شماره کلاس:		بسمه تعالی	طراح سوال:
پایه و رشته: دهم ریاضی		اداره آموزش و پرورش ناحیه ۲ قم	نمره به عدد: نمره به حروف:
تعداد سوال: ۱۷ سوال		دبیرستان شهید دکتر مجید شهریاری	نام دبیر و امضاء:

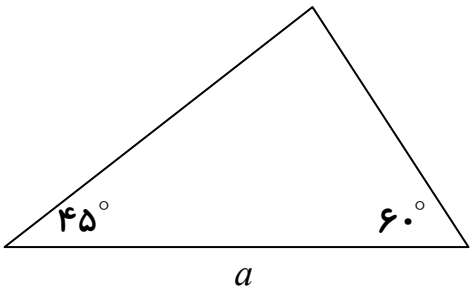
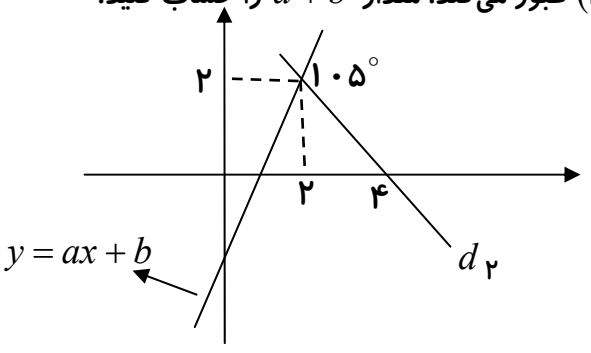
آزمون درس: ریاضی دهم	نوبت دی ماه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۱ / ۱۰ /۳
نام و نام خانوادگی:	نیاز به پاسخ نامه دارد□ ندارد☑	مدت آزمون: ۱۲۰دقیقه

ردیف	سوال	بارم
۱	**جاهای خالی را با کلمات مناسب پرکنید.** **الف. اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، آن‌گاه $B-A$ ..... است.** **ب. دنباله $۲,۲,۲,\ldots$ یک دنباله ..... و ..... می‌باشد.** **ج. اگر $\sin ۹۰^\circ \times \cos\theta < ۰$ و $\cos ۰^\circ \times \sin\theta > ۰$ باشد، θ در ناحیه ..... قرار دارد.** **د. اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آن‌گاه مقدار $\sqrt[n]{a}$ از a ..... است.**	۱/۲۵
۲	**اگر $A_n = \left[\frac{۱}{n}, \frac{۲}{n}\right]$ آن‌گاه حاصل مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.** **الف.** $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$ **ب.** $A_۳ - A_۲$	۱/۲۵
۳	**در یک دنباله حسابی مجموع جملات اول و ششم، چهار برابر جمله دوم است. اگر جمله سوم این دنباله برابر ۵ باشد، قدر نسبت دنباله را حساب کنید.**	۱/۲۵

۴	در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم ۳۰- و مجموع جملات چهارم و ششم برابر ۸۱۰ است. جمله عمومی دنباله را بنویسید.	۱/۲۵
۵	در مثلث قائم الزاویه ABC داریم: $B=۹۰^\circ$ ، $BC=۵\sqrt{۳}$ و $AC=۱۰$. اگر $C=\theta$، مقدار $(\sin\theta+\cos\theta)\tan\theta$ چند برابر $\frac{۱}{۶}$ است.	۱/۵
۶	اگر $-۳۰^\circ \le \theta \le ۴۵^\circ$ باشد و $\cos\theta = ۲m+۱$ ، حدود تغییرات m را پیدا کنید.	۱
۷	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $\tan ۲۵^\circ \cot ۲۵^\circ - \frac{\sin ۱۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ} + ۲\cos ۸۰^\circ =$	۱

