

$$\frac{x}{2-x} \geq 1 \rightarrow \frac{x}{2-x} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{x-2+x}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{2x-2}{2-x} \geq 0$$

$$2x-2=0 \rightarrow x=1$$

$$2-x=0 \rightarrow x=2$$

| $x$                       | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------------------------|-----------|-----|-----|-----------|
| $2x-2$                    | -         | o   | +   | +         |
| $2-x$                     | +         |     | +   | o         |
| $\frac{2x-2}{2-x} \geq 0$ | -         | o   | +   | نامعین    |

مجموعه ی جواب  $= [1, 2)$

\*\*\*

## فصل ۵ : تابع

۱ : اگر مجموعه ی زیر یک تابع باشد، مقدار  $m$  را بیابید.

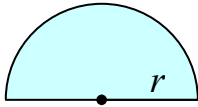
$$f = \{(1,3), (2,0), (-1,4), (1, m^2 - 2m), (m,7)\}$$

۲ : معادله ی یک تابع خطی را بنویسید که از دو نقطه ی  $(2,7)$  و  $(5,3)$  می گذرد.

۳ : معادله ی تابعی را بنویسید که دامنه ی آن  $R - \{-5\}$  باشد.

$$4 : \text{اگر } f(x) = x^3 - 1 \text{ نشان دهید که } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = a^2 + b^2 + ab$$

۵ : محیط نیم دایره ی مقابل را به عنوان تابعی بر حسب  $r$  بنویسید.



حل :

۱ :

$$m^2 - 2m = 3 \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \rightarrow (m+1)(m-3) = 0 \rightarrow m = -1 \text{ and } m = 3$$

بنابه تعریف تابع مقدار  $m = -1$  قابل قبول نیست.

: ۲

$$(\delta, 3) \in f \rightarrow 3 = \delta a + b$$

$$(2, 7) \in f \rightarrow 7 = 2a + b$$

$$\begin{cases} \delta a + b = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \xrightarrow{(-1) \times} \begin{cases} \delta a + b = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\delta a - b = -3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \rightarrow -3a = 4 \rightarrow a = \frac{4}{-3}, b = \frac{13}{3}$$

$$f(x) = ax + b \rightarrow f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3} \quad \text{معادله ی تابع خطی}$$

: ۳

$$f(x) = \frac{1}{x + \delta}$$

: ۴

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(b^r - 1) + (a^r - 1)}{b - a} = \frac{b^r - 1 - a^r + 1}{b - a} \\ &= \frac{b^r - a^r}{b - a} = \frac{(b - a)(b^r + a^r + ab)}{b - a} = a^r + b^r + ab \end{aligned}$$

: ۵

$$p = \frac{2\pi r}{2} + 2r = \pi r + 2r = r(\pi + 2)$$

\*\*\*

### فصل ۶: شمارش بدون شمردن

۱: عبارت های زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف)  $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$

ب)  $8 \times 7 \times 6 \times 5 =$

ج)  $5 \times 24 =$

۲: تعداد قطر های یک ۱۲ ضلعی محدب را محاسبه کنید.

۳: اگر  $C(n, 4) = P(n - 1, 3)$  ، عدد  $n$  را بیابید.

۴: دو خط موازی داده شده است و روی هر کدام از این دو خط ۵ نقطه قرار دارد. چند مثلث با این نقاط می توان ساخت؟

۵: برای هر یک از موارد زیر یک مسئله بنویسید.

$$\text{الف) } \binom{5}{3} \times \binom{6}{5} \times \binom{7}{5}$$

$$\text{ب) } \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$$

حل:

۱: عبارت های زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$\text{الف) } 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$$

$$\text{ب) } 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{(8 \times 7 \times 6 \times 5) \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{4!}$$

$$\text{ج) } 5 \times 24 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

۲: اگر از تعداد حالات انتخاب ۲ نقطه از کل نقاط تعداد اضلاع را کم کنیم. تعداد قطرها به دست می آید.

