فصل ۱

دایره

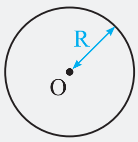
- مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره
- رابطه‌های طولی در دایره
- چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

فصل اول

دایره

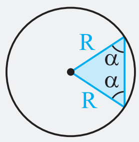
درسنامهٔ ۱

دایره و تعاریف اولیه

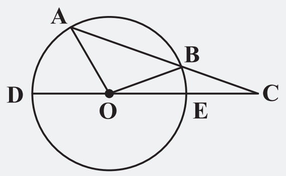


C(O,R)

دایره: مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت به‌نام مرکز دایره، مقدار ثابتی است که به این مقدار ثابت شعاع دایره می‌گویند. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را با $C(O,R)$ نشان می‌دهند.



نکته: هر دایره بی‌شمار شعاع دارد. مثلث‌هایی که دو ضلع آن‌ها شعاع دایره باشد، مثلث متساوی‌الساقین هستند. برابر قرار دادن زاویه‌های زیر دو ساق، کلید حل این‌گونه مسائل است. البته ممکن است در بعضی مسائل خودمان شعاع مناسبی را رسم کنیم.

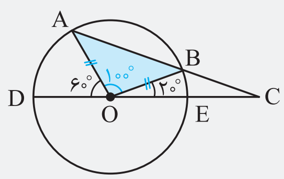


تست: در شکل مقابل، DE قطر دایره و O مرکز آن است. اگر $A\hat{O}D = ۶۰^\circ$ و $B\hat{O}E = ۲۰^\circ$ باشند، زاویهٔ BCE چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ (۲)



ابتدا زاویهٔ AOB را به دست می‌آوریم. در نقطهٔ O داریم:

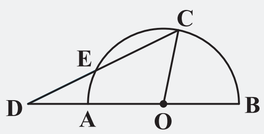
$$۶۰^\circ + A\hat{O}B + ۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۱۰۰^\circ$$

مثلث AOB متساوی‌الساقین است؛ زیرا $OA = OB = R$. بنابراین در مثلث AOB داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + ۱۰۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = ۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۴۰^\circ$$

زاویهٔ B در مثلث رنگی، زاویهٔ خارجی مثلث OBC است. پس:

$$۴۰^\circ = ۲۰^\circ + B\hat{C}E \Rightarrow B\hat{C}E = ۲۰^\circ$$

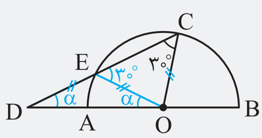


تست: در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و DE برابر با شعاع نیم‌دایره است. اگر $O\hat{C}D = ۳۰^\circ$ باشد، زاویهٔ BDC چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۰

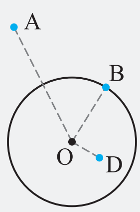
پاسخ: گزینهٔ (۱)



از O به E وصل می‌کنیم. مثلث COE متساوی‌الساقین است؛ زیرا $OC = OE = R$. پس زاویهٔ E در این مثلث نیز ۳۰° است. از طرفی با توجه به این‌که DE برابر شعاع نیم‌دایره است، پس مثلث OED نیز متساوی‌الساقین می‌باشد و چون زاویهٔ $C\hat{E}O = ۳۰^\circ$، زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس:

$$۳۰^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = ۱۵^\circ$$

اوضاع نسبی نقطه و دایره



۱) **نقطهٔ A بیرون دایرهٔ $C(O,R)$ است:** در این حالت فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره، از شعاع دایره بیشتر است $(OA > R)$.

۲) **نقطهٔ B روی دایرهٔ $C(O,R)$ است:** در این حالت فاصلهٔ نقطهٔ B از مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است $(OB = R)$.

۳) **نقطهٔ D درون دایرهٔ $C(O,R)$ است:** در این حالت فاصلهٔ نقطهٔ D از مرکز دایره، از شعاع دایره کم‌تر است $(OD < R)$.

تست: فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O,۳)$ برابر $۷-x$ است. به ازای چند مقدار صحیح x، نقطهٔ A درون دایرهٔ C است؟

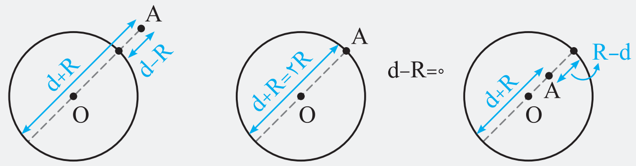
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ (۲)

باید $OA < R$ باشد. در ضمن چون OA، فاصلهٔ دو نقطه است، پس همواره $OA \geq ۰$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$۰ \leq OA < R \Rightarrow ۰ \leq ۷-x < ۳ \Rightarrow -۷ \leq -x < -۴ \Rightarrow ۴ < x \leq ۷ \xRightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = ۵ \text{ یا } ۶ \text{ یا } ۷$$

تذکر: اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ را برابر d فرض کنیم، آن‌گاه بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از محیط دایرهٔ C، از روابط زیر به دست می‌آید که با توجه به شکل‌های مقابل این روابط به وضعیت نقطهٔ A و دایرهٔ C بستگی ندارند.



$d+R =$ بیشترین فاصله و کم‌ترین $= |d-R|$

توجه کنید که وجود قدرمطلق در $|d-R|$ به خاطر این است که اگر A بیرون دایره باشد، کم‌ترین فاصله برابر با $d-R$ و اگر A درون دایره باشد، کم‌ترین فاصله برابر با $R-d$ است که وجود قدرمطلق باعث پوشش هر دو حالت می‌شود.

تست: فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O,۳)$ برابر ۸ است. مجموع فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ A کدام است؟

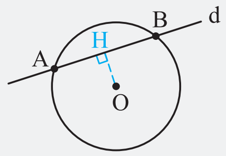
۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ (۳)

با توجه به توضیحات سؤال $d = ۸$ و $R = ۳$ است. پس:

$$\begin{cases} \text{فاصلهٔ دورترین نقاط دایره تا } A = d+R = ۸+۳ = ۱۱ \\ \text{فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا } A = d-R = ۸-۳ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع فاصله‌ها} = ۱۱+۵ = ۱۶$$

اوضاع نسبی خط و دایره

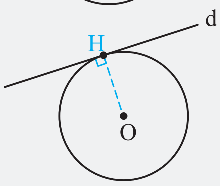


OH < R

۱) **خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ متقاطع‌اند:** در این حالت خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند و فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d، از شعاع دایره کم‌تر است.

وتر دایره: به پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد، وتر دایره می‌گویند.

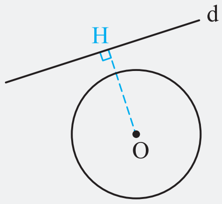
قطر دایره: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر دایره نامیده می‌شود که طول آن دو برابر شعاع دایره است. قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره می‌باشد.



OH = R

۲) **خط d بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس است:** در این حالت خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک هستند که به آن نقطه، نقطهٔ تماس می‌گویند. فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس برابر با شعاع دایره است.

نتیجه: شعاع دایره، در نقطهٔ تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است.



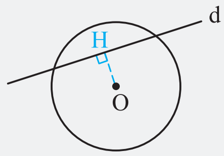
OH > R

۳) **خط d دایرهٔ $C(O,R)$ را قطع نمی‌کند:** در این حالت خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند و فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d از شعاع دایره بیشتر است.

تست: خط d به فاصلهٔ $۱۰-x$ از مرکز دایرهٔ $C(O,۳)$ قرار دارد و دایرهٔ C را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای x کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینهٔ (۴)

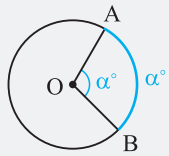


با توجه به شکل مقابل باید $OH < R$ باشد. درضمن واضح است که $OH \geq ۰$ است. پس:

$$۰ \leq OH < R \Rightarrow ۰ \leq ۱۰ - x < ۳ \Rightarrow -۱۰ \leq -x < -۷ \Rightarrow ۷ < x \leq ۱۰ \xRightarrow{x \in \mathbb{N}} x = ۸,۹,۱۰$$

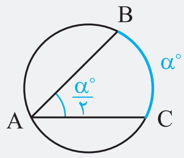
بنابراین مجموع مقادیر طبیعی x برابر با $۸+۹+۱۰ = ۲۷$ است.