۸	اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}$ باشد، حاصل $\cot x$ را حساب کنید. (بدون حدس و آزمایش)	۱
۹	اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید. $۱ - \cot^{۴} x = \frac{۱}{\sin^{۲} x} - \frac{\cos^{۲} x}{\sin^{۴} x}$	۱
۱۰	حاصل عبارت زیر را به کمک اتحادها بدست آورید. $(a-۱)^{۳}(a+۱)^{۳}\left(a^{۴}+a^{۲}+۱\right)^{۳} =$	۱
۱۱	عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. $\left(x^{۲}-x\right)^{۲} - ۸x^{۲} + ۸x + ۱۲ =$ $a^{۳} - ۲a^{۲} + ۱ =$	۱/۵

۱۲	اگر $x=۱-\sqrt{۲}$ باشد، حاصل $\left(x-x^{-۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ را حساب کنید.	۱
۱۳	الف. حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. $\left(۱+\sqrt{۲}\right)^{۱۰}\left(۳-\sqrt{۸}\right)^{۵}=$ ب. حاصل عبارت را ساده کرده ، حداکثر با یک رادیکال بنویسید. $\frac{\left(\sqrt[۵]{۸}\right)^{\frac{۱}{۶}}+\sqrt[۳]{۱۰\sqrt{۸}}}{\left(\sqrt{۲}\right)^{\frac{۱}{۱۵}}}=$	۱/۵
۱۴	اگر $x^{۲}+۳x+۱=۰$ ، حاصل عبارت $x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}$ را بدست آورید.	۱

۱۵	**مخرج کسر زیر را گویا کنید.** $\frac{x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}+۱}$	۱
۱۶	**مساحت مثلث مقابل را بر حسب a بدست آورید.**  	۱/۵
۱۷	**خط $d_۱: \ y=ax+b$ و خط $d_۲$ مقابل شکل از نقطه $(۲,۲)$ عبور می‌کند. مقدار $a+b$ را حساب کنید.**  	۱
		۲۰

پاسخ تشریحی ریاضی دهم رشته‌ی ریاضی - شهریاری - قلم تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۳ احسان نقی زاده

سئوال ۱) الف) نامتناهی ب) صعودی و نزولی ج) دوم د) نیم‌ساز

سئوال ۲)

$A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$

الف) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [1,2] \cup \left[\frac{1}{2},1\right] \cup \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] = \left[\frac{1}{3},2\right]$

ب) $A_3 - A_2 = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] - \left[\frac{1}{2},1\right] = \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

سئوال ۳)

$\begin{cases} a_1 + a_5 = 4a_2 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 4d) = 4(a_1 + d) \quad (1) \\ a_2 = 5 \Rightarrow a_1 + 2d = 5 \quad (2) \\ d = ? \end{cases}$

$\Rightarrow (1) = 2a_1 + 5d = 4a_1 + 4d \Rightarrow 2a_1 - d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 2a_1}$

$\Rightarrow (2) = a_1 + 2(2a_1) = 5 \Rightarrow a_1 + 4a_1 = 5 \Rightarrow 5a_1 = 5 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

$\Rightarrow d = 2a_1 \xrightarrow{a_1 = 1} d = 2 \times 1 = 2$

سئوال ۴)

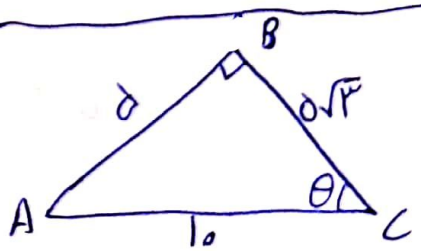
$\begin{cases} a_1 + a_3 = -30 \rightarrow a_1 + a_1 q^2 = -30 \rightarrow a_1(1+q^2) = -30 \quad (1) \\ a_4 + a_6 = 110 \rightarrow a_1 q^3 + a_1 q^5 = 110 \rightarrow a_1 q^3 (1+q^2) = 110 \quad (2) \end{cases}$

$\xrightarrow{(1) \div (2)} \frac{1}{q^3} = \frac{-1}{27} \Rightarrow q^3 = -27 \Rightarrow \boxed{q = -3}$

