توجه! لطفا سوالات را در کادر مشخص شده پاسخ دهید.(پاسخ‌های خارج از کادر تصحیح نخواهد شد)

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

طراح: علی صادقی

آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه: کلاس: مدت آزمون: **۱۰۰ دقیقه**

نام درس: **هندسه ۲** پایه: **یازدهم** رشته: **ریاضی**

سوال ۱	**بارم: ۱/۵ نمره**

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

آ) یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره .... باشد.

ب) اگر دو دایره با شعاع‌های R و R' مماس خارج باشند، در این صورت طول مماس مشترک خارجی آنها از رابطهٔ .... به دست می‌آید.

پ) یک چندضلعی، محیطی است اگر و تنها اگر همهٔ .... آن همرس باشند. این نقطهٔ همرسی مرکز دایره .... است.

ت) در بازتاب محوری یک خط، اگر خط بر محور بازتاب، .... یا .... باشد، بازتاب خط، خودش خواهد بود.

سوال ۲	**بارم: ۱/۵ نمره**

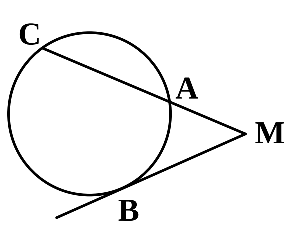
قطاع دایره را تعریف کنید. سپس ثابت کنید اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ برحسب درجه برابر α باشد، در این صورت طول کمان نظیر قطاع برابر است با: $\frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$.

سوال ۳	**بارم: ۱ نمره**

ثابت کنید هر زاویهٔ محاطی در دایره نصف کمان روبه‌رویش می‌باشد. (تنها حالتی را ثابت کنید که یکی از اضلاع زاویهٔ محاطی، قطر دایره باشد)

سوال ۴	**بارم: ۱/۵ نمره**

در شکل زیر روابط داده شده را ثابت کنید.



الف) $\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$

ب) $MB^2 = MA.MC$

سوال ۵ — **بارم: ۱ نمره**

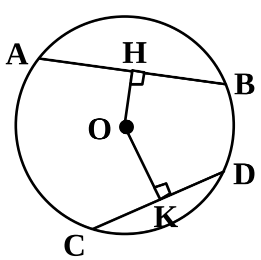
طریقهٔ رسم خط مماس از یک نقطه، خارج دایره را توضیح دهید.

سوال ۶ — **بارم: ۱/۲۵ نمره**

طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

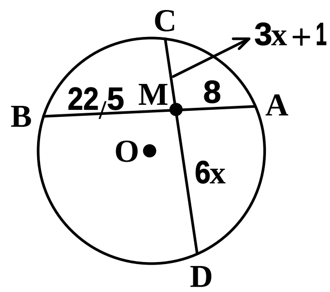
سوال ۷ — **بارم: ۱/۵ نمره**

در دایرهٔ $C(O,R)$ ثابت کنید اگر $AB > CD$ آنگاه $OH < OK$ (OH و OK فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند).

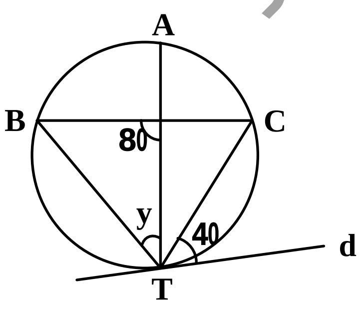


سوال ۸ — **بارم: ۱ نمره**

در شکل مقابل خط d بر دایره در نقطهٔ T مماس است. مقادیر x و y را به دست آورید.



(الف)



(ب)

سوال ۹ — **بارم: ۱ نمره**

وضعیت دو دایره را در حالت‌های زیر مشخص کنید.

