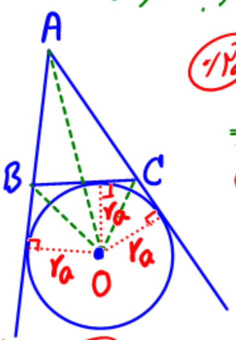
تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۳/۲۱		« بسمه تعالی »	سوالات درس :هندسه ۲
زمان امتحان: ۱۲۰ دقیقه		اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران	پایه: یازدهم ریاضی
تعداد صفحه: ۵ تعداد سوال: ۱۳		اداره آموزش و پرورش منطقه ۶	شماره صندلی:
نمره به عدد:		دبیرستان ماندگار البرز	کلاس :
		دپارتمان هندسه وگسسته	نام و نام خانوادگی : راهنمای تصحیح
نمره به حروف: امضاء دبیر:		یازدهم ریاضی – خردادماه ۱۴۰۱	

(توجه : پاسخ سئوالات در همین برگه‌ها نوشته شود.)

ردیف	سئوال	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) دو دایرهٔ $C(O,R),\ C'(O',R')$ با فرض $d=OO'$ متداخلند هرگاه $\lvert R-R'\rvert=d$ نادرست ۰/۲۵ ب) در دو دایرهٔ $C(O,R),\ C'(O',R')$ که مماس خارج هستند، طول مماس مشترک خارجی از رابطهٔ $\sqrt{2RR'}$ محاسبه می‌شود. درست ۰/۲۵ پ) بازتاب، تبدیل همانی است. نادرست ۰/۲۵ ت) در هر مثلث بین اضلاع و زاویه ها و شعاع دایره محیطی $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{2R}$ برقرار است. نادرست ۰/۲۵	۱
۲	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف) اگرزاویهٔ مرکزی قطاعی ازدایرهٔ $C(O,R)$ برحسب درجه α باشد،مساحت قطاع برابر $\frac{\pi R^2\alpha}{360}$ است . ۰/۲۵ ب) مرکز دایرهٔ محاطی یک چندضلعی محیطی نقطهٔ همرسی .. نیمسازهای داخلی .. است ۰/۲۵ پ) ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای متقاطع یک ... دوران ..... است. ۰/۲۵ ت) اگر .. $\lvert k\rvert>1$ .. باشد تجانس را انبساط می‌نامیم. ۰/۲۵	۱
۳	در مثلث دلخواه ABC به مساحت S ومحیط $2p$،ثابت کنیدشعاع دایرهٔ محاطی خارجی ازرابطهٔ $r_a=\frac{S}{P-a}$ محاسبه می‌شود. مثلث ABC و دایره محاطی خارجی آن به مرکز O و شعاع r_a را در نظر می‌گیریم و O را به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم: ۰/۲۵ $S(\overset{\triangle}{ABC})=S(\overset{\triangle}{OAB})+S(\overset{\triangle}{OAC})-S(\overset{\triangle}{BOC})$ ۰/۲۵ $\Rightarrow S=(\frac{1}{2}AB\times r_a)+(\frac{1}{2}AC\times r_a)-(\frac{1}{2}BC\times r_a)=\frac{1}{2}r_a(AB+AC-BC)$ ۰/۵ ۰/۲۵ $\Rightarrow S=\frac{1}{2}r_a(\underbrace{AB+AC+BC}_{2P}\underbrace{-BC-BC}_{-2a})\Rightarrow S=r_a(P-a)$ ۰/۲۵ $\Rightarrow r_a=\frac{S}{P-a}$. ۰/۲۵  رسم شکل ۰/۲۵	۲

ادامه سوالات در صفحه دوم »

نام و نام خانوادگی :　　　　　　　　کلاس :

۴ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{۷}$ و خط‌المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است. ۲

۰/۲۵ مماس مشترک خارجی $=\sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow ۳\sqrt{۷}=\sqrt{۶۴-(R-R')^2} \xrightarrow{\text{توان دو}} ۶۳=۶۴-(R-R')^2$ ۰/۲۵

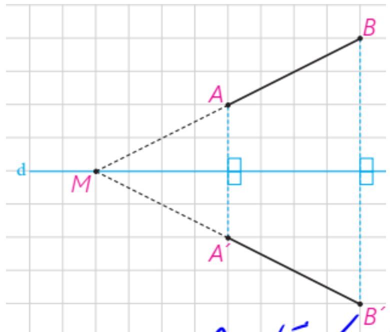
۰/۲۵ مماس مشترک داخلی $=\sqrt{d^2-(R+R')^2} \Rightarrow \sqrt{۷}=\sqrt{۶۴-(R+R')^2} \xrightarrow{\text{توان دو}} ۷=۶۴-(R+R')^2$ ۰/۲۵

$$\Rightarrow \begin{cases}(R-R')^2=1 \\ (R+R')^2=57\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R-R'=1 \\ R+R'=\sqrt{57}\end{cases} \xrightarrow{(+)} 2R=1+\sqrt{57} \Rightarrow R=\frac{1+\sqrt{57}}{2} \longrightarrow R'=\frac{\sqrt{57}-1}{2}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۵ درحالتی که پاره خط AB با خط بازتاب d نه موازی و نه متقاطع می باشد. ۱/۵