زاویه‌های نام‌دار در دایره



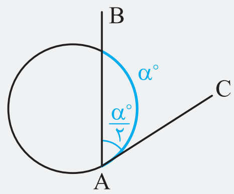
① **زاویهٔ مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن برحسب درجه، برابر است.

$$\boxed{A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = \alpha^\circ}$$



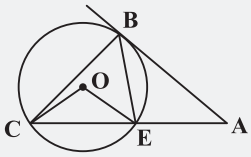
② **زاویهٔ محاطی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره است. اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف کمان مقابل آن برحسب درجه است.

$$\boxed{B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\alpha^\circ}{۲}}$$



③ **زاویهٔ ظلی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر با نصف کمان مقابل آن برحسب درجه است.

$$\boxed{B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\alpha^\circ}{۲}}$$

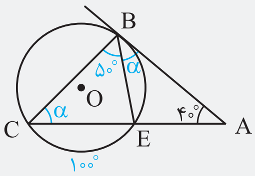


تست: در شکل مقابل، O مرکز دایره، $B\hat{A}C = ۴۰^\circ$ و $C\hat{O}E = ۱۰۰^\circ$ است. زاویهٔ ACB چند درجه است؟

۱) ۴۰   ۲) ۴۵

۳) ۵۰   ۴) ۳۵

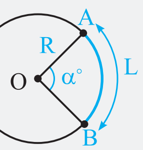
پاسخ: گزینهٔ (۲)



زاویهٔ COE زاویهٔ مرکزی رو به کمان CE است، پس $\overset{\frown}{CE} = ۱۰۰^\circ$. از طرفی چون زاویهٔ CBE زاویهٔ محاطی رو به کمان CE است، پس $C\hat{B}E = \frac{۱۰۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$ خواهد بود. زاویهٔ ACB زاویهٔ محاطی رو به کمان BE و زاویهٔ EBA زاویهٔ ظلی رو به کمان BE هستند؛ پس با هم برابرند. حال در مثلث ABC داریم:

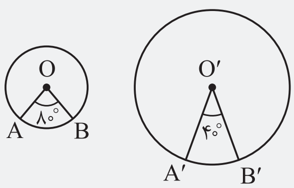
$$\alpha + (۵۰^\circ + \alpha) + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

کمان، قطاع و قطعه



طول کمان: چون محیط یک دایره، کمانی به اندازهٔ ۳۶۰° و به طول $۲\pi R$ است، پس طول کمان AB به‌صورت زیر با یک تناسب ساده به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow L = ۲\pi R \times \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}}$$



تست: در شکل مقابل، طول کمان‌های AB و A′B′ با هم برابر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

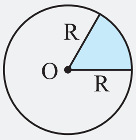
۱) ۱/۵   ۲) ۲

۳) ۲/۵   ۴) ۳

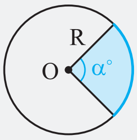
پاسخ: گزینهٔ (۲)

فرض می‌کنیم طول هر دو کمان برابر L و شعاع دایرهٔ کوچک R و شعاع دایرهٔ بزرگ R′ باشند. پس:

$$\begin{cases} L = ۲\pi R \times \frac{۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \\ L = ۲\pi R' \times \frac{۴۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \end{cases} \Rightarrow \cancel{۲\pi} R \times \frac{۸۰^\circ}{\cancel{۳۶۰^\circ}} = \cancel{۲\pi} R' \times \frac{۴۰^\circ}{\cancel{۳۶۰^\circ}} \Rightarrow R \times ۸۰^\circ = R' \times ۴۰^\circ \Rightarrow \frac{R'}{R} = ۲$$



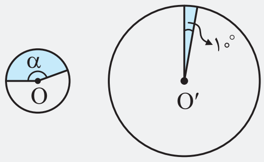
قطاع دایره: سطح محصور بین دو شعاع یک دایره را قطاع دایره می‌نامند.



مساحت قطاع: چون مجموع زوایای مرکزی در یک دایره برابر ۳۶۰° است، پس مساحت قطاع با زاویهٔ مرکزی α به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{S}{\pi R^۲}\Rightarrow \boxed{S=\pi R^۲\times\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}}$$

تست: در شکل زیر، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر ۴ برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است. اگر مساحت دو قطاع رنگی با هم برابر باشد، زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۱۴۰ ۲) ۱۵۰
۳) ۱۶۰ ۴) ۱۷۰

پاسخ: گزینهٔ (۳)

اگر شعاع دایرهٔ کوچک R باشد، شعاع دایرهٔ بزرگ ۴R می‌شود و داریم:

$$\cancel{\pi}R^۲\times\frac{\alpha}{\cancel{۳۶۰^\circ}}=\cancel{\pi}(۴R)^۲\frac{۱۰^\circ}{\cancel{۳۶۰^\circ}}\Rightarrow \cancel{R^۲}\times\alpha=۱۶\cancel{R^۲}\times۱۰^\circ\Rightarrow\alpha=۱۶۰^\circ$$

نتیجه: اگر به جای زاویهٔ مرکزی قطاع، طول کمان را داشته باشیم، از رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ مساحت قطاع استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\dfrac{L}{۲\pi R}\\[2mm]\dfrac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\dfrac{S}{\pi R^۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{L}{۲\pi R}=\frac{S}{\pi R^۲}\Rightarrow\boxed{S=\frac{RL}{۲}}$$

تست: مساحت قطاعی از دایره ۶π است. اگر طول کمان قطاع ۲π باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟

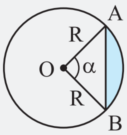
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ (۲)

با توجه به رابطهٔ $S=\frac{RL}{۲}$ که در آن S مساحت قطاع، R اندازهٔ شعاع دایره و L طول کمان متناظر قطاع است، داریم:

$$۶\pi=\frac{R\times۲\pi}{۲}\Rightarrow R=۶$$

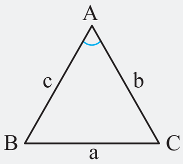
قطعهٔ یک دایره: در یک دایره، ناحیهٔ محصور به یک کمان و وتر متناظرش را قطعه می‌نامیم.



مساحت قطعه: برای محاسبهٔ مساحت قطعه کافی است مساحت مثلث متساوی‌الساقین OAB را از مساحت قطاع، کم کنیم.

بنابراین داریم:

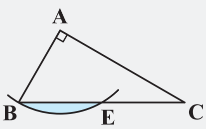
$$S_{\text{قطعه}}=S_{\text{قطاع}}-S_{AOB}\Rightarrow\boxed{S_{\text{قطعه}}=\pi R^۲\times\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}-\frac{۱}{۲}R^۲\sin\alpha}$$



توجه: در فصل سوم خواهیم دید که مساحت مثلث برابر با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین دو ضلع است.

$$\boxed{S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}}$$

تست: در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و به اضلاع قائم ۶ و $۶\sqrt{۳}$ است. به مرکز A و شعاع ۶ دایره‌ای رسم شده است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

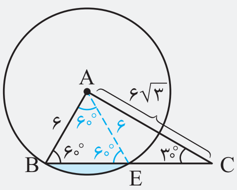


۱) $۴\pi-\sqrt{۳}$ ۲) $۲\pi-۲\sqrt{۳}$
۳) $۶\pi-۳\sqrt{۳}$ ۴) $۶\pi-۹\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ (۴)

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC^۲=۶^۲+(۶\sqrt{۳})^۲\Rightarrow BC^۲=۳۶+۳۶\times۳\Rightarrow BC^۲=۴\times۳۶\Rightarrow BC=۲\times۶=۱۲$$



چون ضلع AB برابر نصف وتر است، پس $\hat{C}=۳۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{B}=۶۰^\circ$ می‌باشد. از نقطهٔ A (مرکز دایره) به E وصل می‌کنیم. مثلث BAE متساوی‌الساقین است و چون زاویهٔ زیر ساق، ۶۰° است، مثلث BAE متساوی‌الاضلاع خواهد بود، پس داریم:

$$S_{\text{رنگی}}=\pi(۶)^۲\times\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}-\underbrace{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۶)^۲}_{\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}}=۶\pi-۹\sqrt{۳}$$