آ) $R=\frac{1}{3}$, $R'=\frac{1}{2}$, $d=\frac{5}{6}$

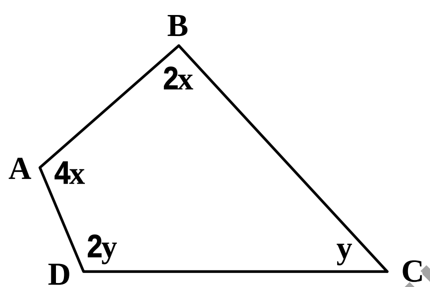
ب) $R=1+\sqrt{2}$, $R'=\sqrt{2}-1$, $d=1$

سوال ۱۰ — **بارم: ۱ نمره**

ثابت کنید در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.

سوال ۱۱ — **بارم: ۱ نمره**

در شکل مقابل چهارضلعی ABCD محاطی است. با توجه به اندازه‌های داده شده، حاصل $\frac{x}{y}$ را به دست آورید.



سوال ۱۲ — **بارم: ۱ نمره**

در یک مثلث اگر S مساحت مثلث و ۲p محیط آن باشد، ثابت کنید شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$r=\frac{S}{P}$$

سوال ۱۳ — **بارم: ۱ نمره**

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) اگر چندضلعی هم محاطی و هم محیطی باشد، در این صورت چندضلعی منتظم است.

ب) انتقال با بردار $\vec{V}$ ($\vec{V}\neq\vec{0}$)، هیچ نقطهٔ ثابتی ندارد.

پ) دوران مربع ABCD به مرکز محل تلاقی قطرهایش با زاویهٔ 90° (ساعتگرد) یک تبدیل همانی است.

ت) بازتاب محوری هیچ‌گاه شیب خط را حفظ نمی‌کند.

سوال ۱۴ — **بارم: ۱/۲۵ نمره**

تبدیل طولپا را تعریف کنید. سپس ثابت کنید تبدیل انتقال طولپاست.

سوال ۱۵ — **بارم: ۱ نمره**

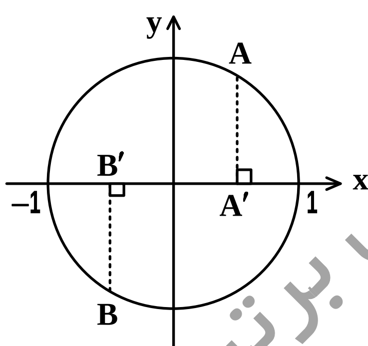
ثابت کنید هر تبدیل طولپا، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

سوال ۱۶ — **بارم: ۱ نمره**

تناظر $\mathbf{M}$ را از دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ به مجموعه نقاط روی محور $\mathbf{x}$ ها (بین ۱ و ۱-) در نظر می‌گیریم: $\mathbf{M : P \to Q}$
این تناظر برای به دست آوردن تصویر هر نقطه از مجموعه $\mathbf{P}$، از آن نقطه بر محور $\mathbf{x}$ ها عمود می‌کند و پای عمود را به عنوان تصویر آن نقطه در نظر می‌گیرد. یعنی $\mathbf{M(A) = A'}$.

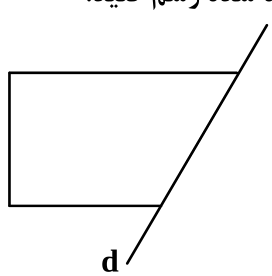
آ) آیا $\mathbf{M}$ تبدیل است؟ چرا؟

ب) آیا $\mathbf{M}$ طولپاست؟ چرا؟

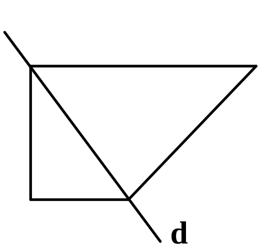


سوال ۱۷ — **بارم: ۱ نمره**

بازتاب هر یک از شکل‌های زیر را نسبت به خط داده شده رسم کنید.