ثابت کنید بازتاب اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

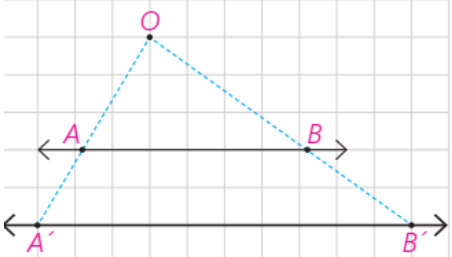


حکم: $AB=A'B'$

پاره خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در M قطع کند، نقطهٔ B' بازتاب B را نسبت به خط d پیدا کرده و آن را به M وصل می‌کنیم، از آنجایی که نقطهٔ A روی MB قرار دارد ۰/۲۵ ۰/۲۵
تصویر آن یعنی A' روی MB' قرار می‌گیرد، پس

۰/۲۵ $\begin{cases}AB=MB-MA \\ A'B'=MB'-MA'\end{cases} \xrightarrow{\text{می‌دانیم: } MA=MA' \text{ و } MB=MB'} AB=A'B'.$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۶ در تجانس در حالتی که مرکز تجانس(نقطه O) غیر واقع بر خط AB باشد. ثابت کنید تجانس شیب را حفظ می کند. ۲



فرض کنیم A' و B' تجانس‌های نقطه‌های A و B در تجانس به مرکز O و نسبت $k>0$ باشند در این صورت ۰/۲۵

۰/۲۵ A' تجانس A است $\Rightarrow OA'=k\times OA \Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{1}{k}$ ۰/۲۵

۰/۲۵ B' تجانس B است $\Rightarrow OB'=k\times OB \Rightarrow \frac{OB}{OB'}=\frac{1}{k}$ ۰/۲۵

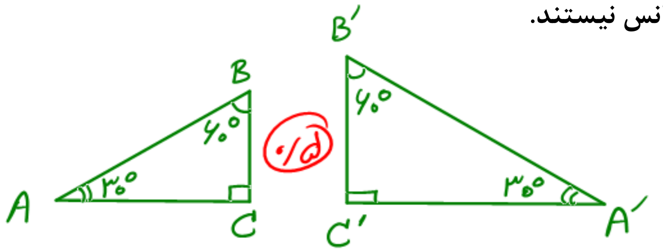
$$\Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{1}{k}$$ ۰/۲۵

پس بنابر عکس قضیه تالس می‌توان نتیجه گرفت که: $AB \parallel A'B'$. ۰/۲۵ ۰/۲۵

ادامه سوالات در صفحه سوم »

نام و نام خانوادگی :　　　　　　　　　　　　کلاس :

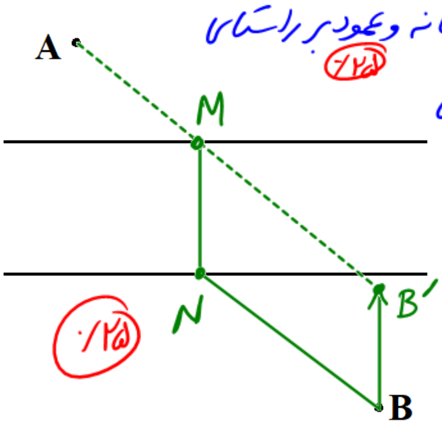
ردیف	سؤال	بارم
۷	**با رسم شکل نشان دهید دو شکل متشابه الزاماً متجانس نیستند.**	۱



۰/۲۵

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند ولی متجانس هم نیستند زیرا جهت یکی ساعتگرد و دیگری پادساعتگرد است و می‌دانیم در تجانس جهت شکل حفظ می‌شود ۰/۲۵

ردیف	سؤال	بارم
۸	**اگر دو شهر A, B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم بطوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاهترین مسیر ممکن باشد؟**	۱/۵



مطابق شکل ابتدا نقطهٔ B را با برداری هم‌اندازه‌ی عرض رودخانه و عمود بر راستای ۰/۲۵ رودخانه در جهت نزدیک شدن به نقطهٔ A به نقطهٔ B' انتقال می‌دهیم ۰/۲۵ سپس B' را به A وصل می‌کنیم تا ساحل بالایی را ۰/۲۵ در نقطهٔ M قطع کند، از M عمودی به ساحل پایینی رودخانه رسم می‌کنیم تا آن را در N قطع کند، ۰/۲۵ مسیر $AMNB$ جواب مسئله است ۰/۲۵

ردیف	سؤال	بارم
۹	**در مثلث ABC , $BC=۱۰$, $\hat{A}=۱۲۰^\circ$, $AC=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ ، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازهٔ زوایای B و C را به‌دست آورید.**	۱/۵

بنابر قضیهٔ سینوس‌ها: ۰/۲۵ $\frac{a}{\sin\hat{A}}=2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ}=2R \Rightarrow$ ۰/۲۵ $\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$\Rightarrow R=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ۰/۲۵

