

شماره:	نام درس: حسابان ۱	 بسمه تعالی اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران اداره آموزش و پرورش منطقه ۶ دبیرستان ماندگار البرز یازدهم ریاضی
نام و نام خانوادگی:	زمان امتحان: ۱۲۰	
کلاس:	نام دبیر:	
	رتبه: ریاضی	
	تعداد صفحه: ۵	سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۱	<p>(۱) حاصل عبارت $\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\dots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$ به ازای $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ را بیابید.</p> $\frac{1(1-t^{12})}{1-t} = \frac{1-t^3}{1-t} \rightarrow f(t) = 1+t+t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ $\frac{1(1-t^{12})}{1-t^3} = \frac{1-t^3}{1-t^3} \rightarrow f(t) = 1+t+t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$
۱	<p>(۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن برابر $\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right\}$ باشند.</p> $S_1 = x' + x'' = \frac{5}{3} \quad \text{و} \quad P_1 = x'x'' = \frac{1}{3}$ $S = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S_1^2 - 2P_1}{P_1} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{19}{3} \rightarrow x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0$ $P = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1$
۱	<p>(۳) معادله $2x - 1 - x = 7$ را حل کنید</p> $\begin{cases} x \leq 0 \rightarrow -(2x - 1) - (-x) = 7 \rightarrow -x = 6 \rightarrow x = -6 \quad \text{ق. ق.} \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \rightarrow -(2x - 1) - (x) = 7 \rightarrow -3x = 6 \rightarrow x = -2 \quad \text{غ. ق. ق.} \\ x \geq \frac{1}{2} \rightarrow (2x - 1) - (x) = 7 \rightarrow x = 8 \quad \text{ق. ق.} \end{cases}$
۱	<p>(۴) اگر دو ضلع مربعی منطبق بر دو خط $D: y = \frac{3}{4}x + 1$ و $D': 6x - 7 = 8y$ باشند، اندازه قطر مربع را بیابید.</p> $y = \frac{3}{4}x + 1 \xrightarrow{\times 4} 4y = 3x + 4 \rightarrow D: 3x - 4y + 4 = 0 \quad c=4, c'=\frac{-7}{2} \rightarrow \frac{\left 4 - \left(\frac{-7}{2}\right)\right }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{2} \rightarrow \text{قطر} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ $6x - 7 = 8y \rightarrow 6x - 8y - 7 = 0 \xrightarrow{\div 2} D': 3x - 4y - \frac{7}{2} = 0$

۵) اگر نمودار تابع وارون $f(x) = \frac{ax+5}{\sqrt{x^3+1}}$ خط $y = 2x + 4$ را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند، مقدار a را بیابید.

$$y=2 \rightarrow 2 = 2x + 4 \Rightarrow x = -1 \rightarrow A(-1, 2)$$

$$A(-1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow A'(2, -1) \in f$$

$$-1 = \frac{2a+5}{\sqrt{2^3+1}} \Rightarrow a = -4$$

۶) اگر $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$ باشد دامنه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \neq 1 \mid \frac{x-3}{x-1} \geq 4 \right\} = \left[\frac{1}{3}, 1 \right)$$

$$\frac{-3x+1}{x-1} \geq 0$$

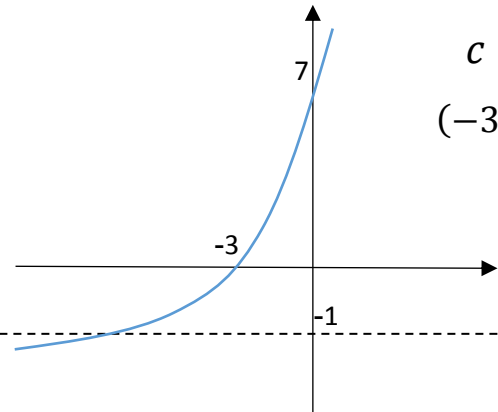
$$\frac{1}{3} < x < 1$$

$$-\frac{1}{3} < x < 1$$

۷) معادله $\left[2x^2 - \frac{1}{2}\right] = x$ چند جواب دارد.

