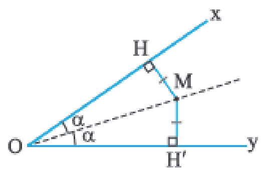


۲) خط L را در نظر بگیرید. اگر دنبال نقاطی باشیم که از خط L به فاصله‌ی معلوم a باشند، این نقاط روی دو خط موازی L هستند که در طرفین L قرار دارند و باید آن‌ها را رسم کنیم.



۳) پاره‌خط AB را در نظر بگیرید. عمودمنصف AB شامل همه‌ی نقطه‌هایی است که فاصله‌ی آن‌ها از نقاط A و B برابر است، پس اگر از ما نقطه‌ای را خواستند که فاصله‌ی آن از دو نقطه‌ی A و B برابر باشد، باید عمودمنصف AB را رسم کنیم و بر روی آن به دنبال این نقطه بگردیم.

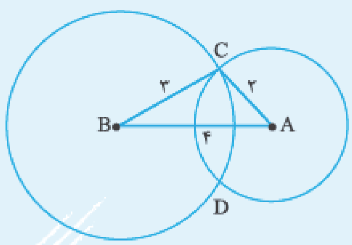
۴) نقاط روی نیمساز یک زاویه هم ویژگی مشترکشان این است که فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز زاویه از اضلاع زاویه برابر است، یعنی اگر M نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز زاویه‌ی O باشد، همواره داریم: $MH = MH'$



تست دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ از هم هستند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲ و از نقطه‌ی B به فاصله‌ی ۳ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ ۳ ابتدا دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ رسم می‌کنیم، چرا که تمام نقاطی که از B به فاصله‌ی ۳ هستند روی این دایره قرار دارند. همین‌طور دایره‌ای هم به مرکز A و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. همین‌طور که می‌بینید، این دو دایره یکدیگر را در نقاط C و D قطع می‌کنند. این دو نقطه هر دو ویژگی موردنظر را دارند. دقت کنید که چون ۴ > ۳+۲ است، دوتا نقطه با این ویژگی داشتیم یعنی دو دایره توانستند یکدیگر را قطع کنند.

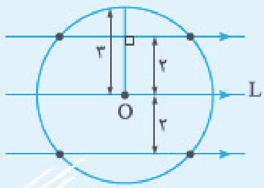


◄ اگر مجموع شعاع دایره‌ها برابر با ۴ می‌شد، دایره‌ها بر هم مماس می‌شدند و یک نقطه به وجود می‌آمد و اگر مجموع شعاع دایره‌ها از ۴ کم‌تر بود، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کردند و نقطه‌ای با این ویژگی پیدا نمی‌شد.

◄ قبول دارید که در این تست در واقع مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ رسم کردیم؟!

تست نقطه‌ی O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی ۳ و از خط L به فاصله‌ی ۲ باشند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



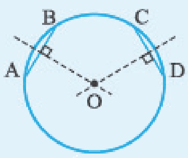
پاسخ ۴ خُب نقاطی که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است و نقاطی که از خط L به فاصله‌ی ۲ هستند، دو خط موازی خط L خواهند بود. نقاط تلاقی این دو خط و دایره، هر دو ویژگی موردنظر را دارند. (حتماً خط‌ها دایره را قطع می‌کنند؟!)

ترسیم

در مسائل ترسیم، به ما یک پرگار می‌دهند که با آن می‌توانیم دایره رسم کنیم (که البته باکلاس‌ترها می‌گویند: کمان می‌زنیم) و یک خط‌کش می‌دهند که با آن می‌توانیم پاره‌خط‌هایی به طول معلوم را بکشیم و البته در حل تست‌ها و مسائل فرض بر این است که رسم‌های زیر (ترسیم‌های مقدماتی) را انجام داده‌ایم و در ترسیم‌هایمان می‌توانیم از آن‌ها استفاده کنیم:

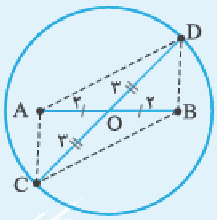
۱ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط
۲ رسم نیمساز یک زاویه
۳ رسم خط عمود بر یک خط مفروض (از نقطه‌ای بیرون یا روی خط)
۴ رسم خط موازی یک خط مفروض
۵ رسم یک مثلث با داشتن سه ضلع

مثال میدان یک شهر به صورت دایره است. می‌خواهیم مرکز آن را یافته و در آن‌جا مجسمه‌ای قرار دهیم. به کمک وسایل ترسیم و ترسیم‌های مقدماتی، مرکز این دایره را بیابید.



پاسخ می‌دانیم که مرکز دایره روی عمودمنصف‌های وترهای آن قرار دارد. دو وتر دلخواه AB و CD را می‌کشیم و عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم، محل برخورد این عمودمنصف‌ها مرکز دایره را نشان می‌دهد.

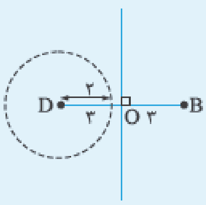
مثال با توجه به این‌که می‌دانیم چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند متوازی‌الاضلاع است، متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهایش ۴ و ۶ باشد.



پاسخ ابتدا پاره‌خطی به طول ۴ رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز O (وسط AB) و شعاع ۳ رسم می‌کنیم. قطر دلخواه CD را نگاه کنید. با وصل‌کردن D،C،B،A به همدیگر، چهارضلعی به وجود می‌آید، قطرهایش منصف یکدیگرند پس متوازی‌الاضلاع است. اندازه‌ی قطرهایش هم که ۴ و ۶ است.

تست چند لوزی به طول ضلع ۲ و قطر کوچک ۶ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



پاسخ ۱ می‌دانیم که قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند، پس ابتدا پاره‌خطی به طول ۶ می‌کشیم و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. حالا دایره‌ای به مرکز D و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف BD، جای دو رأس دیگر را تعیین می‌کند. اما دقت کنید که دایره‌ای به شعاع ۲ اصلاً نمی‌تواند این خط را قطع کند، پس با این اندازه‌ها لوزی قابل رسم نیست!

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- نقطه‌ی A به فاصله‌ی $۴-۳x$ از خط d مفروض است. اگر فقط یک نقطه روی خط d وجود داشته باشد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۵ باشد، کدام گزینه در مورد x درست است؟

۱) $x = ۳$ ۲) $x > ۳$ ۳) $\frac{۴}{۳} < x < ۳$ ۴) $x < \frac{۴}{۳}$

۲- دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۵ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱/۵ و از نقطه‌ی B به فاصله‌ی ۳/۵ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳- نقطه‌ی A خارج خط d مفروض است. چند نقطه می‌توان یافت که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۵ و از خط d به فاصله‌ی ۲ باشند؟

۱) حداکثر ۲ ۲) ۲ ۳) حداکثر ۴ ۴) ۴

۴- مربع ABCD به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر با $\frac{\pi}{۲}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۵- اگر فاصله‌ی دو خط موازی d و d' برابر ۳ باشد، نقاطی از صفحه که تفاضل فاصله‌های آن از این دو خط برابر با ۲ باشد ....