$a_1 + a_1 \times (-3)^2 = -30 \Rightarrow a_1 + 9a_1 = -30 \Rightarrow 10a_1 = -30 \Rightarrow a_1 = -3$

$\Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = -3 \times (-3)^{n-1} = -3(-3)^{n-1}$

سئوال ۵)



$AB^2 + (5\sqrt{3})^2 = 10^2 \Rightarrow AB^2 + 75 = 100 \rightarrow AB = 5$

$\sin\theta = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

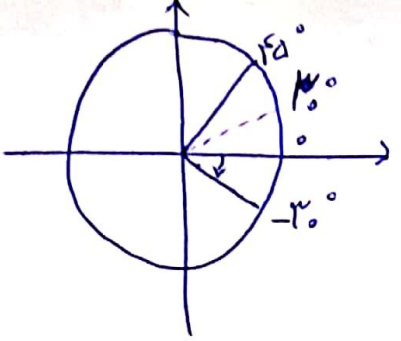
$\Rightarrow \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\tan\theta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+9}{2\times 3} = \frac{3(\sqrt{3}+3)}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

Scanned with CamScanner

سوال ۶

$-30^\circ < \theta < 45^\circ$

$\cos\theta = 2m+1$



$\max_{\cos\theta} = 1$

$\min \cos\theta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos 45^\circ < 2m+1 \leq \cos 0^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < 2m+1 \leq 1 \xrightarrow{\times 2} \sqrt{2} < 4m+2 \leq 2$

$\Rightarrow \sqrt{2}-2 < 4m \leq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-2}{4} < m \leq 0 \rightarrow m \in \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}, 0\right]$

سوال ۷

$\underbrace{\tan 45^\circ \cot 45^\circ}_{1} - \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} + 2\cos 80^\circ = 1 - \frac{\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}} + 2\sin 10^\circ = 1 - 2\sin 10^\circ + 2\sin 10^\circ = 1$

سوال ۸

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ ① $\quad \cot x = ?$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{طرفین}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x \cos x = 2 \Rightarrow \boxed{\sin x \cos x = \frac{1}{2}}$ ②

$\xRightarrow{①,②} \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \xRightarrow[\cos x = b]{\sin x = a} \begin{cases} a+b = \sqrt{2} \rightarrow a = \sqrt{2} - b \\ ab = \frac{1}{2} \rightarrow b(\sqrt{2}-b) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2}b - b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 - \sqrt{2}b + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \Delta = 2 - 4(1)(\frac{1}{2}) = 2-2 = 0 \rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

سوال ۹

$\underbrace{1 - \cot^4 x}_{} = \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}}$

$1 - \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^4 x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)\overbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}^{1}}{\sin^4 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$

Scanned with CamScanner

سئوال ۱۰)

$$(a-1)^3(a+1)^3\left(a^4+a^2+1\right)^3=\left((a-1)(a+1)\right)^3\left(a^4+a^2+1\right)=(a^2-1)^3\left(a^4+a^2+1\right)^3$$

$$=\left((a^2-1)\left(a^4+a^2+1\right)\right)^3=\left((a^2)^3-1^3\right)^3=(a^6-1)^3=a^{18}-3a^{12}+3a^6-1$$

سئوال ۱۱)

$$(x^2-x)^2-8x^2+8x+12=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$$

$$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

$$a^3-3a^2+1=a^3-a^2-a^2+1=a^2(a-1)-(a^2-1)=a^2(a-1)-(a-1)(a+1)$$

$$=(a-1)(a^2-a-1)$$

سئوال ۱۲)

$x=1-\sqrt{2}$ $\quad\left(x-x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$x=1-\sqrt{2}\xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{به توان ۲}}x^2=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

سئوال ۱۳)