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow 2x^2 \in \mathbb{Z} \rightarrow 2x^2 + \left[-\frac{1}{2}\right] = x \rightarrow 2x^2 - 1 = x \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 1 \\ \text{غ ق } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

۸) اگر نمودار تابع $f(x) = a^{x+b} + c$ به صورت مقابل باشد. $f^{-1}(2)$ را بیابید.



$$c = -1 \rightarrow f(x) = a^{x+b} - 1$$

$$(-3, 0) \rightarrow 0 = a^{-3+b} - 1 \rightarrow a^{-3+b} = 1 \rightarrow -3 + b = 0 \rightarrow b = 3$$

$$(0, 7) \rightarrow 7 = a^{0+3} - 1 \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2^{x+3} - 1$$

$$f^{-1}(2) = k \rightarrow f(k) = 2 \rightarrow 2^{k+3} - 1 = 2$$

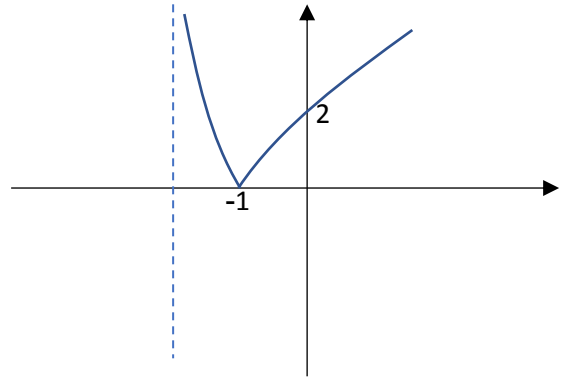
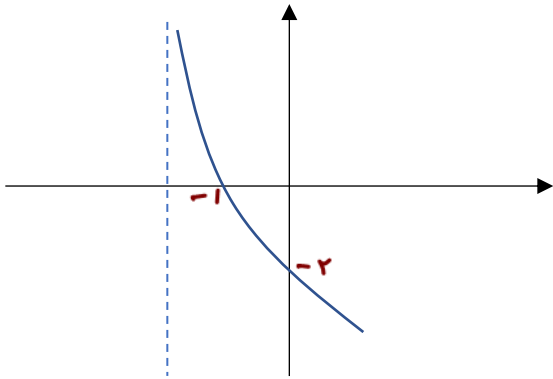
$$\rightarrow 2^{k+3} = 3 \rightarrow k + 3 = \log_2 3 \rightarrow k = \log_2 3 - 3$$

۹) اگر $\log_4(2x - 1) + \log_4(3x - 4) = 1$ باشد مقدار $\log_4(6x + 5)$ را به دست آورید.

$$\log_4(2x - 1)(3x - 4) = 1 \rightarrow (2x - 1)(3x - 4) = 4 \rightarrow 6x^2 - 11x + 4 = 4$$

$$6x^2 - 11x = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{ق ق غ} \\ x = \frac{11}{6} & \text{ق ق} \end{cases} \rightarrow \log_4\left(6\left(\frac{11}{6}\right) + 5\right) = \log_2 16 = 4$$

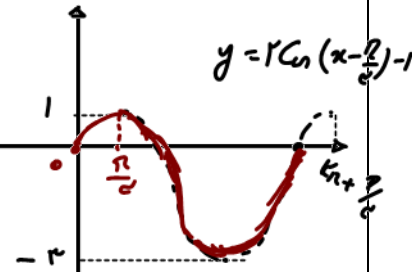
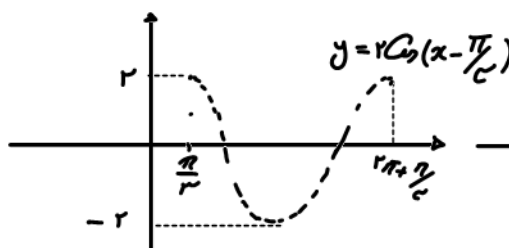
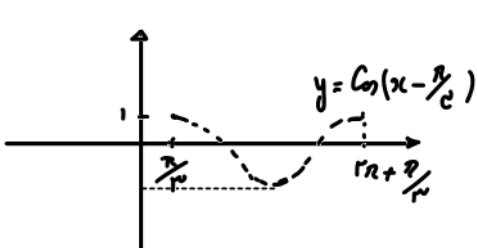
۱۰) نمودار $y = \left| \log_{\frac{1}{2}}(x + 4) \right|$ را رسم کنید. (محل برخورد با محورهای مختصات مشخص شود)