۱) یک خط موازی با d است. ۲) دو خط موازی با d است.
۳) خطی عمود بر d است. ۴) چنین نقاطی وجود ندارد.

۶- درون مثلث ABC چند نقطه وجود دارد که از هر سه رأس آن به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) حداکثر ۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۷- خط d و نقاط A و B مفروض‌اند. اگر d عمودمنصف AB نباشد، چند نقطه روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) حداکثر ۱ ۴) ۲

۸- مراکز دایره‌هایی که از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرند روی .... قرار دارند.

۱) دو خط عمود بر AB ۲) عمودمنصف AB ۳) دو خط موازی AB ۴) خطی موازی AB

۹- در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\widehat{A} = ۸۰^\circ$. عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟ *(سراسری ریاضی ۹۲)*

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

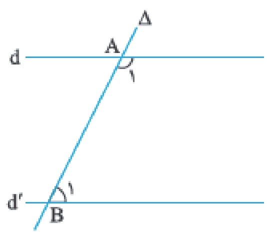
۱۰- چند نقطه درون مثلث ABC وجود دارد که از سه ضلع مثلث به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) حداکثر ۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱- مثلث ABC در رأس A قائمه است. نقطه‌ای روی محیط مثلث وجود دارد که فاصله‌ی آن از رأس قائمه و ضلع BC برابر است. این نقطه ....

۱) محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است. ۲) روی عمودمنصف وتر قرار دارد.
۳) محل برخورد نیمسازهای مثلث ABC است. ۴) روی نیمساز یکی از زوایای حاده قرار دارد.

۱۲- دو خط ثابت d و d' موازی‌اند. خط متغیر Δ، این خطوط را به ترتیب در A و B قطع کرده است. نقطه‌ی تلاقی نیمساز زاویه‌های A_1 و B_1، ....



۱) خطی متقاطع با d و d' است.
۲) خطی موازی با d و d' است.
۳) خطی عمود بر d و d' است.
۴) دو خط موازی با d و d' است.

۱۳- در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو رأس A و B ثابت و دو رأس C و D چنان تغییر می‌کنند که AD مقداری ثابت دارد. وسط CD ....

۱) یک نقطه‌ی ثابت است. ۲) دایره‌ای به مرکز وسط AB است.
۳) خطی موازی AB است. ۴) دایره‌ای به مرکز یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع است.

۱۴- در مثلث ABC دو رأس B و C ثابت و رأس A در صفحه‌ی مثلث چنان تغییر مکان می‌دهد که طول ضلع AC همواره برابر با مقدار ثابت k است. نقاط وسط ضلع AB ....

۱) خطی عمود بر BC است.
۲) خطی موازی BC است.
۳) دایره‌ای به مرکز وسط BC است.
۴) دایره‌ای به مرکز B است.

عمران ۱۵- در مثلث ABC، ضلع BC ثابت و $\widehat{A}=90^\circ$ است. نقطه‌ی همرسی میانه‌های مثلث روی .... قرار دارد.

۱) یک خط
۲) دو خط موازی
۳) دایره‌ای به مرکز وسط BC
۴) دایره‌ای به مرکز A

۱۶- برای رسم عمودمنصف پاره‌خط $AB=a$، دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی R باز کرده‌ایم. کدام گزینه درباره‌ی R صحیح است؟

۱) $R>\frac{a}{2}$
۲) $R=\frac{a}{2}$
۳) $R<\frac{a}{2}$
۴) اندازه‌ی R اختیاری است.

۱۷- از مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول وتر آن مشخص است. با معلوم‌بودن اندازه‌ی کدام جزء دیگر، این مثلث قابل رسم نخواهد بود؟

۱) ارتفاع وارد بر وتر
۲) نیمساز رأس قائمه
۳) میانه‌ی وارد بر وتر
۴) یک زاویه‌ی حاده

۱۸- چند مثلث ABC، با اطلاعات $b=3$، $c=1$ و $h_a=2$ قابل رسم است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۱۹- در رسم مثلث ABC با معلومات $c=10$، $b=4$ و ارتفاع h_a یک جواب پیدا شده است. h_a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۱۱

۲۰- در رسم مثلث ABC با معلوم‌بودن $c=7$، $b=13$ و $h_a=6$ چند جواب متمایز وجود دارد؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) ۲
۴) بیش از ۲

۲۱- در رسم مثلث ABC با معلومات $c=3+2x$، $b=8-x$ و $h_a=6-x$ اگر یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شده باشد، x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۵
۳) $\frac{5}{3}$
۴) چنین x ای وجود ندارد.

عمران ۲۲- در رسم مثلث ABC با معلوم‌بودن $a=8$، $b=12$ و $h_b=6$ چند جواب متمایز وجود دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بیش از ۲

عمران ۲۳- با معلومات $AB=8$، $\widehat{B}=45^\circ$ و $AC=10$، چند مثلث قابل رسم است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) هیچ

عمران ۲۴- با معلومات $AB=8$، $AC=7$ و $\widehat{B}=45^\circ$، چند مثلث قابل رسم است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) هیچ

عمران ۲۵- مثلث ABC با معلومات $\widehat{C}=30^\circ$، $AB=2/5$ و $BC=4$ مفروض است. چند مثلث غیرهمنهشت با این معلومات قابل رسم است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۲۶- در رسم مثلث ABC با معلوم‌بودن $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$ و $b=\sqrt{3}a$، تعداد جواب‌های ممکن کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۷- چند مثلث با معلومات $a=4$، $\widehat{C}=30^\circ$ و $m_a=3$ می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) بیش از ۲
۴) نمی‌توان رسم کرد.

۲۸- در رسم مثلث ABC با اطلاعات $a=4x-7$، $m_b=3x-\frac{3}{2}$ و $m_c=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ یک مثلث قابل رسم است. x چند مقدار طبیعی فرد می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

عمران ۲۹- در رسم مثلث ABC با معلوم‌بودن دو ضلع $b=7$ و $c=5$ و نیز میانه‌ی $m_a=4$ با خط‌کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟ *(سراسری ریاضی ۸۳)*

۱) بی‌شمار جواب دارد.
۲) دارای جواب منحصربه‌فرد است.
۳) دارای دو جواب متمایز است.
۴) دارای سه جواب است.

