

جای مهر

«بسمه تعالی»

اداره آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران

دبیرستان نمونه دولتی ابوعلی سینا متوسطه دوم

نام و نام خانوادگی:



تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۳/۲۱

رشته: ریاضی/تجربی

پایه: دهم

امتحان: ریاضی

کلاس:

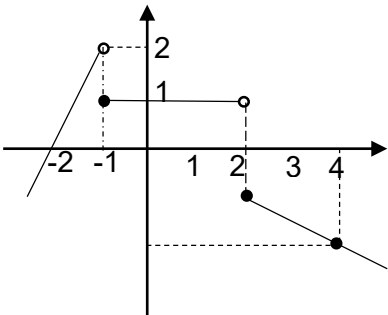
مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه

تعداد صفحات: ۴

نام دبیر: گروه ریاضی

شماره صندلی:

بارم	ردیف	سوال
۱	۱	فرزندان خوبم با یاد خدا و ذکر صلوات بر پیامبر مهربانی‌ها و خاندان مطهرش به سوالات زیر با دقت پاسخ دهید. اعداد $۱ - ۲x$ و $۲ - ۳x$ و $۳ + ۴x$ سه جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی صعودی هستند، جمله‌ی ۱۴۰۱ ام این دنباله چند است؟
۰/۵	۲	اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $(A \cup B') \cap B$
۱ ۰/۵	۳	الف) اگر $\tan x = -2$ باشد حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید: $\frac{2 \sin x - 3 \cos x}{\cos x + 4 \sin x} =$ ب) در متوازی‌الاضلاع با اضلاع ۵ و ۸ و یک زاویه ۴۵ درجه، مساحت آن چقدر است؟
۰/۵	۴	اگر $x^2 + 4y^2 = 14$ و $xy = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $x + 2y$ چقدر است؟
۰/۷۵ ۰/۷۵	۵	الف) مخرج کسر را گویا کنید: $\frac{23}{2^3\sqrt{3}-1} =$ ب) حاصل را به صورت ساده شده بدست آورید. $\sqrt[4]{4 + 2\sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{3} - 1}$

۱/۲۵	<p>نامعادله زیر را حل کنید و جواب آن را بصورت بازه بنویسید.</p> $\frac{2x^2 + 5x}{x^2 - 4} \leq 1$	۶
۰/۷۵	<p>اگر بیشترین مقدار سهمی به معادله $y = \frac{a}{4}x^2 + 3x + a - 1$ برابر ۷ باشد، مقدار a را بدست آورید.</p>	۷
۱/۵	<p>نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x \geq 1 \\ -x + 3 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بدست آورید.</p>	۸
۱	<p>نمودار مقابل مربوط به تابع f است:</p>  <p>الف) حاصل $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ چقدر است؟ ب) تابع f در چه بازه‌ای ثابت است؟ مقدار آن چقدر است؟</p>	۹

۱	<p>الف) تابع $f(x) = - x - 2 + 3$ را به روش انتقال رسم کنید و برد آن را نیز بنویسید.</p> <p>ب) اگر $f(x) = (a - 2)x^2 + bx + 4$ یک تابع ثابت باشد مقادیر a و b را بدست آورید.</p>	۱۰
۱/۲۵	<p>می‌خواهیم ۴ دبیر ادبیات و ۳ دبیر تاریخ را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم به طوریکه هیچ دبیر تاریخی کنار هم نباشد، به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟</p>	۱۱
۰/۷۵	<p>الف) مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟</p> <p>ب) در چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی عدد ۵ وجود دارد و اعداد ۶ و ۷ وجود ندارد؟</p>	۱۲
۱/۲۵	<p>تعداد جایگشت‌های حروف کلمه <i>SYSTEM</i> به طوری که S ها کنار هم نباشند؟</p>	۱۳
۰/۷۵	<p>در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم:</p> <p>الف) با چه احتمالی مهره‌های خارج شده هم‌رنگ هستند؟</p> <p>ب) با چه احتمالی حداقل یکی از مهره‌های خارج شده سفید است؟</p>	۱۴

۱	<p>اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = 0/6$ و $P(B) = 0/7$ و $P(A \cap B) = 0/2$ آنگاه $P(\bar{A} \cap B)$ چقدر است؟</p>	۱۵
۱	<p>اگر هفت نفر که دو نفر آن‌ها با هم برادرنند به تصادف در یک ردیف باشند، چقدر احتمال دارد که دو برابر کنار یکدیگر باشند.</p>	۱۶
۱/۵	<p>نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) گروه خونی افراد ← و</p> <p>ب) میزان آلاینده‌گی هوا ← و</p> <p>ج) مراحل تحصیلی ← و</p>	۱۷
۲۰	<p>نمره با عدد با حروف امضا و تاریخ</p>	



فرزندان خوبیم با یاد خدا و ذکر صلوات بر پیامبر مهربانی‌ها و خاندان مطهرش به سوالات زیر با دقت پاسخ دهید.