۱- نقطهٔ A بیرون دایرهٔ $C(O,۳)$ قرار دارد. اگر $OA = ۸ - x$ باشد، برای x چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

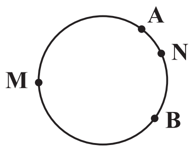
۱) ۶   ۲) ۵   ۳) ۴   ۴) ۳

۲- خط d و دایرهٔ $C(O,۴)$ مفروض است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d برابر ۱۰ باشد، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۷

۳- نزدیک‌ترین و دورترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره‌ای به ترتیب ۷ و ۱۳ است. شعاع دایره کدام می‌تواند باشد؟

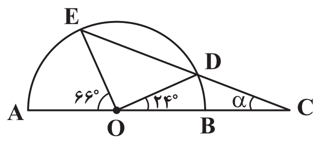
۱) ۲   ۲) ۱۰   ۳) ۴   ۴) ۶



۴- در شکل مقابل، $\widehat{AMB} = ۴\widehat{ANB}$ و $\widehat{BN} = ۳\widehat{AN}$ است. کمان BN چند درجه است؟

۱) ۳۶   ۲) ۵۴

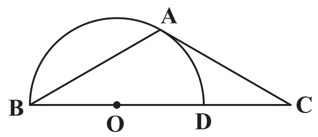
۳) ۱۸   ۴) ۶۰



۵- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. α چند درجه است؟

۱) ۱۸   ۲) ۲۰

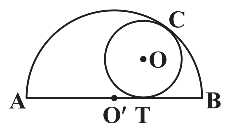
۳) ۲۱   ۴) ۲۴



۶- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع ۲ است. اگر A نقطهٔ تماس و $AB = AC$ باشد، طول پاره‌خط CD کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) ۳

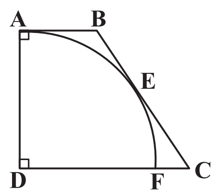
۳) ۲   ۴) $\sqrt{۵}$



۷- در شکل مقابل، O مرکز دایره، O′ مرکز نیم‌دایره و نقاط C و T نقاط تماس هستند. اگر $AT = ۸$ و $TB = ۴$ باشند، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟

۱) ۴   ۲) $\frac{۸}{۳}$

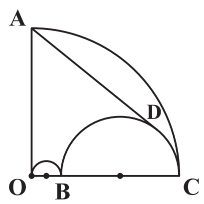
۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$



۸- در شکل مقابل، ABCD ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه و D مرکز نیم‌دایره است. اگر A و E نقاط تماس، $EC = ۸$ و $FC = ۲$ باشد، طول پاره‌خط BE کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۱۰

۳) ۹   ۴) ۷



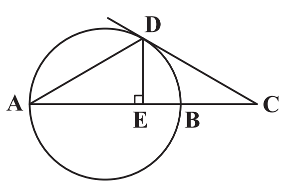
۹- در شکل مقابل، دو نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ درون ربع دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. اگر AD بر نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر مماس باشد، طول AD کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۱۰}$

۲) $۲\sqrt{۳۰}$

۳) $۳\sqrt{۲۰}$

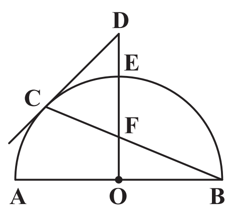
۴) $۲\sqrt{۱۵}$



۱۰- در شکل مقابل، AB قطر دایره است. اگر $BC = ۲BE = ۴$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۵   ۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) ۴   ۴) ۳



۱۱- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و C نقطهٔ تماس است. اگر $DC = ۸$ باشد، طول پاره‌خط DF کدام است؟

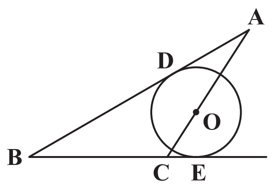
۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۱

۴) ۸

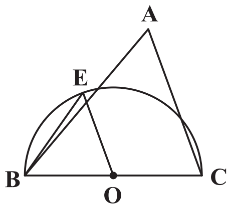
۱۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره، نقاط D و E نقاط تماس، $A\hat{B}C = ۳۰^\circ$ و $BC = ۶$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲۴}{۱۱}$

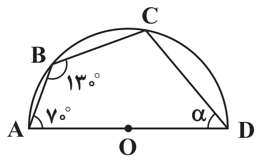
۱۳- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و AC موازی EO است. اگر $A\hat{C}B = ۷۰^\circ$ و $A\hat{B}E = ۵^\circ$ باشد، زاویهٔ BAC چند درجه است؟



۱) ۴۰ ۲) ۵۰

۳) ۶۰ ۴) ۷۰

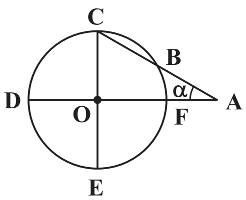
۱۴- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۴۵ ۲) ۵۰

۳) ۵۵ ۴) ۶۰

۱۵- در شکل زیر، قطرهای دایره برهم عمودند. اگر $OD = AB$ باشد، زاویهٔ α چند درجه است؟



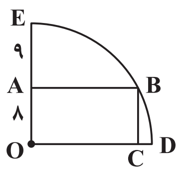
۱) ۲۵

۲) ۳۰

۳) ۳۵

۴) ۴۰

۱۶- در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره است. مساحت مستطیل ABCO کدام است؟



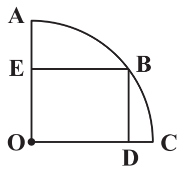
۱) ۸۰

۲) ۹۶

۳) ۱۲۰

۴) ۱۲۸

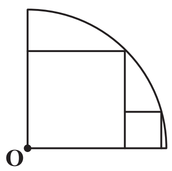
۱۷- در شکل مقابل، مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ درون ربع دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. حاصل $CD + AE$ کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۵

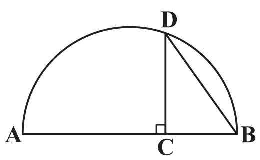
۱۸- در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره و دو چهارضلعی مربع هستند. اگر طول ضلع مربع کوچک برابر ۲ باشد، طول ضلع مربع بزرگ کدام است؟



۱) ۵ ۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $۲+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲+۲\sqrt{۳}$

۱۹- در شکل مقابل، DC بر قطر نیم‌دایره عمود است. اگر $DB = ۲\sqrt{۵}$ و $AC = ۸$ باشند، طول پاره‌خط DC کدام است؟



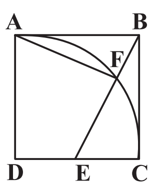
۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۰- در مثلث قائم‌الزاویه، دایره به مرکز رأس قائمه بر وتر مثلث مماس است. اگر طول قطعات ایجادشده روی وتر توسط نقطهٔ تماس ۵ و ۸ باشد، فاصلهٔ نقاط تلاقی دایره با اضلاع قائم مثلث کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

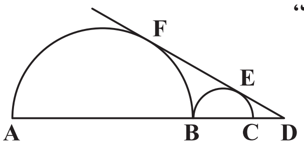
۲۱- در شکل مقابل، ABCD مربع به ضلع ۴ و دایره به مرکز D و شعاع ۴ رسم شده است. اگر E وسط ضلع مربع باشد، زاویهٔ AFE چند درجه است؟



۱) ۹۵ ۲) ۸۵

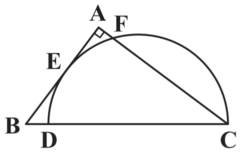
۳) ۹۰ ۴) ۸۰

۲۲- در شکل مقابل، نقاط E و F نقاط تماس هستند. اگر شعاع نیم‌دایرهٔ کوچک برابر ۱ و $CD = ۱$ باشد، شعاع نیم‌دایرهٔ بزرگ کدام است؟



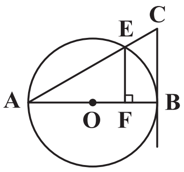
۱) ۶
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۴

۲۳- در شکل مقابل، E نقطهٔ تماس است. اگر $AB = ۲۷$ و $AC = ۳۶$ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۱۵
۴) ۲۲

۲۴- در شکل مقابل، AB قطر دایره است. اگر $CB = ۶$ و $EF = ۴$ باشند، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۳}$

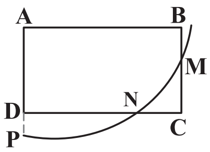
۲۵- در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $\widehat{ADB} = ۳۴^\circ$ باشد، زاویهٔ OAD چند درجه است؟ ریاضی داخل ۹۴

۱) ۶۸
۲) ۷۳
۳) ۱۰۲
۴) ۱۴۶

۲۶- در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع کدام است؟ ریاضی داخل ۹۵

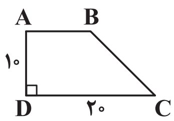
۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۷- در شکل مقابل، ABCD مستطیل است. دایره به مرکز A ضلع‌های مستطیل و امتداد آن‌ها را در نقاط M، N و P قطع کرده است. اگر $BM = ۷$، $MC = ۸$ و $DP = ۱۰$ باشد، طول پاره‌خط NC کدام است؟



۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲/۵
۴) ۳/۵

۲۸- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، دایره به رأس A از رئوس B و D می‌گذرد. زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) نمی‌توان تعیین کرد.