۳۰- چند مثلث وجود دارد که طول سه میانه‌ی آن ۶، ۸ و ۱۵ باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۳۱- در رسم مثلث ABC با معلوم‌بودن ضلع $a=5$، میانه‌ی $m_a=7$ و ارتفاع $h_a=6$، تعداد جواب‌های متمایز کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۳۲- به مرکز یک سر پاره‌خط AB به طول ۱۰، کمانی به شعاع ۷ می‌زنیم. سپس به مرکز سر دیگر پاره‌خط AB کمانی به همین شعاع می‌زنیم. اگر این دو کمان در نقاط C و D یکدیگر را قطع کنند، با چهار رأس A، B، C و D کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟

۱) ذوزنقه ۲) مستطیل ۳) لوزی ۴) مربع

۳۳- از وسط پاره‌خط AB به طول ۲۰، دایره‌ای به شعاع ۸ رسم می‌کنیم. سپس کمان‌هایی به مرکز A و B و با شعاع ۶ رسم می‌کنیم و محل تلاقی این کمان‌ها با دایره را C و D می‌نامیم. اگر C و D در یک طرف پاره‌خط AB نباشند، مساحت چهارضلعی با رئوس A، B، C و D کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۶

۳۴- طول اضلاع AB و AD و قطر BD از متوازی‌الاضلاع ABCD به ترتیب ۴، ۳ و $\sqrt{2}$ است. چند متوازی‌الاضلاع متمایز با این اطلاعات قابل رسم است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۵- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. چند متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار *(تمرین کتاب درسی)*

۳۶- متوازی‌الاضلاعی با معلوم‌بودن دو قطر به اندازه‌های ۴، ۸ و ضلع a قابل رسم است. a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶/۵

۳۷- با اطلاعات کدام گزینه، لوزی ABCD قابل رسم نیست؟

۱) $AC=11\ ,\ BC=7$ ۲) $AC=11\ ,\ BC=6$ ۳) $AC=13\ ,\ BC=7$ ۴) $AC=13\ ,\ BC=6$

۳۸- با اطلاعات داده‌شده در کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌توان چند شکل غیرهمنهشت رسم کرد؟

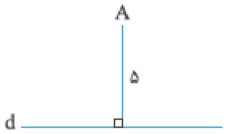
۱) رسم مربع با طول قطر ۷
۲) رسم متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۳ و ۵
۳) لوزی با مساحت ۷/۵ و یک قطر به طول ۳
۴) رسم مستطیل با طول ضلع ۴ و طول قطر ۶

پاسخ تشریحی ترسیم‌های هندسی و استدلال

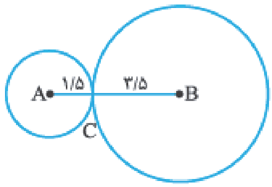
۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که فقط یک نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۵ باشد پس می‌توان نتیجه گرفت فاصله‌ی نقطه‌ی O تا خط d برابر ۵ است.

بنابراین $۳x-۴$ باید برابر ۵ باشد، یعنی:

$$۳x-۴=۵ \Rightarrow x=۳$$



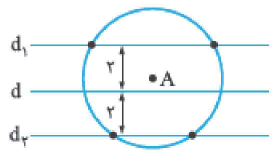
۲- گزینه‌ی ۲ دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱/۵ رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳/۵ رسم می‌کنیم. این دو دایره یک نقطه‌ی مشترک (نقطه‌ی C) دارند که این نقطه ویژگی‌های موردنظر مسئله را داراست.



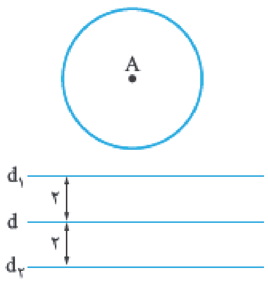
اگر مجموع فاصله‌ی نقطه‌ی موردنظر تا A و B کم‌تر از طول AB باشد، اصلاً نقطه‌ای وجود ندارد. اگر مجموع فاصله‌ی نقطه‌ی موردنظر تا A و B برابر با طول AB باشد، یک نقطه وجود دارد. اگر مجموع فاصله‌ی موردنظر تا A و B بیشتر از طول AB باشد، دو نقطه وجود دارد.

۳- گزینه‌ی ۳ نقاطی که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۵ باشند روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۲ باشد، دو خط موازی با d است.

با توجه به وضعیت خط d نسبت به نقطه‌ی A، حداکثر تعداد نقاط موردنظر ۴ تا است. به شکل‌ها دقت کنید.



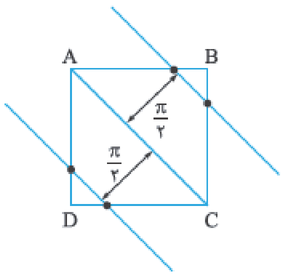
دایره و دو خط موازی با d، چهار نقطه‌ی مشترک دارند.



دایره و دو خط موازی با d، نقطه‌ی مشترک ندارند.

۴- گزینه‌ی ۱ طول ضلع مربع ۳ و طول قطر آن $۳\sqrt{۲}$ است پس فاصله‌ی O تا A برابر با $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ یعنی حدود ۲/۱ است. اگر $\frac{\pi}{۲}$ را تقریباً ۱/۵۷ در نظر بگیریم، داریم:

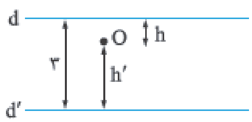
$$\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} > \frac{\pi}{۲}$$



نقاطی که از قطر AC به فاصله‌ی $\frac{\pi}{۲}$ هستند، دو خط موازی با AC و به فاصله‌ی $\frac{\pi}{۲}$ از آن هستند. با توجه به این‌که دو خط موازی با AC مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند، پس مسئله ۴ جواب دارد.

۵- گزینه‌ی ۲ نقاط موردنظر باید بین دو خط d و d' باشند تا فاصله‌ی آن‌ها از d و d' برابر ۲ شود.

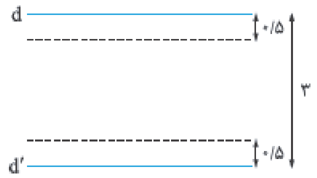
فرض کنیم O یکی از این نقاط باشد. باید $|h-h'|=۲$ باشد. می‌توانیم دو حالت در نظر بگیریم:



حالت ۱ $h-h'=۲$ که با توجه به این‌که $h+h'=۳$ است داریم:

$$\begin{cases} h+h'=۳ \\ h-h'=۲ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲h=۱ \Rightarrow h=۰/۵$$

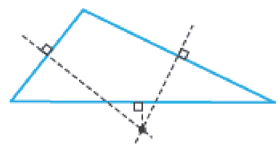
یعنی O باید به فاصله‌ی ۰/۵ از خط d و فاصله‌ی ۲/۵ از خط d' باشد. بنابراین تمام نقاطی که روی خطی موازی d و d' و به فاصله‌ی ۰/۵ از d و ۲/۵ از d' قرار دارند این ویژگی را دارند.