۱ اعداد $2x-1$ و $2x-2$ و $2x+4$ سه جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی هستند، جمله‌ی 1401 ام این دنباله چند است؟

۱ (صورت) $d=4$ $\rightarrow 13, 19, 25 \Rightarrow \lambda=5$

$4x-4 = 2x-1 + 3x+4 \Rightarrow x=5$

$a_{1401} = a_1 + 1400 \cdot d = 13 + 1400 \cdot 4 = 13 + 5600 = 5613$

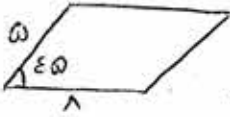
۲ اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

۱۵ $(A \cup B') \cap B = (A \cap B) \cup (B' \cap B) = A \cap B = \emptyset$

۳ الف) اگر $\tan x = -2$ باشد حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید:

۱ $\frac{2 \sin x - 2 \cos x}{\cos x + 4 \sin x} = \frac{2 \tan x - 2}{1 + 4 \tan x} = \frac{-4 - 2}{1 - 8} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

ب) در متوازی‌الاضلاعی با اضلاع ۵ و ۸ و یک زاویه 45° درجه، مساحت آن چقدر است؟

۱۵  $S = 5 \times 8 \times \sin 45^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$

۴ اگر $x^2 + 4y^2 = 14$ و $xy = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $x + 2y$ چقدر است؟

۱۵ $x^2 + 4y^2 = 14 \rightarrow (x+2y)^2 - 4xy = 14 \rightarrow (x+2y)^2 - 4(\frac{1}{2}) = 14 \Rightarrow (x+2y)^2 = 15 \Rightarrow x+2y = \pm \sqrt{15}$

۵ الف) مخرج کسر را گویا کنید:

۱۷۵ $\frac{22}{2\sqrt{3}-1} = \frac{22}{2\sqrt{3}-1} \times \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}+1} = \frac{22(2\sqrt{3}+1)}{4 \cdot 3 - 1} = \frac{22(2\sqrt{3}+1)}{11} = 2(2\sqrt{3}+1) = 4\sqrt{3}+2$

ب) حاصل را به صورت ساده شده بدست آورید.

۱۷۵ $\sqrt{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{3}-1} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{(4+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}+1)} = \sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$

نامعادله زیر را حل کنید و جواب آن را بصورت بازه بنویسید.

۶

$$\frac{2x^2 + 5x}{x^2 - 4} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + 5x}{x^2 - 4} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 5x - x^2 + 4}{x^2 - 4} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{(-)}{(x+1)} \overset{(-)}{(x+4)}}{\underset{(-)}{(x+2)} \underset{(+)}{(x-2)}} \leq 0$$

x	-4	-2	-1	2
$x^2 + 5x + 4$	+	-	-	+
$x^2 - 4$	+	+	-	+
P	+	-	+	-

۱/۲۵

$$\rightarrow x \in [-4, -2) \cup (-1, 2)$$

اگر بیشترین مقدار سهمی به معادله $y = \frac{a}{x}x^2 + 2x + a - 1$ برابر ۷ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۷

$$\frac{-\Delta}{2a} = 7 \Rightarrow \frac{-(4 - a(a-1))}{2a} = 7 \Rightarrow \frac{a^2 - a - 4}{a} = 7 \Rightarrow a^2 - a - 4 = 7a$$

۰/۲۵

$$a^2 - a - 4 = 7a \rightarrow a^2 - 8a - 4 = 0 \rightarrow (a-9)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=9 & \text{قبول} \\ a=-1 & \text{قبول} \end{cases}$$

(چون سهمی داریم در پس a باید منفی باشد.)

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x \geq 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بدست آورید.