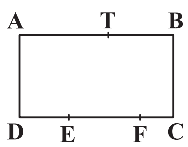
۲۹- در مستطیل به ابعاد ۴ و ۸، دایره به مرکز یک رأس مستطیل و شعاع ۵، اضلاع آن را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از هم کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۵}$

۳۰- عرض مستطیل ABCD برابر ۵ است. دایره‌ای به مرکز یکی از رأس‌ها، طول مستطیل را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر طول قطعات کوچک‌تر ایجادشده بر روی طول‌های مستطیل ۲ و ۳ باشد، شعاع دایره کدام است؟

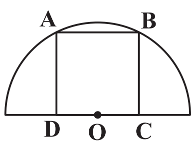
۱) ۱۰
۲) ۱۳
۳) ۱۱
۴) ۸

۳۱- در مستطیل شکل مقابل، نقاط T و E روی دایره‌ای به رأس C و نقاط T و F روی دایره‌ای به رأس D قرار دارند. اگر $DE = EF = ۴$ و $FC = ۲$ باشند، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

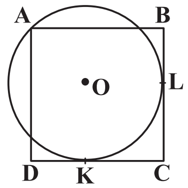


۱) ۳۶
۲) ۴۴
۳) ۵۲
۴) ۴۸

۳۲- در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره ۷/۵ است. مساحت مربع ABCD کدام است؟



۱) ۵۴
۲) ۳۰
۳) ۳۶
۴) ۴۵



۳۳- در شکل مقابل، ABCD مستطیل است. O مرکز دایره و نقاط L و K نقاط تماس هستند. اگر $AB = ۲۵$ و $BC = ۳۲$ باشند، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟

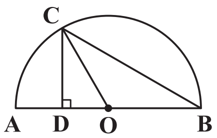
۱) ۱۵ ۲) ۱۶
۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۳۴- مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟ ریاضی خارج ۹۵

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

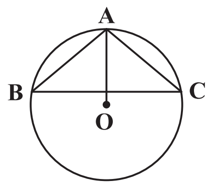
۳۵- مربع ABCD مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا از دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD برابر ۵ است. مساحت مربع کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵ ۳) ۳۶ ۴) ۴۹



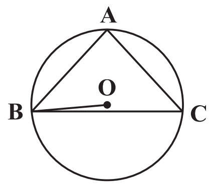
۳۶- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و CO نیمساز زاویهٔ DCB است. اگر $DO = ۴$ باشد، طول پاره خط AD کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶
۳) ۳ ۴) ۵



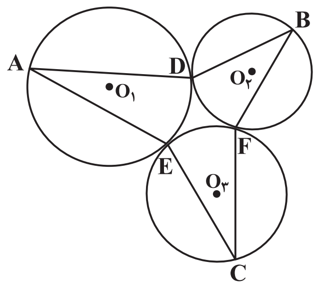
۳۷- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $O\hat{A}C = ۵۰^\circ$ باشد، زاویهٔ B در مثلث ABC چند درجه است؟

۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۴۵



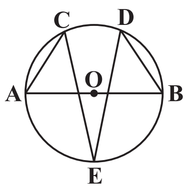
۳۸- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $C\hat{B}O = ۵^\circ$ باشد، زاویهٔ $B\hat{A}C$ چند درجه است؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۰
۳) ۷۵ ۴) ۷۰



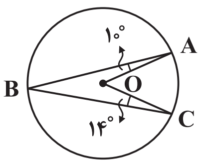
۳۹- در شکل مقابل، $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ مرکزهای سه دایره و نقاط D، E و F نقاط تماس دایره‌ها هستند. اگر $E\hat{A}D = \alpha$، $D\hat{B}F = \beta$ و $E\hat{C}F = \theta$ باشند، حاصل $\alpha + \beta + \theta$ کدام است؟

۱) ۸۵°
۲) ۹۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۸۰°



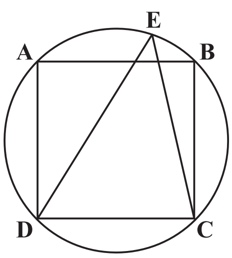
۴۰- در شکل مقابل، O مرکز و AB قطر دایره است. اگر $C\hat{A}B = ۶۵^\circ$ و $A\hat{B}D = ۵۰^\circ$ باشند، زاویهٔ CED چند درجه است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۰
۳) ۳۰ ۴) ۳۵



۴۱- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. زاویهٔ AOC چند درجه است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸
۳) ۴۸ ۴) ۳۶

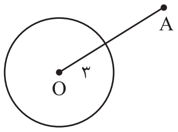


۴۲- در شکل مقابل، ABCD مربع است. اگر $A\hat{D}E = ۳۰^\circ$ باشد، زاویهٔ BCE چند درجه است؟

۱) ۳۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۱۰

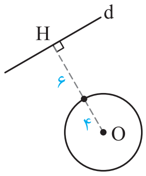
پاسخ‌های تشریحی

۱ ۳ با توجه به داده‌های تست و شکل مقابل داریم:



$OA > R \Rightarrow ۸ - x > ۳ \Rightarrow x < ۵ \Rightarrow$ مقادیر طبیعی x می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد.

۲ ۳ مطابق شکل مقابل، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d برابر ۶ است.



۳ ۲ اگر نقطهٔ A بیرون دایره باشد، آن‌گاه نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا دایره برابر $d - R$ است و دورترین فاصلهٔ آن تا دایره برابر $d + R$ است، پس:

$$\begin{cases} d - R = ۷ \\ d + R = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow ۲d = ۲۰ \Rightarrow d = ۱۰ \Rightarrow R = ۳$$

حال فرض می‌کنیم نقطهٔ A درون دایره باشد. در این حالت نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا دایره برابر $R - d$ و دورترین فاصلهٔ آن تا دایره برابر $d + R$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} R - d = ۷ \\ d + R = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۲۰ \Rightarrow R = ۱۰$$

دقت کنید نقطهٔ A نمی‌تواند روی دایره باشد. چون در این حالت نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره برابر صفر می‌شود.