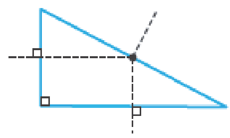
حالت ۲ $h'-h=2$ که با توجه به $h+h'=3$ داریم $h'=0/5$ که خطی موازی با d و d' و به فاصله‌ی ۲/۵ از d و ۰/۵ از d' خواهد بود. بنابراین نقاط موردنظر دو خط موازی با d و d' خواهند بود.

۶- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. بنابراین محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث از سه رأس به یک فاصله است.

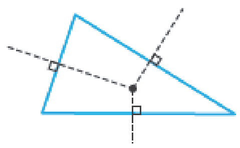
ممکن است محل تلاقی عمودمنصف‌ها درون مثلث نباشد. به شکل‌ها دقت کنید.



مثلث منفرجه‌الزاویه
نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌ها خارج مثلث



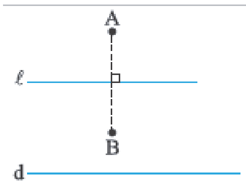
مثلث قائم‌الزاویه
نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌ها وسط وتر



مثلث حاده‌الزاویه
نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌ها داخل مثلث

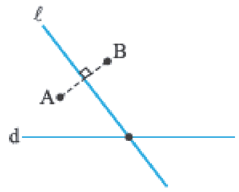
بنابراین حداکثر یک نقطه درون مثلث وجود دارد که از هر سه رأس به یک فاصله باشد.

۷- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم نقاط روی عمودمنصف پاره‌خط AB از A و B به یک فاصله‌اند، بنابراین نقطه‌ی موردنظر محل برخورد عمودمنصف AB و خط d است. دو حالت در نظر می‌گیریم:



حالت ۱ AB بر خط d عمود باشد.

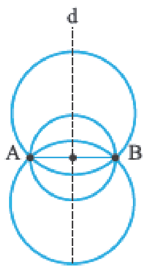
همان‌طور که در شکل مشخص است عمودمنصف AB (یعنی خط ℓ) با خط d موازی است و آن را قطع نمی‌کند و نقطه‌ای وجود ندارد.



حالت ۲ AB بر خط d عمود نباشد. در این حالت خط ℓ (عمودمنصف AB)، خط d را در یک نقطه قطع می‌کند.

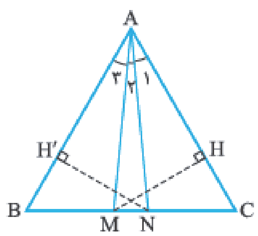
بنابراین **حداکثر یک** نقطه با ویژگی‌های موردنظر مسئله وجود دارد.

۸- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که فاصله‌ی مرکز این دایره‌ها از دو سر پاره‌خط AB یعنی نقاط A و B به یک فاصله است، پس این مراکز روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد (خط d عمودمنصف AB است).



می‌دانیم نقاط واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۹- گزینه‌ی ۲ از این‌که $AB=AC$ است نتیجه می‌گیریم مثلث ABC، متساوی‌الساقین است. $(\hat{B}=\hat{C})$



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+2\hat{B}=180^\circ \Rightarrow 80^\circ+2\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=50^\circ$$

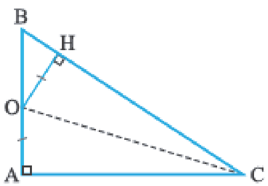
M روی عمودمنصف AC قرار دارد پس از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است؛ یعنی: $MA=MC$

چون $MA=MC$ است پس $\overset{\Delta}{MAC}$ متساوی‌الساقین است و $\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_2=50^\circ$. از طرفی می‌دانیم مثلث $A\hat{B}C$ متساوی‌الساقین است و $\hat{A}_1=\hat{A}_3$ پس:

$$\hat{A}=\underbrace{\hat{A}_1+\hat{A}_2}_{50^\circ}+\hat{A}_3=80^\circ \Rightarrow \hat{A}_3=30^\circ \Rightarrow \hat{A}_1=30^\circ \Rightarrow \hat{A}_2=20^\circ$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث AMN برابر 20° است. $(\hat{A}_2=20^\circ)$

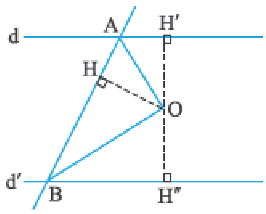
۱۰- گزینه‌ی ۳ هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است. نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی مثلث از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



۱۱- گزینه‌ی ۴ مثلث ABC در رأس A قائمه است. فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی O از رأس A و ضلع BC برابر باشد یعنی $OA = OH$. اگر خوب دقت کنیم می‌بینیم O از دو ضلع زاویه‌ی C به یک فاصله است.

با توجه به این‌که می‌دانیم نقاط روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، بنابراین نقطه‌ی O روی نیمساز زاویه‌ی C قرار دارد.

دقت کنید که ممکن است نقطه‌ی O روی نیمساز زاویه B نیز قرار داشته باشد!

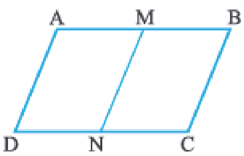


۱۲- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، پس:

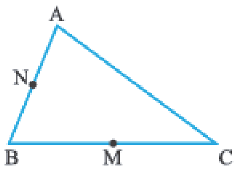
OA نیمساز زاویه‌ی A_1 و OB نیمساز زاویه B_1 است. با توجه به خاصیت نیمساز داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_1 \text{ نیمساز } OA \Rightarrow OH = OH' \\ \widehat{B}_1 \text{ نیمساز } OB \Rightarrow OH = OH'' \end{array}\right\} \Rightarrow OH' = OH''$$

بنابراین O روی خطی موازی با d و d' و به فاصله‌ای برابر از آن‌ها قرار دارد.

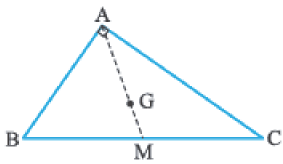


۱۳- گزینه‌ی ۲ متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M و N اوساط اضلاع AB و CD باشند. پاره‌خط MN همواره موازی و مساوی BC است. وقتی دو رأس C و D طوری تغییر می‌کنند که همواره AD ثابت است یعنی MN نیز ثابت است (زیرا $AD = BC = MN$) بنابراین فاصله‌ی M تا N همواره باید ثابت و برابر با طول BC و AD باشد پس وسط CD همواره روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع MN قرار دارد.



