

۱۵ سوال

حسابان

۲۵ دقیقه

۱- در یک دنباله حسابی جمله سوم نصف جمله هفتم است. مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر مجموع ۵ جمله اول است؟

$\frac{13}{4}$ (۱) $\frac{13}{8}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{15}{8}$ (۴)

۲- در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف زوج ۳ برابر مجموع جملات ردیف فرد است. اگر جمله اول برابر ۱۷ باشد، جمله نهم کدام است؟

1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

۳- در یک دنباله هندسی مجموع ۸ جمله اول، ۱۷ برابر مجموع ۴ جمله اول است. مجموع قدرنسبت‌های به دست آمده کدام است؟

-1 (۱) 2 (۲) 4 (۳) 2 (۴)

۴- در هر دنباله حسابی حاصل $S_{2n} - S_n$ کدام است؟

S_n (۱) $\frac{1}{3}S_{3n}$ (۲) $\frac{1}{2}S_{2n}$ (۳) $\frac{2}{3}S_{2n}$ (۴)

۵- در یک دنباله هندسی جمله دوم و هفتم به ترتیب ۴ و ۱۲۸ است. مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

2046 (۱) 1023 (۲) 2048 (۳) 1024 (۴)

۶- در یک دنباله هندسی ۱۰۰ جمله‌ای با قدرنسبت ۲، مجموع جملات ردیف زوج ۵۰۰ است. مجموع همگی جملات این دنباله کدام است؟

1000 (۱) 750 (۲) 1250 (۳) 1500 (۴)

۷- خط $2x + 1 = 0$ محور تقارن سهمی f و f در کمترین مقدار f است. اگر $f(\frac{3}{4}) = 6$ باشد، مقدار $f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

3 (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) 2 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

۸- بین ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + m = 0$ رابطه‌ی $\frac{\alpha}{1-2\beta} = 8$ برقرار است. m کدام است؟

$\frac{8}{9}$ (۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{4}{27}$ (۴)

۹- در کدام معادله زیر یکی از ریشه‌ها، ۲ برابر ریشه دیگر است؟

$x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$ (۱) $x^2 + x + \frac{2}{15} = 0$ (۲) $x^2 + x + \frac{2}{9} = 0$ (۳) $x^2 + x + \frac{1}{7} = 0$ (۴)

۱۰- اگر $x = \sqrt{5} - 2$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

4 (۱) 5 (۲) 3 (۳) 1 (۴)

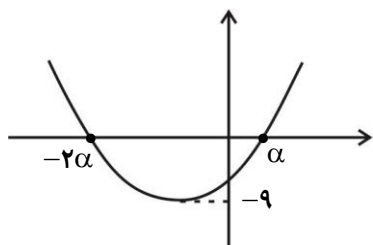
۱۱- ریشه‌های کدام معادله از قرینه نصف ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر هستند؟

$4x^2 + 4x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 4x - 1 = 0$ (۱)

۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

$10\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۱)

۱۳- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. مقدار c کدام است؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

۱۴- نمودار سهمی $y = (a-3)x^2 + ax - 1$ فقط از ناحیه اول عبور نمی‌کند. a کدام است؟

$a > -6$ (۴) $a < -6$ (۳) $-6 < a < 2$ (۲) $a < 2$ (۱)

۱۵- در معادله $3x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها کدام است؟

$\frac{8}{3}$ (۴) ۲۲ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$ (۱)

پاسخ‌نامه‌ی حسابان

۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

$a_7 = 2a_3 \rightarrow a_1 + 6d = 2(a_1 + 2d) \rightarrow a_1 = 2d$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{5(2a_1 + 9d)}{5(2a_1 + 4d)} = \frac{2(4d + 9d)}{4d + 4d} = \frac{13}{4}$$

۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

$a_2 + a_4 + \dots + a_{18} = 3(a_1 + a_3 + \dots + a_{17}) \Rightarrow \frac{10}{2}(2a_2 + 9 \times 2d) = 3 \times \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d)$

$\Rightarrow 2a_2 + 20d = 3(2a_1 + 18d) \Rightarrow 2a_2 + 17d = 0 \xrightarrow{a_2=17} d = -2$

$a_9 = a_1 + 8d = 17 - 16 = 1$

۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

$S_8 = 17S_4 \rightarrow \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 17 \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} \rightarrow q^4 + 1 = 17 \rightarrow q = \pm 2$ $q = -1$

مجموع قدرنسبت‌های به دست آمده برابر ۱- است.

۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ است.

$$S_{2n} - S_n = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d) - \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{n}{2}(4a_1 + 4nd - 2d - 2a_1 - nd + d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d) = \frac{1}{3}S_{3n}$$

۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

$$a_1 q = 4 \quad a_1 q^6 = 128 \rightarrow q^5 = 32 \rightarrow q = 2, a_1 = 2$$

$$S_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046$$

۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ است.

$$a_1 q + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{99} = 500 \rightarrow q = \frac{500}{K} \rightarrow K = 250$$

$$a_1 + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{98} = K$$

$$S_{100} = 500 + 250 = 750$$

۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ است.

$$f(x) = K(x + \frac{1}{2})^2 \quad f(\frac{3}{2}) = 4K = 6 \rightarrow K = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}(x + \frac{1}{2})^2 \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

$$\alpha + \beta = 3 \Rightarrow \frac{3 - \beta}{1 - 2\beta} = 8 \Rightarrow 3 - \beta = 8 - 16\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow m = \alpha\beta = \frac{8}{9}$$

۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3\alpha \\ P = \alpha\beta = 2\alpha^2 \end{cases} \quad \text{معادله: } x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = 0$$

به ازای $\alpha = -\frac{1}{3}$ معادله به صورت $x^2 + x + \frac{2}{9} = 0$ تبدیل می‌شود.

۱۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ است.

$$x = \sqrt{5} - 2 \rightarrow x + 2 = \sqrt{5} \quad x^2 + 4x + 4 = 5 \quad x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$a = 4 \quad b = -1 \quad a - b = 5$$

۱۱- گزینهی ۱ پاسخ است.

$$x = -\frac{\alpha}{2} + 1 \rightarrow \alpha = -2x + 2$$

$$(-2x + 2)^2 - 2(-2x + 2) - 1 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 1 = 0$$

۱۲- گزینهی ۳ پاسخ است.

$$\alpha + \beta = 6 \quad \alpha\beta = 4 \quad A = \sqrt{\alpha^2\beta} + \sqrt{\beta^2\alpha} = 2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$$

$$A^2 = 4(\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}) = 4(6 + 4) = 40$$

$$A = 2\sqrt{10}$$

۱۳- گزینهی ۴ پاسخ است.

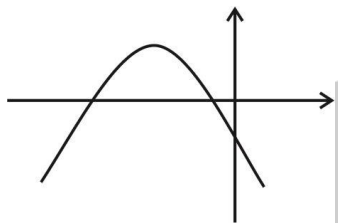
$$f(x) = K(x - \alpha)(x + 2\alpha)$$

$$S(-\frac{\alpha}{2}, -9)$$

$$-9 = K(-\frac{3\alpha}{2})(\frac{3\alpha}{2}) \rightarrow K\alpha^2 = 4$$

$$c = f(0) = -2K\alpha^2 = -8$$

۱۴- گزینهی ۳ پاسخ است.



$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-a}{a-3} < 0 \\ \frac{-1}{a-3} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 + 4a - 12 > 0 \\ \rightarrow a < 0 \\ \rightarrow \text{همواره برقرار} \end{cases}$$

$$a < -6 \quad a > 2$$

$$a < -6 \quad \text{جواب نهایی}$$

۱۵- گزینهی ۱ پاسخ است.

$$x^2 = t \quad 3t^2 - 4t - 1 = 0 \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \quad x_1 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{7}}{3}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{7}}{3}}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{2 + \sqrt{7} + 2 + \sqrt{7}}{3} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{3}$$