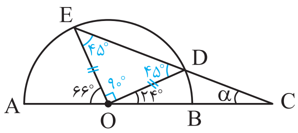
۴ ۲ محیط دایره توسط نقاط A و B به دو کمان AMB و ANB تقسیم شده است. پس:

$$\text{محیط دایره} = \underbrace{\widehat{AMB}}_{۴\widehat{ANB}} + \widehat{ANB} \Rightarrow ۳۶۰^\circ = ۴\widehat{ANB} + \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$$

از طرفی داریم:

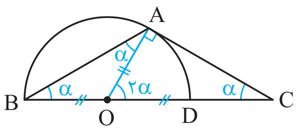
$$\widehat{ANB} = \underbrace{\widehat{BN}}_{۳\widehat{AN}} + \widehat{AN} \Rightarrow ۷۲^\circ = ۳\widehat{AN} + \widehat{AN} = ۴\widehat{AN} \Rightarrow \widehat{AN} = ۱۸^\circ \Rightarrow \widehat{BN} = ۳ \times \widehat{AN} = ۳ \times ۱۸^\circ = ۵۴^\circ$$

۵ ۳ چون OD و OE شعاع نیم‌دایره هستند و $\widehat{EOD} = ۱۸۰^\circ - (۶۶ + ۲۰۴) = ۹۰^\circ$ ، پس مثلث EOD قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و زاویه‌ها به صورت شکل مقابل هستند: زاویهٔ $\widehat{D} = ۴۵^\circ$، زاویهٔ خارجی مثلث ODC است. پس:



$$۴۵^\circ = \alpha + ۲۴^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۱^\circ$$

۶ ۳ از O به A وصل می‌کنیم. OA بر AC عمود است. از طرفی مثلث OAB متساوی‌الساقین است. در ضمن مثلث ABC نیز متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌ها به صورت مقابل هستند. دقت کنید زاویهٔ AOD زاویه خارجی مثلث OAB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC داریم:

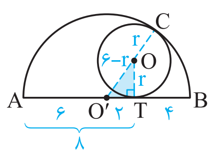


$$۹۰^\circ + \alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است. پس:

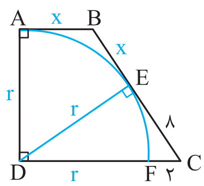
$$OA = \frac{OC}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{OC}{۲} \Rightarrow OC = ۴ \Rightarrow CD = OC - OD = ۴ - ۲ = ۲$$

۷ ۲ با توجه به این‌که $AT = ۸$ و $TB = ۴$ است، پس اندازهٔ شعاع نیم‌دایره برابر $\frac{۸ + ۴}{۲} = ۶$ می‌باشد. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O'OT$ داریم:



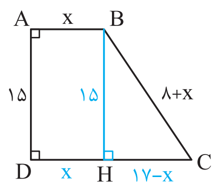
$$(۶ - r)^۲ = ۲^۲ + r^۲ \Rightarrow ۳۶ - ۱۲r + \cancel{r^۲} = ۴ + \cancel{r^۲} \Rightarrow ۱۲r = ۳۲ \Rightarrow r = \frac{۳۲}{۱۲} = \frac{۸}{۳}$$

۸ ۳ از D به E وصل می‌کنیم. DE بر BC عمود است. از طرفی $BE = BA = x$ می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC، داریم:



$$r^۲ + ۸^۲ = (r + ۲)^۲ \Rightarrow \cancel{r^۲} + ۶۴ = \cancel{r^۲} + ۴r + ۴ \Rightarrow ۴r = ۶۰ \Rightarrow r = ۱۵$$

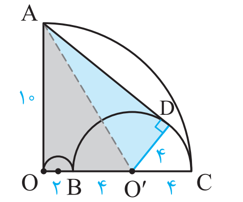
حال، از رأس B بر قاعدهٔ CD عمود می‌کنیم. با توجه به اندازه‌های شکل، به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ CHB، داریم:



$$۱۵^۲ + (۱۷ - x)^۲ = (۸ + x)^۲ \Rightarrow ۲۲۵ + ۲۸۹ - ۳۴x + \cancel{x^۲} = ۶۴ + ۱۶x + \cancel{x^۲}$$

$$\Rightarrow ۵۰x = ۴۵۰ \Rightarrow x = ۹ \Rightarrow BE = ۹$$

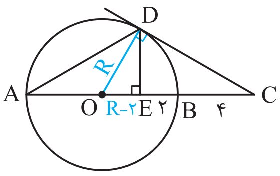
۹ **۲** از A به مرکز نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر وصل می‌کنیم. $O'D$ بر AD عمود بوده و چون $O'D$ شعاع نیم‌دایره است، پس $O'D=۴$. حال در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AOO' و ADO' داریم:



$$\begin{cases}AO^۲+OO'^۲=AO'^۲\\ AD^۲+DO'^۲=AO'^۲\end{cases}\Rightarrow AO^۲+OO'^۲=AD^۲+DO'^۲$$

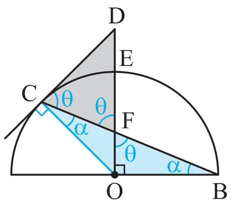
$$\Rightarrow ۱۰۰+۳۶=AD^۲+۱۶\Rightarrow AD^۲=۱۲۰\Rightarrow AD=۲\sqrt{۳۰}$$

۱۰ **۳** از مرکز نیم‌دایره یعنی O به D وصل می‌کنیم. OD بر مماس DC عمـود اسـت. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODC داریم:

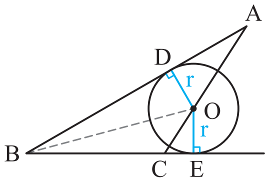


$$OD^۲=OE.OC\Rightarrow R^۲=(R-۲)(R+۴)\Rightarrow \cancel{R^۲}=\cancel{R^۲}+۲R-۸\Rightarrow ۲R=۸\Rightarrow R=۴$$

۱۱ **۴** از O به C وصل می‌کنیم. OC بر CD عمود است. از طرف دیگر $OC=OB$ است. پس مثلث BOC متساوی‌الساقین است. حال فرض می‌کنیم زاویهٔ DCF برابر θ باشد، پس $\alpha+\theta=۹۰^\circ$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ FOB نیز زاویهٔ F برابر θ خواهد شد، به دلیل این‌که زاویهٔ F در مثلث DCF با این زاویه متقابل به رأس است، پس زاویهٔ F در این مثلث هم برابر θ می‌شود و این یعنی مثلث DCF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $DF=DC=۸$.



۱۲ **۴** از O به D و E وصل می‌کنیم. OD بر AB و OE بر BE عمود است. از آن‌جایی که مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ است، داریم:

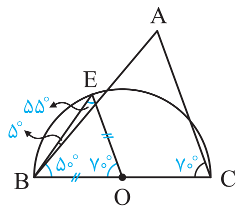


$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times \sin ۳۰^\circ\Rightarrow ۲۴=\frac{۱}{۲}\times AB\times ۶\times \frac{۱}{۲}\Rightarrow AB=۱۶$$

حال از O به B وصل می‌کنیم و داریم:

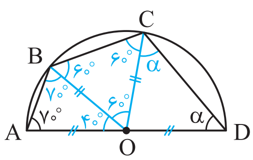
$$S_{ABC}=S_{AOB}+S_{BOC}=\frac{۱}{۲}AB\times r+\frac{۱}{۲}BC\times r\Rightarrow ۲۴=\frac{۱}{۲}\times ۱۶\times r+\frac{۱}{۲}\times ۶\times r\Rightarrow ۲۴=۸r+۳r\Rightarrow r=\frac{۲۴}{۱۱}$$

۱۳ **۳** چـون $AC \parallel EO$ و $A\hat{C}B=۷۰^\circ$، پـس $E\hat{O}B=۷۰^\circ$. مثـلث BOE متساوی‌السـاقین اسـت، پس $\hat{E}=\hat{B}=۵۵^\circ$. حال در مثلث ABC داریم:



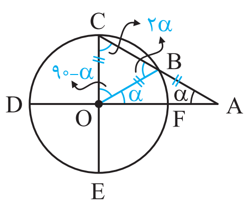
$$\hat{A}+۵۰^\circ+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ\Rightarrow B\hat{A}C=۶۰^\circ$$

۱۴ **۲** از O بـه B و C وصـل مـی‌کنیم. مثلث‌هـای AOB و COD متساوی‌السـاقین هسـتند، زیرا $OA=OB=R$ و $OC=OD=R$. از طرفی مثلث BOC نیز متساوی الساقین است و چون زوایای زیر دو ساق ۶۰° هستند، پس زاویهٔ O نیز از مثلث BOC برابر ۶۰° است و در نتیجه مثلث BOC متساوی‌الاضلاع خواهد بود. پس زاویهٔ O از مثلث COD برابر ۸۰° خواهد شد. حال در مثلث COD داریم:



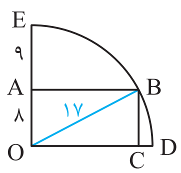
$$\alpha+\alpha+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۱۰۰^\circ\Rightarrow \alpha=۵۰^\circ$$