(الف)



(ب)

سوال ۱۸ — **بارم: ۰/۵ نمره**

مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) تبدیل

ب) نقطهٔ ثابت تبدیل

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

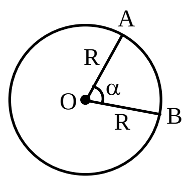
آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)

پاسخنامه آزمون: هندسه ۲

پاسخ سؤال ۱:

آ) بر شعاع عمود   ب) $2\sqrt{RR'}$ پ) نیمسازهای داخلی (نیمسازهای زوایای داخلی) ـ محاطی   ت) عمود ـ منطبق

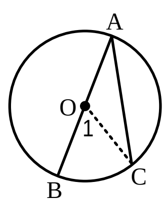
پاسخ سؤال ۲:



$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{\text{طول کمان } AB}{2\pi R} = \frac{\pi}{360^\circ} \Rightarrow \text{طول کمان } AB = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$$

پاسخ سؤال ۳:

از C به O (مرکز دایره) وصل می‌کنیم. داریم:

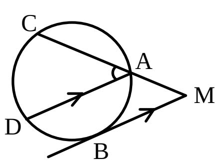


$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \\ \overset{\Delta}{AOC}: (\text{خارجی})\ \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2}$$

$\hat{O}_1$ زاویه مرکزی است بنابراین $\hat{O}_1 = \widehat{BC}$ و لذا $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$.

پاسخ سؤال ۴:

آ) از A به موازات BM رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند. داریم:

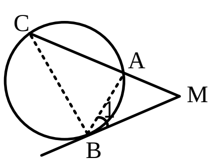


$$AD \parallel MB \Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l} MB \parallel AD \\ \text{مورب } MC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{محاطی } \hat{A}_1} \hat{M} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BDC} - \widehat{BD}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

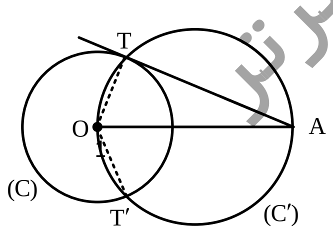
ب) از B به A و C وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{B}_1 = \hat{C} = \frac{AB}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \overset{\Delta}{ABM} \sim \overset{\Delta}{BCM}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow BM^2 = AM.MC$$

پاسخ سؤال ۵:



فرض می‌کنیم نقطهٔ A خارج دایره C باشد. از A به O مرکز دایره وصل کرده دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم (دایره C'). این دایره، دایره C را در دو نقطه T و T' قطع می‌کند. از A به T و T' وصل می‌کنیم. زوایای OTA و $OT'A$ زوایای محاطی روبه‌رو به قطر در دایرهٔ C' می‌باشند. بنابراین قائمه‌اند و این بدین معنی است که AT و AT' بر شعاع دایرهٔ C عمودند و لذا بر دایرهٔ C مماس‌اند.

پاسخ سؤال ۶:

طول مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 3\sqrt{7} = \sqrt{8^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 63 = 64 - (R-R')^2 \Rightarrow (R-R')^2 = 1 \xrightarrow{R>R'} R - R' = 1$

طول مماس مشترک داخلی $FF' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2} \Rightarrow \sqrt{15} = \sqrt{8^2 - (R+R')^2} \Rightarrow 15 = 64 - (R+R')^2 \Rightarrow (R+R')^2 = 49 \Rightarrow R + R' = 7$

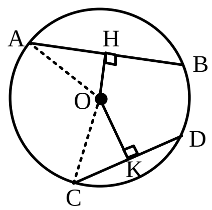
$$\left\{\begin{array}{l} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{array}\right. \Rightarrow R = 4\ ,\ R' = 3$$

آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)

پاسخنامه آزمون: هندسه ۲

پاسخ سؤال ۷:

از O به A و C وصل می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{OAH}: OA^2 = AH^2 + OH^2 \\ \overset{\Delta}{OCK}: OC^2 = CK^2 + OK^2\end{array}\right\} \xrightarrow{OA=OC} AH^2 + OH^2 = CK^2 + OK^2 \Rightarrow AH^2 - CK^2 = OK^2 - OH^2 \quad (1)$$

$$AB > CD \xrightarrow{\div 2} \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow AH > CK \Rightarrow AH^2 > CK^2 \xrightarrow{(1)} OK^2 > OH^2 \Rightarrow OK > OH$$

پاسخ سؤال ۸:

آ) طبق قضیهٔ وترها داریم:

$$AM.BM = CM.MD \Rightarrow 8 \times 22/5 = (3x+1)6x \Rightarrow 3x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ب)