۱۴- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم نقاط M و N وسط اضلاع BC و AB باشند. چون M و N وسط اضلاع AB و BC هستند بنابراین $MN = \frac{AC}{۲}$، یعنی نقطه‌ی N به فاصله‌ی $\frac{k}{۲}$ از وسط BC قرار دارد، بنابراین N می‌تواند نقاط روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{k}{۲}$ باشد.

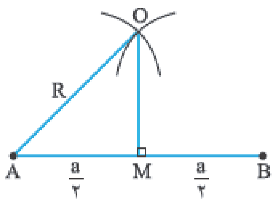
اگر در مثلث ABC، اوساط دو ضلع را به هم وصل کنیم با ضلع سوم موازی و طول آن نصف طول ضلع سوم است.



۱۵- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم نقطه‌ی همرسی میانه‌های مثلث همان مرکز ثقل (G) است و مرکز ثقل، میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. یعنی:

$$AG = \frac{۲}{۳}AM \,,\, GM = \frac{۱}{۳}AM$$

در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است؛ یعنی $AM = \frac{BC}{۲}$، پس $GM = \frac{۱}{۳}AM = \frac{۱}{۳} \times \frac{BC}{۲}$. چون BC ثابت است پس GM نیز ثابت است یعنی فاصله‌ی مرکز ثقل از وسط BC همواره ثابت و برابر با $\frac{BC}{۶}$ است؛ پس مرکز ثقل مثلث روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{BC}{۶}$ قرار دارد.

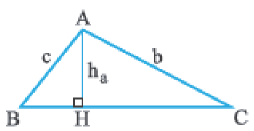


۱۶- گزینه‌ی ۱ اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم شده فرض کنیم، داریم:

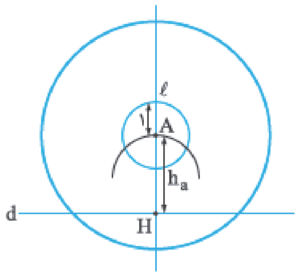
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOM، OA وتر است پس از AM بزرگ‌تر است یعنی $R > \frac{a}{۲}$ است.

۱۷- گزینه‌ی ۳ برای رسم مثلث به سه جزء مستقل نیاز داریم. در این‌جا دو جزء را داریم (وتر و زاویه‌ی قائمه)؛ باید دنبال جزء سوم باشیم به طوری که از این دو جزء مستقل باشد.

در مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است. پس ۳ اطلاعات جدیدی به ما نداد! چون طول وتر را داریم پس خودبه‌خود طول میانه را نیز داریم. بنابراین ۳ کمکی به ما نمی‌کند. اما سه گزینه‌ی دیگر مستقل از دو جزء قبل هستند و می‌توان با کمک آن‌ها مثلث را رسم کرد.



۱۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا مثلث ABC را رسم‌شده فرض می‌کنیم.

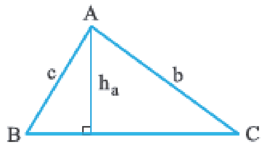


حالا سراغ رسم این مثلث می‌رویم. ابتدا خط d را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ای مانند H روی خط d، خط ℓ را عمود بر d رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی H کمانی به اندازه‌ی $h_a = ۲$ رسم می‌کنیم تا خط ℓ را در نقطه‌ی A قطع کند. حالا که رأس A پیدا شد، به مرکز A و شعاع $c = ۱$ کمانی می‌زنیم تا رأس B را روی خط d مشخص کنیم. همان‌طور که می‌بینید دایره‌ی رسم‌شده به مرکز A و شعاع ۱ (دایره‌ی کوچک)، خط d را قطع نمی‌کند پس مثلث ABC با این اطلاعات رسم نمی‌شود.

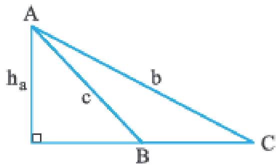
اگر می‌خواستیم رأس C را بیابیم باید دایره‌ای به مرکز A و شعاع $b = ۳$ می‌زدیم. (دایره‌ی بزرگ).

۱۹- گزینه‌ی ۲ روش رسم مثلث ABC را در سؤال قبل گفتیم. بد نیست حالت‌های مختلف رسم مثلث در حالی که طول دو ضلع و طول ارتفاع وارد بر ضلع دیگر داده شده است را ببینیم.

حالت ۱ $b \neq c$ و $h_a < b, c$؛ در این حالت دو نوع مثلث حاده‌الزاویه و منفرجه‌الزاویه داریم.

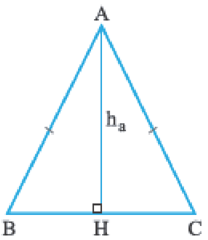


منفرجه‌الزاویه

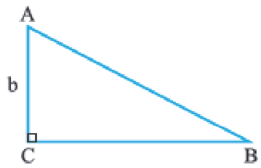


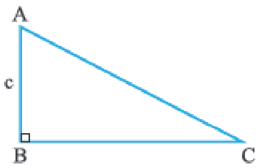
حاده‌الزاویه

حالت ۲ $h_a < b = c$؛ در این حالت یک مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود.



حالت ۳ $b \neq c$ و $h_a = b$ یا $h_a = c$؛ در این حالت یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌شود.



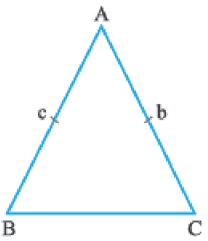


حالت ۴ $h_a > b$ یا $h_a > c$؛ هیچ مثلثی تشکیل نمی‌شود (در مثال قبل دیدیم).

برگردیم به حل سؤال خودمان! در حالت‌های دوم و سوم، یک مثلث داریم. این دو حالت را برای سؤال بررسی می‌کنیم.

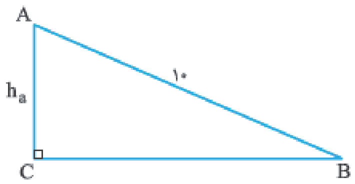
۱ اگر $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین باشد:

باید $b = c$ باشد که با اطلاعات مسئله سازگار نیست. پس این حالت قابل قبول نیست.