۱۵ **۲** از O بـه B وصـل مـی‌کنیم. چـون OB شـعاع دایـره اسـت و طبـق فـرض $OD=AB$؛ پس $OB=AB$ خواهد بود و در نتیجه مثلث OBA متساوی‌الساقین اسـت. واضـح اسـت کـه مثلث BOC نیز متساوی‌الساقین بوده و زوایا به صورت مقابل هستند. دقت کنید زاویهٔ B در مثلث BOC، زاویهٔ خارجی مثلث OBA است. حال در مثلث BOC داریم:



$$۲\alpha+۲\alpha+(۹۰^\circ-\alpha)=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

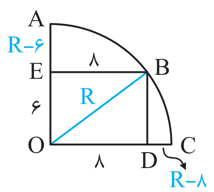
۱۶ **۳** از O به B وصل می‌کنیم. چون OB و OE شعاع هستند، پس $OB=OE=۸+۹=۱۷$ است. از آن‌جایی که OB قطر مستطیل ABCO است، داریم:



$$OA^۲+AB^۲=OB^۲\Rightarrow ۶۴+AB^۲=۲۸۹\Rightarrow AB^۲=۲۲۵\Rightarrow AB=۱۵$$

بنابراین مساحت مستطیل ABCO برابر است با: $S=۸\times ۱۵=۱۲۰$

۱۷ **۲** از O به B وصل می‌کنیم. اندازه‌ها به صورت مقابل هستند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OEB داریم:

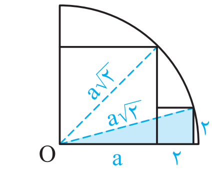


$$۶^۲+۸^۲=R^۲\Rightarrow ۱۰۰=R^۲\Rightarrow R=۱۰$$

بنابراین $AE=۱۰-۶=۴$ و $CD=۱۰-۸=۲$ هستند و داریم:

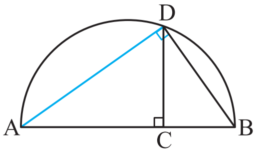
$$CD+AE=۲+۴=۶$$

۱۸ **۴** فرض می‌کنیم طول ضلع مربع بزرگ a باشد. با توجه به شکل مقابل در مثلث دیگر داریم:



$$(a+۲)^۲+۲^۲=(a\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow a^۲+۴a+۴+۴=۲a^۲$$
$$\Rightarrow a^۲-۴a-۸=۰ \Rightarrow a=۲+۲\sqrt{۳}$$

۱۹ **۳** از A به D وصل می‌کنیم. زاویهٔ ADB برابر ۹۰° است، زیرا زاویهٔ محاطی رو به نیم‌دایره است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB، داریم:

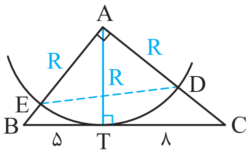


$$DB^۲=BC\times BA \Rightarrow (۲\sqrt{۵})^۲=BC\times(BC+۸) \Rightarrow ۲۰=BC^۲+۸BC$$
$$\Rightarrow BC^۲+۸BC-۲۰=۰ \Rightarrow (BC+۱۰)(BC-۲)=۰ \Rightarrow BC=۲$$

حال، طول DC را به دست می‌آوریم. DC ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB است. پس:

$$DC^۲=AC\times CB \Rightarrow DC^۲=۸\times۲=۱۶ \Rightarrow DC=۴$$

۲۰ **۴** ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ نقاط D و E مد نظر سؤال است. ابتدا از A به T وصل می‌کنیم. AT بر BC عمود است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

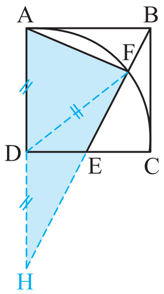


$$AT^۲=BT\times CT \Rightarrow R^۲=۵\times۸=۴۰ \Rightarrow R=۲\sqrt{۱۰}$$

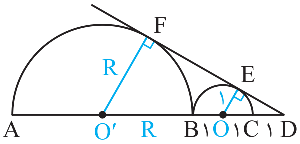
حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ EAD داریم:

$$ED^۲=AE^۲+AD^۲ \Rightarrow ED^۲=R^۲+R^۲ \Rightarrow ED=\sqrt{۲}R \xRightarrow{R=۲\sqrt{۱۰}} ED=۲\sqrt{۲۰}=۴\sqrt{۵}$$

۲۱ **۳** BE را از سمت E امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع مربع را در H قطع کند. دو مثلث BCE و HDE همنهشت هستند، پس $AD=DH=BC=۴$ می‌باشد. حال، از D به F وصل می‌کنیم. چون DF شعاع دایره است، پس $DF=DA=۴$ و این یعنی در مثلث AFH، میانهٔ وارد بر ضلع AH نصف آن است. پس مثلث AFH قائم‌الزاویه است و این یعنی $A\hat{F}E=۹۰^\circ$ می‌باشد.

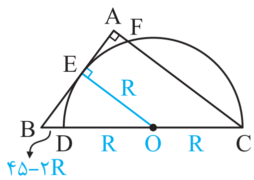


۲۲ **۲** از مرکز نیم‌دایره‌ها به نقاط تماس وصل می کنیم، می‌دانیم OE و O'F بر DF عمودند، پس با هم موازی‌اند. حال به کمک قضیهٔ تالس در مثلث O'DF داریم:



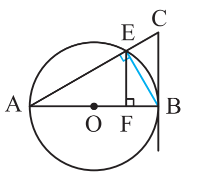
$$\frac{DO}{DO'}=\frac{OE}{O'F} \Rightarrow \frac{۲}{۳+R}=\frac{۱}{R} \Rightarrow ۲R=۳+R \Rightarrow R=۳$$

۲۳ **۲** در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC طول وتر BC برابر ۴۵ است. زیرا $AB=۹\times۳$ و $AC=۹\times۴$ هستند و می‌دانیم اعداد ۳، ۴ و ۵ و هر مضرب غیر صفر آن‌ها اعداد فیثاغورسی هستند، پس $BC=۹\times۵=۴۵$ می‌باشد. حال از مرکز نیم‌دایره به نقطهٔ تماس وصل می‌کنیم. OE بر AB عمود است، پس OE با AC موازی است. به کمک تالس در مثلث BAC داریم:



$$\frac{OE}{AC}=\frac{BO}{BC} \Rightarrow \frac{R}{۳۶}=\frac{۴۵-R}{۴۵} \Rightarrow ۴۵R=۳۶\times۴۵-۳۶R$$
$$\Rightarrow ۸۱R=۳۶\times۴۵ \Rightarrow ۹\times۹\times R=۳۶\times۴۵ \Rightarrow R=۴\times۵=۲۰$$

۲۴ **۲** AB بر CB عمود است وچون EF و CB هر دو بر AB عمودند، پس با هم موازی‌اند. بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

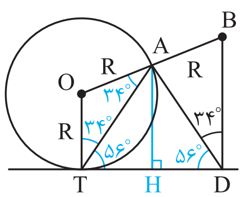


$$\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow AF=۴k\ ,\ AB=۶k \Rightarrow BF=۲k$$

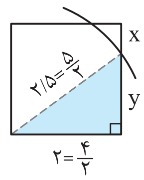
حال از B به E وصل می‌کنیم. زاویهٔ AEB زاویهٔ محاطی رو به نیم‌دایره است؛ پس $A\hat{E}B=۹۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEB داریم: $EF^۲=AF\times FB \Rightarrow ۱۶=۴k\times۲k \Rightarrow ۱۶=۸k^۲ \Rightarrow k=\sqrt{۲}$

$$AB=۲R=۶k \Rightarrow R=۳k \xRightarrow{k=\sqrt{۲}} R=۳\sqrt{۲}$$

۲۵ **۳** از مرکز دایره به نقطهٔ تماس یعنی T وصل می‌کنیم. بنابراین $\hat{T}=۹۰^\circ$ خواهد بود. از A بر ساق TD عمود می‌کنیم. طبق عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ OBDT نتیجه می‌شود که $TH=HD$. پس AH عمود منصف پاره‌خط TD است. پس اگر از A به T وصل کنیم $AT=AD$ خواهد بود و این یعنی مثلث TAD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{T}=\hat{D}=۵۶^\circ$. زاویهٔ OTA متمم زاویهٔ $\hat{T}=۵۶^\circ$ است. پس $O\hat{T}A=۳۴^\circ$ و چون مثلث AOT متساوی‌الساقین است، پس $O\hat{A}T=۳۴^\circ$. بنابراین زاویهٔ OAD برابر است با: $O\hat{A}D=۳۴^\circ+(۱۸۰^\circ-۵۶^\circ-۵۶^\circ)=۱۰۲^\circ$

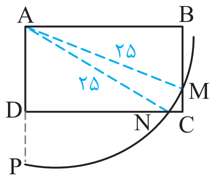


۲۶ **۲** با توجه به شکل مقابل، x مد نظر سؤال است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی چون ۲/۵ و ۲ مضربی از اعداد فیثاغورسی ۵ و ۴ و ۳ هستند، پس $y=\frac{۳}{۲}$ خواهد بود. بنابراین داریم:



$$x=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۲۷ **۱** واضح است که عرض مستطیل برابر ۱۵ می‌باشد. زیرا:



$$AD=BC=BM+MC=۷+۸=۱۵$$

از طرفی، $DP=۱۰$ است. پس شعاع دایره یعنی AP برابر $۲۵=۱۰+۱۵$ می‌باشد.