$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R \Rightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin\hat{B}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۰/۲۵ $\Rightarrow \begin{cases}\hat{B}=45^\circ \\ \hat{B}=135^\circ\end{cases} \xrightarrow{\hat{A}=120^\circ} \hat{B}=45^\circ$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \hat{C}=15^\circ$

ادامه سوالات در صفحه چهارم »

نام و نام خانوادگی :　　　　　　　　　　کلاس :

۱۰ در مثلث ABC , $\hat{A}=۶۰^\circ$, $AB=۲\sqrt{۲}^\circ$, $AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ در این صورت با استفاده از قضیه کسینوس‌ها طول ضلع **BC** را به دست آورید. ۱/۵

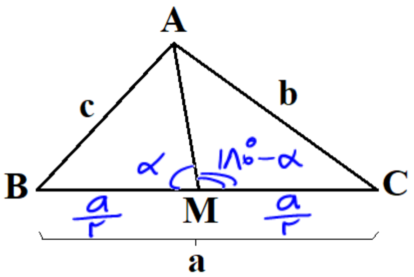
۰/۵ $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\hat{A}$

$= (2\sqrt2)^2+(\sqrt6+\sqrt2)^2-\cancel{2}(2\sqrt2)(\sqrt6+\sqrt2)\overbrace{\cos 60^\circ}^{\frac12}$ ۰/۲۵

$= 8+8+\cancel{2\sqrt{12}}-\cancel{2\sqrt{12}}-4=12 \Rightarrow BC=\sqrt{12}=2\sqrt3$

۰/۲۵　۰/۲۵　۰/۲۵

۱۱ در مثلث ABC ، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم، ثابت کنید: $b^۲+c^۲=۲AM^۲+\frac{a^۲}{۲}$ ۱/۵



$\overset{\triangle}{MAB}: AB^2=AM^2+MB^2-2AM\cdot MB\cdot\cos\alpha$ ۰/۲۵

$\Rightarrow c^2=AM^2+\frac{a^2}{4}-2(AM)(\frac{a}{2})\cos\alpha$ (1) ۰/۲۵

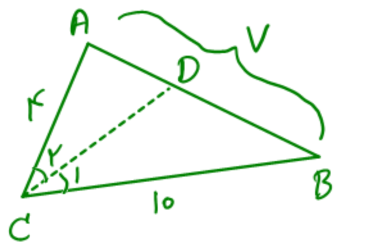
۰/۲۵

$\overset{\triangle}{MAC}: AC^2=AM^2+MC^2-2AM\cdot MC\cdot\overbrace{\cos(180^\circ-\alpha)}^{-\cos\alpha}$ ۰/۲۵

$\Rightarrow b^2=AM^2+\frac{a^2}{4}+2(AM)(\frac{a}{2})\cos\alpha$ (2) ۰/۲۵

$(1)+(2)\Rightarrow b^2+c^2=2AM^2+\frac{a^2}{2}$. ۰/۲۵

۱۲ در مثلث ABC ، $AB=۷$, $AC=۴$, $BC=۱۰$ است. طول نیم‌ساز زاویهٔ داخلی C را به‌دست آورید. ۱/۵



۰/۲۵

$\hat{C}_1=\hat{C}_2 \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

۰/۲۵　۰/۲۵

$\Rightarrow \frac{AD}{AD+DB}=\frac{2}{2+5}\Rightarrow\frac{AD}{\underset{7}{AB}}=\frac{2}{7}\Rightarrow\boxed{AD=2}$

$DB=7-2=5 \Rightarrow \boxed{DB=5}$ ۰/۲۵

می‌دانیم: $CD^2=AC\times BC-AD\times DB=(4\times10)-(2\times5)=40-10=30$

۰/۲۵

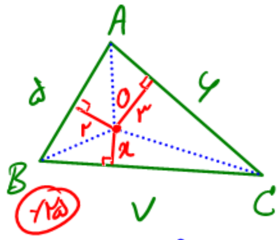
$\Rightarrow CD=\sqrt{30}$.

۰/۲۵

ادامه سوالات در صفحه پنجم »

نام و نام خانوادگی :	کلاس :	

ردیف	سؤال	بارم
۱۳	در مثلث **ABC** به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶ به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است، از ضلع بزرگتر چه فاصله‌ای دارد؟	۲



$P = \frac{1}{2}(5+6+7) = 9$ ۰/۲۵

$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

O را به رئوس مثلث وصل می‌کنیم :

$S(\overset{\triangle}{ABC}) = S(\overset{\triangle}{ABO}) + S(\overset{\triangle}{BCO}) + S(\overset{\triangle}{CAO})$ ۰/۲۵

$\Rightarrow 6\sqrt{6} = \frac{1}{2}(5 \times 2) + \frac{1}{2}(7x) + \frac{1}{2}(6 \times 3) \Rightarrow 6\sqrt{6} = 5 + \frac{7x}{2} + 9$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$\Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \simeq 0/2$ ۰/۲۵