$$\binom{n}{2} - n = \binom{12}{2} - 12 = 66 - 12 = 54$$

۳:

$$C(n, 4) = P(n-1, 3)$$

$$\rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} \rightarrow \frac{n(n-1)!}{4!(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \rightarrow \frac{n}{4!} = 1 \rightarrow n = 4! = 24$$

۴: باید یکی از دو خط را انتخاب کنیم. سپس از آن خط دو نقطه و از خط دیگر یک نقطه بر داریم.

$$\binom{5}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 2 \binom{5}{1} \times \binom{5}{2} = 2 \times 5 \times \frac{5 \times 4}{2} = 100$$

۵:

الف: به چند طریق می توان از بین ۵ دانش آموز نهم و ۶ هفتم و ۷ دانش آموز پایه ی هشتم به تعداد ۱۳

نفر انتخاب کرد، طوری که ۳ دانش آموز از پایه ی نهم و از پایه های دیگر هر کدام ۵ نفر باشند.

ب : در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره آبی و ۷ مهره قرمز وجود دارد. می خواهیم به تصادف دو مهره از این جعبه استخراج کنیم. تعداد حالت هایی را تعیین کنید که این حالت ها هم رنگ باشند.

توجه : از تساوی  $\binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} = \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}$  کمک گرفته شده است.

\*\*\*

### فصل ۷: آمار و احتمال

۱: اگر  $P(A) = \frac{2}{10}$  و  $P(B) = \frac{5}{10}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$  باشد. تساوی های زیر را کامل کنید.

الف :  $P(A') =$  ج :  $P(A \cup B) =$  هـ :  $P(A \cup B)' =$

ب :  $P(B') =$  د :  $P(A \cap B)' =$

۲: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد دلخواه و  $B \subseteq A$  باشند، هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

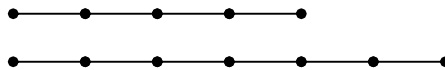
الف)  $P(A - B) = P(A) - P(B)$  ب)  $P(B) \leq P(A)$

۳: برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  از فضای نمونه ای  $S$  ثابت کنید که :

$$P(A' \cup B) - P(A \cap B) = P(A')$$

۴: دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند، از این نقطه ها، سه نقطه به تصادف انتخاب

می کنیم. احتمال اینکه این سه نقطه رأس های یک مثلث باشند، را به دست آورید.



۵: نوع هریک از متغیر های زیر را بنویسید.

الف) سرعت اتومبیل

ب) تعداد معلمان یک مدرسه

ج) وضع سواد

د) نمره ی دانش آموز

حل :

۱ :

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{10-2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{10} = \frac{10-5}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B)^c = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{10-1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$$

: ۲

الف :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \xrightarrow{A \cap B = B} P(A - B) = P(A) - P(B)$$

: ب

$$B \subseteq A \rightarrow \Phi \subseteq A - B \rightarrow P(\Phi) \leq P(A - B) \xrightarrow{P(\Phi) = 0} 0 \leq P(A - B) \\ \rightarrow 0 \leq P(A) - P(B) \rightarrow P(B) \leq P(A)$$

: ۳

$$P(A' \cup B) - P(A \cap B) = P(A') - P(A' \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A') - \underbrace{P(B \cap A')} + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}$$

$$= P(A') - P(B - A) + P(B - A) = P(A')$$

۴: می توان این نقطه ها را دو گروه ۵ نقطه ای و ۷ نقطه ای در نظر گرفت. حال برای ایجاد مثلث باید دو

نقطه از یک گروه و یک نقطه از گروه دیگر انتخاب کرد. در این صورت داریم:

$$P(x) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{7}{2}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{2} \times \binom{7}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} = \frac{175}{220} = \frac{35}{44}$$

(د) کمی گسسته

(ج) کیفی اسمی

(ب) کمی گسسته

۵: الف) کمی پیوسته