از A به M و N وصل می‌کنیم. چون AM و AN شعاع‌های دایره هستند، پس $AM=AN=۲۵$. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM، داریم:

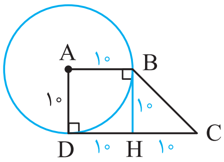
$$AM^۲=AB^۲+BM^۲\Rightarrow ۲۵^۲=AB^۲+۷^۲\Rightarrow AB^۲=۵۷۶\Rightarrow AB=۲۴$$

بنابراین اندازهٔ طول مستطیل برابر ۲۴ است، یعنی $AB=CD=۲۴$. با فرض $NC=x$، $DN=۲۴-x$ می‌شود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADN، به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

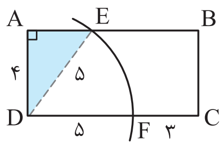
$$AN^۲=AD^۲+DN^۲\Rightarrow ۲۵^۲=۱۵^۲+(۲۴-x)^۲\Rightarrow ۶۲۵=۲۲۵+۵۷۶+x^۲-۴۸x\Rightarrow x^۲-۴۸x+۱۷۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۴)(x-۴۴)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۴\Rightarrow NC=۴ \\ x=۴۴ \quad \text{غق} \end{cases}$$

۲۸ **۲** چون دایره به رأس A از رأس‌های B و D می‌گذرد، پس $AB=AD=۱۰$. از نقطهٔ B عمودی بر CD رسم می‌کنیم. واضح است چهارضلعی ABHD مربع است. در نتیجه $BH=۱۰$ و چون $CD=۲۰$ است، پس $DH=HC=۱۰$. مثلث BHC، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C}=۴۵^\circ$.

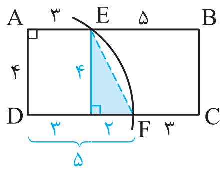


۲۹ **۴** دایره به شعاع ۵ و به مرکز رأس D رسم شده است که طول‌های مستطیل را در نقاط E و F قطع می‌کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی داریم:



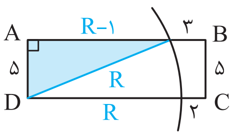
$$۵^۲=۴^۲+AE^۲\Rightarrow AE^۲=۹\Rightarrow AE=۳$$

حال کافی است از E بر DC عمود کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجادشده داریم:



$$EF^۲=۲^۲+۴^۲\Rightarrow EF^۲=۲۰\Rightarrow EF=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

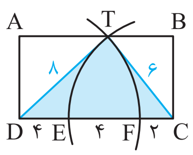
۳۰ **۲** با توجه به توضیحات ارائه‌شده در صورت تست، شکل مسأله به صورت مقابل است:



در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی داریم:

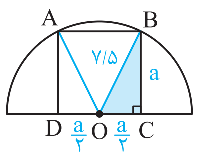
$$۵^۲+(R-۱)^۲=R^۲\Rightarrow ۲۵+\cancel{R^۲}-۲R+۱=\cancel{R^۲}\Rightarrow ۲R=۲۶\Rightarrow R=۱۳$$

۳۱ **۴** با توجه به شکل مقابل $CT=CE=۶$ و $DT=DF=۸$ است. چون اضلاع مثلث DTC برابر ۶، ۸ و ۱۰ و $۱۰^۲=۸^۲+۶^۲$ است، پس مثلث DTC قائم‌الزاویه است و داریم:



$$S_{ABCD}=۲S_{DTC}=۲\times\frac{۱}{۲}\times۶\times۸=۴۸$$

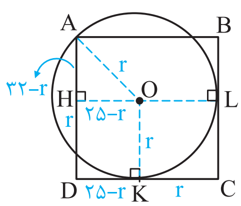
۳۲ **۴** از O به A و B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCO به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+a^۲=(۷/۵)^۲\Rightarrow \frac{a^۲}{۴}+a^۲=(۷/۵)^۲\Rightarrow \frac{۵}{۴}a^۲=(۷/۵)^۲$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۴}{۵}(۷/۵)^۲=\frac{۴}{۵}\times۷/۵\times۷/۵=\frac{۱۵\times۱۵}{۵}=۴۵\Rightarrow S=۴۵$$

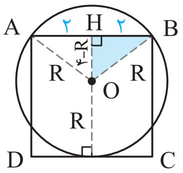
۳۳ **۳** فرض می‌کنیم اندازهٔ شعاع دایره r باشد. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:



$$r^۲=(۲۵-r)^۲+(۳۲-r)^۲\Rightarrow \cancel{r^۲}=۶۲۵-۵۰r+\cancel{r^۲}+۱۰۲۴-۶۴r+r^۲$$

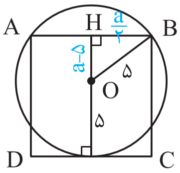
$$\Rightarrow r^۲-۱۱۴r+۱۶۴۹=۰\Rightarrow (r-۹۷)(r-۱۷)=۰\Rightarrow \begin{cases} r=۱۷ \\ r=۹۷ \quad \text{غق} \end{cases}$$

۳۴ **۲** با توجه به توضیحات صورت تست، شکل مسأله به صورت مقابل است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB بـه کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$R^{۲}=۲^{۲}+(۴-R)^{۲}\Rightarrow \cancel{R^{۲}}=۴+۱۶+\cancel{R^{۲}}-۸R\Rightarrow ۸R=۲۰\Rightarrow R=\frac{۲۰}{۸}=۲/۵$$

۳۵ **۱** با توجه به شکل مقابل و با فرض این‌که طول ضلع مربع برابر a باشد، داریم:

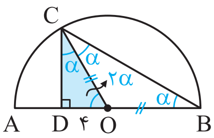


$$\overset{\Delta}{OHB}: OB^{۲}=OH^{۲}+HB^{۲}\Rightarrow ۲۵=(a-۵)^{۲}+\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲۵=a^{۲}-۱۰a+۲۵+\frac{a^{۲}}{۴}\Rightarrow \frac{۵}{۴}a^{۲}-۱۰a=۰$$

$$\Rightarrow ۵a\left(\frac{a}{۴}-۲\right)=۰\Rightarrow a=۸\Rightarrow S_{مربع}=a^{۲}=۶۴$$

۳۶ **۱** مثلث COB متساوی‌الساقین است، زیرا $OB=OC=R$. زاویهٔ DOC زاویهٔ خارجی مثلث COB است، پس $D\hat{O}C=۲\alpha$. از طرفی CO نیمساز زاویهٔ DCB است؛ پس $D\hat{C}O=\alpha$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ CDO داریم:

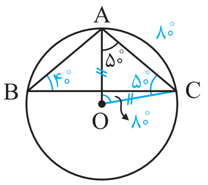


$$۹۰^\circ+\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

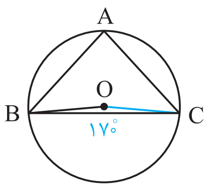
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است. پس $OC=۸$ و این یعنی شعاع دایره برابر ۸ است. پس داریم:

$$AD=OA-OD=۸-۴=۴$$

۳۷ **۲** از O به C وصل می‌کنیم. مثلث AOC متساوی‌الساقین است. پس زاویهٔ O از این مثلث برابر ۸۰° است. چون زاویهٔ AOC مرکزی است، پس $\widehat{AC}=۸۰^\circ$. زاویهٔ ABC زاویهٔ محاطی رو به کمان $\widehat{AC}$ است. پس زاویهٔ ABC برابر $\frac{\widehat{AC}}{۲}=۴۰^\circ$ است. یعنی زاویهٔ B در مثلث ABC برابر ۴۰° است.