$40° = \frac{\overset{\frown}{TC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{TC} = 80°$ (زاویه محاطی)

$$\frac{\overset{\frown}{TC} + \overset{\frown}{AB}}{2} = 100° \Rightarrow 80° + \overset{\frown}{AB} = 200° \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 120° \Rightarrow y = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

پاسخ سؤال ۹:

آ)

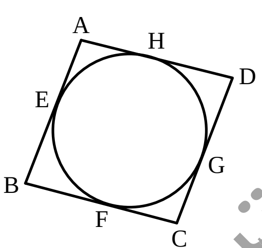
$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow R + R' = d \Rightarrow$ دایره‌ها مماس خارج‌اند

ب)

$(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1) = 2 > 1 \Rightarrow R - R' > d \Rightarrow$ دایره‌ها متداخل‌اند

پاسخ سؤال ۱۰:

از آنجا که چهارضلعی محیطی است طبق تعریف دایره‌ای وجود دارد که بر اضلاع آن مماس است. حال با توجه به اینکه طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره با هم برابرند، داریم:



$$\begin{array}{l}AB + CD = (AE + EB) + (DG + GC) = AH + BF + DH + CF \\ = (AH + DH) + (BF + CF) = AD + BC\end{array}$$

پاسخ سؤال ۱۱:

در چهارضلعی محاطی، زوایای مقابل مکمل‌اند. بنابراین داریم:

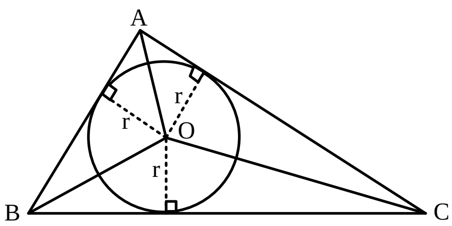
$$\begin{cases}4x + y = 180° \\ 2x + 2y = 180°\end{cases} \Rightarrow 4x + y = 2x + 2y \Rightarrow 2x = y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

پاسخ سؤال ۱۲:

می‌دانیم مرکز دایره محاطی داخلی مثلث، نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی است. از این نقطه به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم. داریم:

آزمون آمادگی نیمسال اول تشریحی (دی ماه ۹۶)

پاسخنامه آزمون: هندسه ۲



$$S = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$
$$S = \frac{1}{2}r.AB + \frac{1}{2}r.AC + \frac{1}{2}r.BC$$
$$S = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC) \Rightarrow S = \frac{1}{2}r(2P)$$
$$\Rightarrow S = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

پاسخ سؤال ۱۳:

آ) نادرست (مثلث دلخواه هم محیطی و هم محاطی است و لزوماً منتظم نمی‌باشد)

ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

پاسخ سؤال ۱۴:

تبدیلی که فاصلهٔ بین نقاط را حفظ می‌کند، تبدیل طولپا نامیده می‌شود ـ (فعالیت صفحه ۴۱ کتاب درسی)

پاسخ سؤال ۱۵:

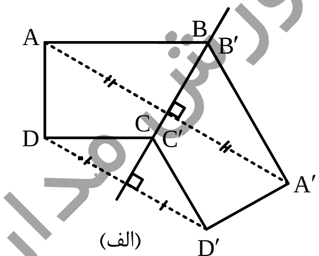
(فعالیت صفحه ۳۶ کتاب درسی)

پاسخ سؤال ۱۶:

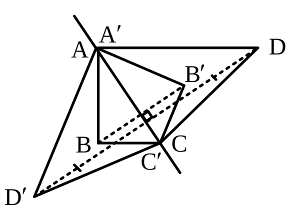
آ) خیر ـ زیرا به ازای هر نقطه روی محور x ها در بازه $(-1,1)$ یعنی مجموعه دوم، دو نقطه روی دایره (مجموعه اول) وجود دارد.

ب) خیر ـ زیرا تبدیل نیست.

پاسخ سؤال ۱۷:



(الف)



(ب)

پاسخ سؤال ۱۸:

آ) (تعریف صفحه ۳۶ کتاب درسی)

ب) (تعریف صفحه ۳۸ کتاب درسی)