الف) $(1+\sqrt{2})^{10}(3-\sqrt{8})^5=\left((1+\sqrt{2})^2\right)^5(3-2\sqrt{2})^5=(3+2\sqrt{2})^5(3-2\sqrt{2})^5$

$$=\left(3^2-(2\sqrt{2})^2\right)^5=(9-8)^5=1$$

ب) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{8}\right)^{\frac{1}{5}}+\sqrt[3]{\sqrt{8}}}{(\sqrt{2})^{\frac{1}{10}}}=\dfrac{\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{5}}+\sqrt[3]{8}}{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{10}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{10}}+2^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{20}}}=\dfrac{2^{\frac{2}{10}}}{2^{\frac{1}{20}}}=2^{\frac{2}{10}-\frac{1}{20}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

سئوال ۱۴)

$x^2+3x+1=0$ $\quad x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right)$

$x^2+3x+1=0\xrightarrow[x\neq 0]{\div x}x+3+\frac{1}{x}=0\Rightarrow x+\frac{1}{x}=-3\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=(-3)\left((-3)^2-3\right)$

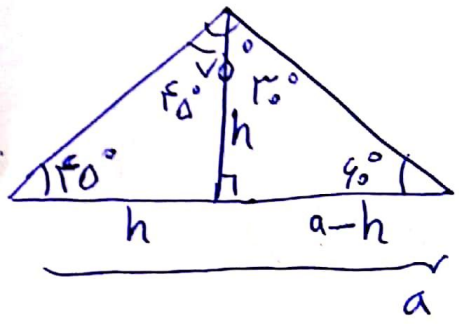
$$=-3(6)=-18$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} \times \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1} = \frac{(x^2-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x}+1)}{x-1} = (x+1)(\sqrt[3]{x}+1)$$

(10 مثال

(14 مثال

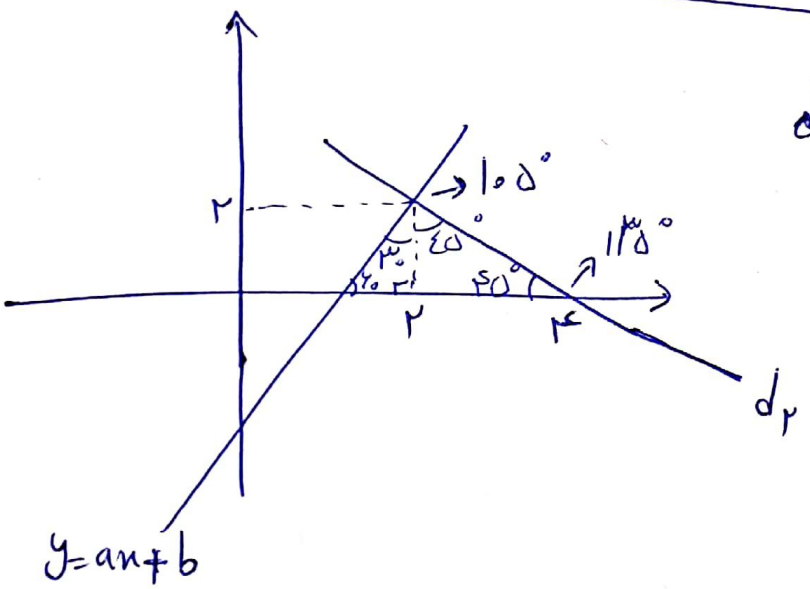


$$\tan 60^\circ = \frac{h}{a-h} = \sqrt{3} = \frac{h}{a-h} \Rightarrow a\sqrt{3} - h\sqrt{3} = h$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \rightarrow \text{ارتفاع}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{a \times h}{2} = \frac{a\left(\frac{a\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$$

(17 مثال



$$d_2 \begin{cases} A(2,2) \\ B(4,0) \rightarrow m_{AB} = \frac{0-2}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$d_2: y = -x+b \xrightarrow{B(4,0)}$$

$$0 = -4+b \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow d_2: y = -x+4$$

$$\Rightarrow m_{d_2} = \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = 135^\circ$$

$$\Rightarrow m_y = a = \tan\alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x + b$$

$$A(2,2) \Rightarrow \quad 2\sqrt{3} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 2\sqrt{3} = 2(1-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow a+b = 2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

Scanned with CamScanner