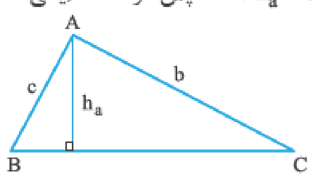


۲ اگر $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه باشد:

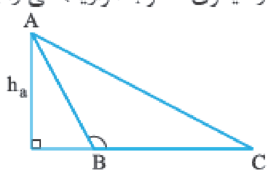
اگر $h_a = ۴$ باشد، مثلث ABC به صورت مقابل خواهد بود (در این حالت $h_a = b$ است):



۲۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به حالت‌های سؤال قبل $b \neq c$ و $h_a < b, c$ است. پس دو مثلث (یکی حاده‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه) می‌توانیم رسم کنیم.



حاده‌الزاویه



منفرجه‌الزاویه

۲۱- گزینه‌ی ۱ زمانی مثلث قائم‌الزاویه با معلومات داده‌شده قابل رسم است که $b \neq c$ و $h_a = b$ یا $h_a = c$ باشد. دو حالت را بررسی می‌کنیم:

۱ اگر $h_a = b$ باشد پس: $۶ - x = ۸ - x \Rightarrow$ به ازای هیچ مقداری از x برقرار نیست

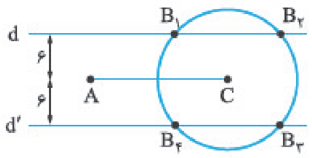
۲ اگر $h_a = c$ باشد آن‌گاه: $۶ - x = ۳ + ۲x \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$

حالا باید بررسی کنیم که $b \neq c$ باشد:

$$x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} b = ۷ \\ c = ۵ \end{cases}$$

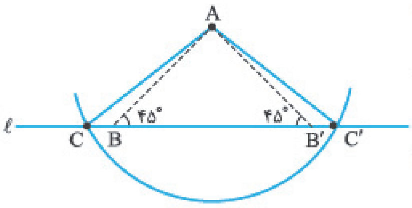
چون به ازای $x = ۱$، $b \neq c$ شد پس مثلث قائم‌الزاویه‌ای با داده‌های مسئله قابل رسم است.

۲۲- گزینه‌ی ۳ پاره‌خط $AC = b = ۱۲$ را رسم می‌کنیم. ارتفاع وارد بر AC یعنی h_b برابر ۶ است یعنی تمام نقاطی که روی دو خط موازی با AC و به فاصله‌ی ۶ از آن باشند می‌توانند به عنوان رأس B در نظر گرفته شوند. اما طول ضلع BC یعنی a باید برابر ۸ باشد. یعنی از نقطه‌ی C باید دایره‌ای به شعاع ۸ بزنیم و ببینیم دو خط d و d' که موازی با AC و به فاصله‌ی ۶ از آن هستند را در چند نقطه قطع می‌کند.



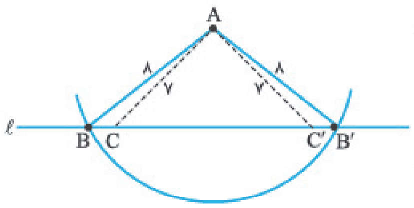
همان‌طور که در شکل می‌بینید دایره‌ی موردنظر، دو خط را در ۴ نقطه قطع کرده است. اما باید دقت کنیم که دو مثلث AB_1C و AB_4C همنهشت هستند. هم‌چنین دو مثلث AB_2C و AB_3C نیز همنهشت هستند. بنابراین دو مثلث متمایز با داده‌های مسئله قابل رسم است.

۲۳- گزینه‌ی ۱ به شکل دقت کنید! زوایای B و B' روی خط ℓ به اندازه‌ی ۴۵° جدا شده‌اند و سپس دایره‌ای به مرکز B و B' و شعاع ۸ رسم شده است. به مرکز رأس A نیز دایره‌ای به شعاع ۱۰ رسم شده تا نقاط C و C' روی خط ℓ مشخص شوند.



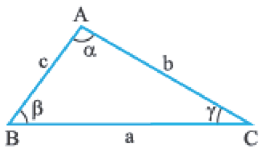
همان‌طور که در شکل مشخص است، ABC' و $AB'C$ همنهشت هستند و فقط یک مثلث با اطلاعات داده‌شده قابل رسم است.

۲۴- گزینه‌ی ۲ شکل را ببینید! زوایای B و B' روی خط ℓ به اندازه‌ی ۴۵° جدا شده‌اند. سپس دایره‌ای به مرکز B و B' و شعاع ۸ رسم شده است. به مرکز A و شعاع ۷ دایره‌ای رسم شده تا خط d را در نقاط C و C' قطع کند.



مثلث‌های ABC' و $AB'C$ و هم‌چنین دو مثلث ACB و $AB'C'$ همنهشت هستند. بنابراین دو مثلث (ACB, ABC') با اطلاعات داده‌شده قابل رسم است.

۲۵- گزینه‌ی ۲ شاید تا حالا قضیه سینوس‌ها در مثلث را دیده باشید. گاهی برای یافتن تعداد مثلث‌های قابل رسم که یک زاویه‌ی آن‌ها داده شده باشد کاربرد دارد.

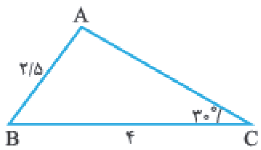


مثلث ABC با ویژگی‌های مقابل را در نظر بگیرید.

قضیه‌ی سینوس‌ها می‌گوید:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

در سؤالی که به ما داده شده داریم:



$$\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{BC}{\sin\widehat{A}} \Rightarrow \frac{۲/۵}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{۴}{\sin\widehat{A}}$$

بنابراین:

$$\frac{۲/۵}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۴}{\sin\widehat{A}} \Rightarrow \sin\widehat{A} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

احتمالاً در مثلثات یاد گرفته‌اید! که $\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$ و $\sin ۵۳^\circ = ۰/۸$، پس $\widehat{A} = ۵۳^\circ$.

اما مکمل این زاویه یادتان نرود. سینوس مکمل زاویه‌ی ۵۳° یعنی سینوس ۱۲۷° نیز برابر با $۰/۸$ است. پس دو مثلث قابل رسم است. یکی با $\widehat{A} = ۳۵^\circ$ و دیگری با $\widehat{A} = ۱۲۷^\circ$.

۲۶- گزینه‌ی ۱ با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

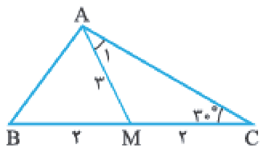
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin\frac{\pi}{۳}} = \frac{a\sqrt{۳}}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{a\sqrt{۳}}{\sin\widehat{B}}$$

بنابراین:

$$\sin\widehat{B} = \frac{۳}{۲}$$

از آن‌جا که همواره $-۱ \leq \sin\alpha \leq ۱$ است پس چنین زاویه‌ای وجود ندارد و مثلث ABC قابل رسم نیست.