۸

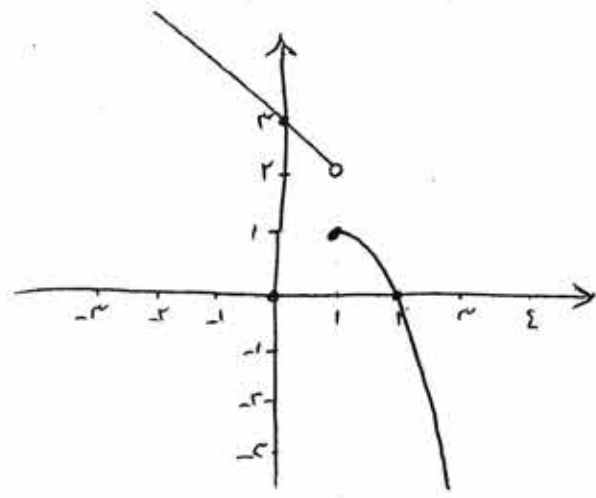
$$y = -x^2 + 2x : x \geq 1$$

x	۱	۲
y	۱	۰

$$y = -x + 2 : x < 1$$

x	۱	۲
y	۱	۰

۱/۵

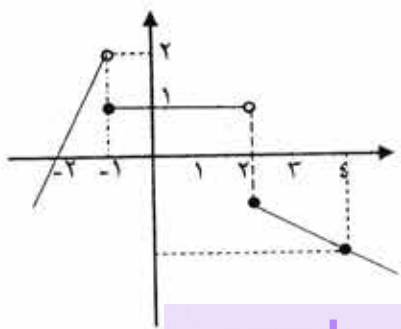


نمودار مقابل مربوط به تابع f است:

۹

الف) حاصل $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ چقدر است؟

ب) تابع f در چه بازه‌ای ثابت است؟ مقدار آن چقدر است؟



۱

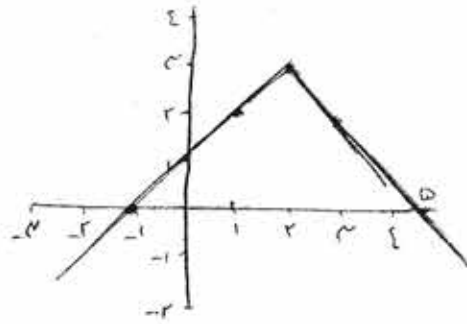
الف) $f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 1$

ب) $-1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$

الف) تابع $f(x) = -|x-2| + 2$ را به روش انتقال رسم کنید و برد آن را نیز بنویسید.

انتقال \Rightarrow

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 3 & 3 & \end{array}$$



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = (-\infty, 2]$$

۱۰

ب) اگر $f(x) = (a-2)x^2 + bx + 4$ یک تابع ثابت باشد مقادیر a و b را بدست آورید.

$$a-2=0 \Rightarrow a=2$$

$$b=0 \Rightarrow b=0$$

۰.۱۵

۱۱) می‌خواهیم ۴ دبیر ادبیات و ۳ دبیر تاریخ را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم به طوریکه هیچ دبیر تاریخی کنار هم نباشد. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

$\square \circ \square \circ \square \circ \square \circ \square \Rightarrow$
 $\underbrace{5 \times 4 \times 3}_{\text{تاریخ‌ها کنار هم}}$
 \times
 $\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{ادبیات}}$

$= 40 \times 24 = 960$

۱۱۲۵

۱۲) الف) مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

۰.۱۷۵

ب) در چند زیر مجموعه ۳ عضوی عدد ۵ وجود دارد و اعداد ۶ و ۷ وجود ندارد؟

$$\{3, 0, 0\} \Rightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

۰.۱۷۵

۱۳) تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند؟

$5! = 120 \rightarrow$ هر دو S کنار هم هستند }
 \Rightarrow کل جایگشت‌ها: $360 - 120 = 240$

$\frac{6!}{2!} = 360 \rightarrow$ کل جایگشت‌ها

۱۱۲۵

۱۴) در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم:

الف) با چه احتمالی مهره‌های خارج شده هم‌رنگ هستند؟

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$$

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

$$\Rightarrow P(A) = P(\text{هم‌رنگ}) = \frac{14}{84}$$

۰.۱۷۵

ب) با چه احتمالی حداقل یکی از مهره‌های خارج شده سفید است؟

$$n(B) = n(\text{همه سیاه}) = \binom{5}{3} = 10 \Rightarrow n(\text{حداقل یکی سفید}) = 84 - 10 = 74$$

۰.۱۷۵

<p>۱۵</p>	<p>اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A \cap B)$ آن‌گاه $P(A \cap B)$ چقدر است؟</p> <p>$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.12 = 0.4 - P(A \cap B)$</p> <p>$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.28$</p> <p>$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.28 = 0.42$</p>	<p>۱۵</p>
<p>۱۶</p>	<p>اگر هفت نفر که دو نفر آن‌ها با هم برادرند به تصادف در یک ردیف باشند، چقدر احتمال دارد که دو برابر کنار یکدیگر باشند.</p> <p>$n(S) = 7!$</p> <p>$n(A) = n(\text{دو برادر کنار هم}) = 4! \times 2!$</p> <p>$\Rightarrow P(A) = \frac{4! \times 2!}{7!} = \frac{2}{7}$</p>	<p>۱۶</p>
<p>۱۷</p>	<p>نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) گروه خونی افراد ← کیفی و اسمی</p> <p>ب) میزان آلاینده‌ی هوا ← کمی و موقوت</p> <p>ج) مراحل تحصیلی ← کیفی و ترتیبی</p>	<p>۱۷</p>