۱۱) حاصل عبارت $A = \frac{\sin 22^\circ - \sqrt{3} \cos 22^\circ}{\sin 78^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ \cos 78^\circ}$ را بیابید.

$$\frac{2\left(\frac{1}{2} \sin 22^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 22^\circ\right)}{\cos 12^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ \sin 12^\circ} = \frac{2 \sin(22^\circ - 60^\circ)}{\cos(12^\circ + 40^\circ)} = \frac{2 \sin(-38^\circ)}{\cos(52^\circ)} = \frac{-2 \sin(38^\circ)}{\cos(52^\circ)} = \frac{-2 \cos(52^\circ)}{\cos(52^\circ)} = -2$$

۱۲) نمودار تابع $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید



۱ (۱۳) اگر $\tan \alpha = 2$ ، مقدار عبارت $A = \frac{2 \cos(15\pi - \alpha) - 3 \sin(\alpha - 18\pi)}{3 \sin(\frac{17\pi}{2} - \alpha) + 2 \cos(\alpha - \frac{7\pi}{2})}$ را بیابید.

$$A = \frac{-2 \cos(\alpha) - 3 \sin(\alpha)}{3 \cos(\alpha) - 2 \sin(\alpha)} = \frac{-2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}{3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} = \frac{-1 \cos \alpha}{-\cos \alpha} = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$$

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha$$

۱ (۱۴) به ازای چه مقادیر از m مجموعه $(m + 5, 4) \cup (2, m^2 - 1)$ یک همسایگی محذوف است.

$$m^2 - 1 = m + 5 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$$

۱ (۱۵) اگر حاصل حد زیر برابر $\frac{1}{2}$ باشد. مقادیر n, m را بیابید.

$$m(1) + n = 0 \rightarrow -m = n$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{3x^2 - 2}}{mx + n} \times \frac{x^2 + \sqrt{3x^2 - 2}}{x^2 + \sqrt{3x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{mx - m} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2)(x^2 - 1)}{mx - m} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2)(x - 1)(x + 1)}{m(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2)(x + 1)}{m} = \frac{-2}{m} = \frac{1}{2} \rightarrow m = -4, n = 4$$

۱ (۱۶) حد زیر را در صورت وجود بیابید

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۷) مقادیر b, a را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

۱/۵

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} & , x < 1 \\ b & , x = 1 \\ a + [-2x] & , x > 1 \end{cases}$$

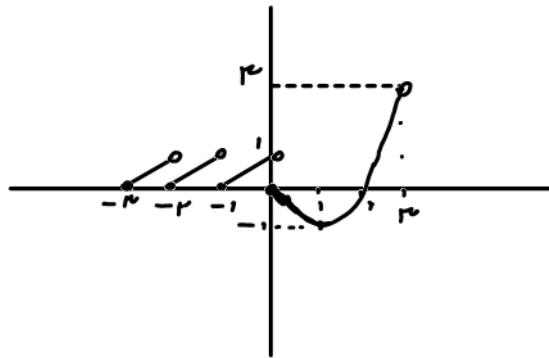
$$\begin{aligned} f(1) &= b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} a + [-2x] &= a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b &= a - 2 = -2 \\ b &= -2, a = 1 \end{aligned}$$

۱۸) تابع $f(x) = (x^2 - 4)[x]$ در کدام نقاط صحیح پیوسته است. ۲، -۲

۰.۵

۱۹) با رسم نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - [x] & , -3 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x & , 0 \leq x < 3 \end{cases}$ به حد های زیر پاسخ دهید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{f(x)} \right] = -\infty$$



۱/۵

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = 1$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x^2 - 2) \right] = 1$$