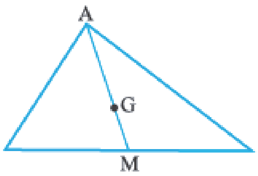
۲۷- گزینه‌ی ۱ مثلث را رسم‌شده در نظر می‌گیریم:



با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث AMC داریم:

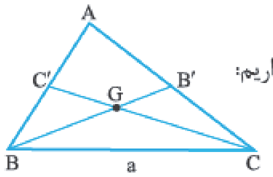
$$\frac{AM}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{MC}{\sin \widehat{A}_۱} \Rightarrow \frac{۳}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\sin \widehat{A}_۱} \Rightarrow \sin \widehat{A}_۱=\frac{۱}{۳}$$

سینوس زاویه‌ی $A_۱$ برابر $\frac{۱}{۳}$ شده، این زاویه کوچک‌تر از ۳۰° است. زاویه‌ی $\widehat{A}_۱$ تقریباً برابر با ۲۰° است. اما باید دقت کنیم که سینوس زاویه‌ی مکمل ۲۰° یعنی سینوس ۱۶۰° نیز برابر با $\frac{۱}{۳}$ می‌شود. اما $\widehat{A}_۱$ نمی‌تواند ۱۶۰° باشد زیرا $\widehat{A}_۱+\widehat{C}=۱۹۰^\circ$ می‌شود که از ۱۸۰° (مجموع زوایای داخلی مثلث) بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین $\widehat{A}_۱$ فقط می‌تواند برابر ۲۰° باشد و فقط یک مثلث ABC با این اطلاعات قابل رسم است.



۲۸- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم محل برخورد میانه‌ها (مرکز ثقل) هر میانه را به دو قسمت تقسیم می‌کند که یکی $\frac{۲}{۳}$ میانه و دیگری $\frac{۱}{۳}$ میانه است.

$$AG=\frac{۲}{۳}AM\,,\ GM=\frac{۱}{۳}AM$$



حالا اگر مثلث داده‌شده را رسم‌شده فرض کنیم، با استفاده از نامساوی مثلثی (قضیه‌ی حِمار!) در مثلث BGC داریم:

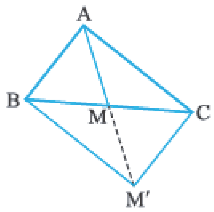
$$BB'=m_b \Rightarrow BG=\frac{۲}{۳}m_b$$

$$CC'=m_c \Rightarrow CG=\frac{۲}{۳}m_c$$

باید:

$$\begin{cases} BG+CG>a \Rightarrow \frac{۲}{۳}(۳x-\frac{۳}{۲})+\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲})>۴x-۷ \Rightarrow (۲x-۱)+(x+۱)>۴x-۷ \Rightarrow ۳x>۴x-۷ \Rightarrow x<۷ \\ CG+a>BG \Rightarrow \frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲})+(۴x-۷)>\frac{۲}{۳}(۳x-\frac{۳}{۲}) \Rightarrow (x+۱)+(۴x-۷)>۲x-۱ \Rightarrow ۵x-۶>۲x-۱ \Rightarrow x>\frac{۵}{۳} \\ BG+a>CG \Rightarrow \frac{۲}{۳}(۳x-\frac{۳}{۲})+(۴x-۷)>\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲}) \Rightarrow (۲x-۱)+(۴x-۷)>(x+۱) \Rightarrow ۶x-۸>x+۱ \Rightarrow x>\frac{۹}{۵} \end{cases}$$

اگر بین جواب‌ها اشتراک بگیریم $\frac{۹}{۵}<x<۷$ خواهد شد که چون x های طبیعی و فرد را خواسته فقط $x=۳$ و $x=۵$ قابل قبول هستند.



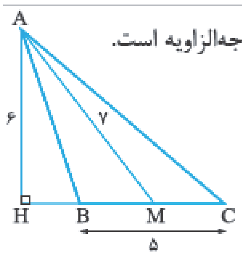
۲۹- گزینه‌ی ۲ مثلث ABC را رسم‌شده فرض می‌کنیم.

میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی M' برسیم. $ACM'B$ متوازی‌الاضلاع است پس AB با CM' برابر است. طول اضلاع مثلث ACM' ($CM'=۵$، $AM'=۸$ و $AC=۷$) در نامساوی مثلثی صدق می‌کنند پس مثلث ACM' به صورت منحصربه‌فرد قابل رسم است. کافی است CM را به اندازه‌ی خودش امتداد دهیم تا به نقطه‌ی B برسیم، بنابراین مثلث ABC نیز منحصربه‌فرد است و به صورت یکتا قابل رسم است.

طول میانه‌ی وارد بر هر ضلع، از نصف قدرمطلق تفاضل اندازه‌های دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از نصف مجموع طول‌های دو ضلع دیگر کوچک‌تر است. در این‌جا $\frac{|b-c|}{۲}<m_a<\frac{b+c}{۲}$؛ یعنی $\frac{۷-۵}{۲}<۴<\frac{۷+۵}{۲}$.

چون اندازه‌های داده‌شده در نامساوی فوق صدق می‌کنند پس مثلث ABC به صورت منحصربه‌فرد قابل رسم است.

۳۰- گزینه‌ی ۱ با میانه‌های هر مثلث می‌توان مثلث دیگری ساخت، بنابراین طول میانه‌های یک مثلث باید در نامساوی مثلثی (مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است) صدق کنند. با توجه به این‌که $۶+۸ \not> ۱۵$ $(m_a+m_b \not> m_c)$ پس چنین مثلثی وجود ندارد.



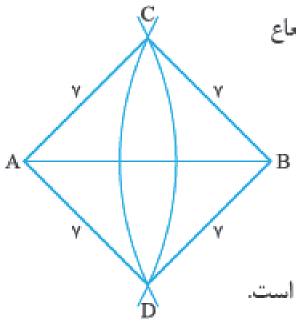
۳۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که طول میانه‌ی AM از طول ارتفاع AH بزرگ‌تر است پس مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است.

مثلث AHM قائم‌الزاویه است و با معلوم‌بودن وتر و یک ضلع قابل رسم است. فرض می‌کنیم مثلث AHM را رسم کرده‌ایم و می‌خواهیم نقاط B و C را پیدا کنیم. کافی است به مرکز M و شعاع $\frac{۵}{۲}$ دایره‌ای رسم کنیم تا امتداد MH را در دو نقطه قطع کند. از طرفی با استفاده از فیثاغورس داریم:

$$AM^۲=AH^۲+HM^۲ \Rightarrow ۷^۲=۶^۲+HM^۲ \Rightarrow HM=\sqrt{۴۹-۳۶}=\sqrt{۱۳}$$

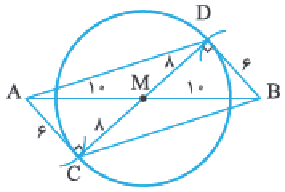
با توجه به این‌که نقطه‌ی B، بین M و H قرار دارد پس فقط یک نوع مثلث منفرجه‌الزاویه تشکیل می‌شود.

۳۲- گزینه‌ی پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. یک بار به مرکز A و شعاع ۷ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۷، کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط C و D قطع کنند.



همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود طول چهار ضلع شکل ACBD برابر ۷ است و یک لوزی تشکیل شده است.

۳۳- گزینه‌ی ابتدا پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. به مرکز M وسط AB، دایره‌ای به شعاع ۸ رسم می‌کنیم. به مرکز A و شعاع ۶ کمانی می‌زنیم تا دایره را در نقطه‌ی C قطع کند. چون C و D نباید در یک طرف AB باشند پس به مرکز B و شعاع ۶ کمان دیگری می‌زنیم تا دایره را در نقطه‌ی D قطع کند.

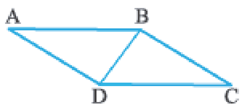


چهارضلعی ADBC متوازی‌الاضلاع است. (چرا؟!)

به مثلث DBM دقت کنید! ۶، ۸ و ۱۰ اعداد فیثاغورسی هستند پس زاویه‌ی D در این مثلث قائم است بنابراین مثلث DBC نیز قائم‌الزاویه است و مساحت آن نصف مساحت متوازی‌الاضلاع ADBC است.

$$S_{ADBC}=۲S_{DBC}=۲\times\frac{۱۶\times۶}{۲}=۹۶$$

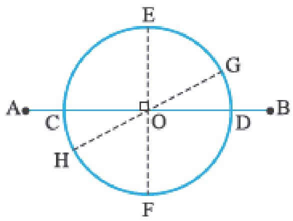
۳۴- گزینه‌ی متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم‌شده فرض می‌کنیم.



می‌دانیم قطر متوازی‌الاضلاع، آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند.

مثلث ABD با داشتن طول سه ضلع قابل رسم و منحصربه‌فرد است. مثلث BDC نیز با رسم خطوط موازی و مساوی با AB و AD از رئوس B و D به دست می‌آید، بنابراین متوازی‌الاضلاع ABCD منحصربه‌فرد است.

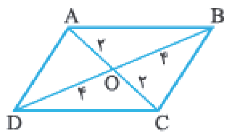
۳۵- گزینه‌ی ابتدا پاره‌خطی به طول ۷ رسم می‌کنیم و وسط آن (O) را مشخص می‌کنیم (می‌توانیم وسط پاره‌خط را با روش رسم عمودمنصف نیز به دست آوریم). چون قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، به مرکز O و شعاع ۲ (نصف طول قطر دیگر) دایره‌ای رسم می‌کنیم. تمام قطرهای دایره (به‌جز قطر CD) می‌توانند به عنوان قطر دیگر متوازی‌الاضلاع باشند، بنابراین بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توانیم رسم کنیم.



EF و GH دو قطر از بین بی‌شمار قطر دایره است که برای ما متوازی‌الاضلاع‌های AGBH و AEBF را می‌سازند.

دقت کنید که چهارضلعی AEBF لوزی است (به عبارت ساده‌تر، متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن بر هم عمودند).

۳۶- گزینه‌ی متوازی‌الاضلاع را به صورت مقابل، رسم‌شده فرض می‌کنیم. کافی است شرط وجود مثلث را در یکی از مثلث‌های کوچک بررسی کنیم.



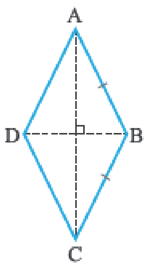
می‌دانیم اندازه‌ی هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل اندازه‌های دو ضلع دیگر بیشتر و از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کم‌تر است. این شرط را در مثلث AOB می‌نویسیم:

$$|OA-OB|<AB<OA+OB$$

$$|۲-۴|<a<۲+۴ \Rightarrow ۲<a<۶$$

در بین گزینه‌ها، a نمی‌تواند ۶/۵ باشد.

۳۷- گزینه‌ی در لوزی مقابل، طول AB و BC برابر است.



با توجه به گزینه‌ها اگر مثلث ABC قابل رسم باشد، لوزی ABCD نیز به راحتی قابل رسم است.

در مثلث ABC باید نامساوی مثلثی برقرار باشد یعنی مجموع طول دو ضلع از طول ضلع سوم کوچک‌تر باشد.

(۱)
$$\begin{cases} AB = BC = ۷ \\ AC = ۱۱ \end{cases} ; \begin{cases} AB + BC > AC & \checkmark \\ AB + AC > BC & \checkmark \\ AC + BC > AB & \checkmark \end{cases}$$

(۲)
$$\begin{cases} AB = BC = ۶ \\ AC = ۱۱ \end{cases} ; \begin{cases} AB + BC > AC & \checkmark \\ AB + AC > BC & \checkmark \\ AC + BC > AB & \checkmark \end{cases}$$

(۳)
$$\begin{cases} AB = BC = ۷ \\ AC = ۱۳ \end{cases} ; \begin{cases} AB + BC > AC & \checkmark \\ AB + AC > BC & \checkmark \\ AC + BC > AB & \checkmark \end{cases}$$

(۴)
$$\begin{cases} AB = BC = ۶ \\ AC = ۱۳ \end{cases} ; \{ AB + BC \not> AC \quad \times$$

بنابراین با داده‌های (۴) نمی‌توان مثلث و به تبع آن لوزی ساخت.

۳۸- گزینه‌ی ۲ در تمرین‌های کتاب درسی دیدیم که فقط یک مربع با طول قطر a قابل رسم است ((۱)). همچنین لوزی‌ای که طول دو قطر آن یا طول یک ضلع و یک قطر آن داده شده باشد نیز منحصربه‌فرد است (چون مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر، بنابراین در (۳) طول دو قطر را داریم). رسم مستطیل با طول قطر مشخص، بی‌شمار جواب دارد اما رسم مستطیل با داشتن طول قطر و یک ضلع، منحصربه‌فرد است.

اما در سؤالات قبل دیدیم که بی‌شمار متوازی‌الاضلاع غیرهمنهشت با داشتن طول دو قطر قابل رسم است.