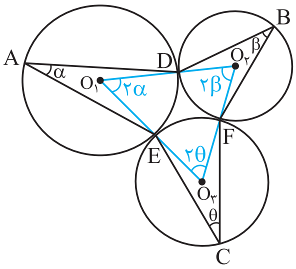


۳۸ **۱** از O بـه C وصـل مـی‌کنیم. مثلـث BOC متساوی‌الساقین اسـت. پـس زاویـهٔ O در مثلـث BOC برابر ۱۷۰°است. زاویهٔ BOC زاویهٔ مرکزی اسـت. پـس $B\hat{O}C=\widehat{BC}=۱۷۰^\circ$. از طرفـی زاویـهٔ BAC زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان BC است. پس:



$$B\hat{A}C=\frac{\widehat{BC}}{۲}=\frac{۱۷۰^\circ}{۲}=۸۵^\circ$$

۳۹ **۲** مراکز سه دایره را به هم وصـل مـی‌کنیم. زوایـای $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ زوایـای مرکـزی می‌باشـند. بنـابراین اندازه‌های آن‌ها مطابق شکل مقابل است. در مثلث $O_۱O_۲O_۳$، مجموع زوایای داخلی ۱۸۰° است. پس:



$$\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha+۲\beta+۲\theta=۱۸۰^\circ\Rightarrow \alpha+\beta+\theta=۹۰^\circ$$

۴۰ **۱** زاویهٔ CAB محاطی است. بنابراین $\widehat{CDB}=۲\times۶۵^\circ=۱۳۰^\circ$.

چون AB قطردایره است. پس:

$$\widehat{AC}+\widehat{CDB}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\widehat{CDB}=۱۳۰^\circ}\widehat{AC}+۱۳۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow \widehat{AC}=۵۰^\circ$$

از طرفی، زاویهٔ ABD نیز محاطی است. بنابراین داریم:

$$\widehat{ACD}=۲\times۵۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

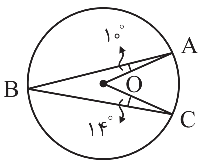
حال، کافی است اندازهٔ کمان CD را به دست آوریم:

$$\widehat{CD}=\widehat{ACD}-\widehat{AC}=۱۰۰^\circ-۵۰^\circ=۵۰^\circ$$

چون زاویهٔ CED زاویهٔ محاطی روبه کمان CD است، پس:

$$C\hat{E}D=\frac{\widehat{CD}}{۲}=\frac{۵۰^\circ}{۲}=۲۵^\circ$$

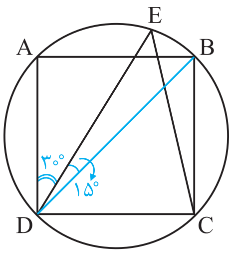
۴۱ **۳** زاویهٔ AOC زاویهٔ مرکزی رو به کمان AC و زاویهٔ ABC زاویهٔ محاطی رو به کمان AC است. پس:



$$\begin{cases}A\hat{O}C=\widehat{AC}\\ A\hat{B}C=\frac{\widehat{AC}}{۲}\end{cases}\Rightarrow A\hat{O}C=۲A\hat{B}C$$

حال در چهارضلعی ABCO با فرض $A\hat{B}C=\alpha$ داریم:

$$۲\alpha=۱۰^\circ+۱۴^\circ+\alpha\Rightarrow \alpha=۲۴^\circ\Rightarrow A\hat{O}C=۲\alpha=۲\times۲۴^\circ=۴۸^\circ$$



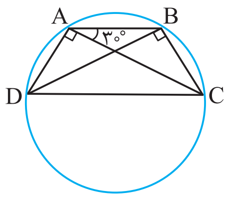
۴۲ ۲ در مربع ABCD، قطر BD را رسم می‌کنیم. واضح است که زاویهٔ ADB برابر ۴۵° است. از طرفی زاویهٔ ADB زاویهٔ محاطی رو به کمان AEB است. پس $\overset{\frown}{AEB} = ۹۰^\circ$ می‌باشد. همچنین زاویهٔ محاطی ADE رو به کمان AE است. پس $\overset{\frown}{AE} = ۶۰^\circ$ و داریم:

$$\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{AEB} \Rightarrow ۶۰^\circ + \overset{\frown}{EB} = ۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{EB} = ۳۰^\circ$$

زاویهٔ BCE زاویهٔ محاطی رو به کمان EB است. پس:

$$B\hat{C}E = \frac{\overset{\frown}{EB}}{۲} = \frac{۳۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

البته می‌توانستیم زاویهٔ EDB را به دست آورده و مستقیم کمان BE را محاسبه کنیم و ...

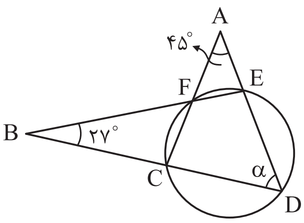


۴۳ ۳ چون زاویه‌های DBC و DAC برابر ۹۰° هستند، پس A و B روی دایره‌ای به قطر DC هستند. زیرا در این صورت این زوایا، زوایای محاطی رو به نیم‌دایره هستند. با توجه به شکل مقابل، زاویهٔ BAC زاویهٔ محاطی است. پس:

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۶۰^\circ$$

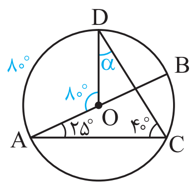
زاویهٔ BDC نیز زاویهٔ محاطی رو به کمان BC است. پس:

$$B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$



۴۴ ۲ فرض می‌کنیم $A\hat{D}B = \alpha$ باشد. چون $A\hat{D}B$ زاویهٔ محاطی رو به کمان CFE است، پس $\overset{\frown}{CFE} = ۲\alpha$. از طرفی زاویهٔ CFE زاویهٔ محاطی رو به کمان CDE است، از آن‌جایی که $\overset{\frown}{CDE} = ۳۶۰^\circ - ۲\alpha$، پس $C\hat{F}E = ۱۸۰^\circ - \alpha$. زاویهٔ AFB با زاویهٔ CFE متقابل به رأس است. پس $A\hat{F}B = ۱۸۰^\circ - \alpha$. حال در چهارضلعی AFBD داریم:

$$۱۸۰^\circ - \alpha = ۴۵^\circ + ۲۷^\circ + \alpha \Rightarrow ۲\alpha = ۱۰۸^\circ \Rightarrow \alpha = ۵۴^\circ$$



۴۵ ۴ زاویهٔ ACD محاطی است. پس:

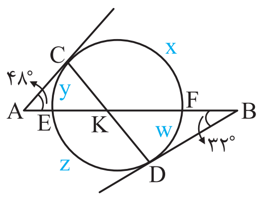
$$A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow ۴۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۸۰^\circ$$

زاویهٔ AOD زاویهٔ مرکزی رو به کمان AD است. پس:

$$A\hat{O}D = \overset{\frown}{AD} = ۸۰^\circ$$

در چهارضلعی ODCA داریم:

$$۸۰^\circ = \alpha + ۴۰^\circ + ۲۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۵^\circ$$



۴۶ ۳ اندازهٔ کمان‌ها را مطابق شکل x، y، z و w فرض می‌کنیم و داریم:

$$۴۸^\circ = \frac{x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۹۶^\circ \Rightarrow y = x - ۹۶^\circ$$

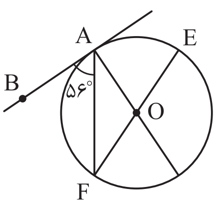
$$۳۲^\circ = \frac{z - w}{۲} \Rightarrow z - w = ۶۴^\circ \Rightarrow w = z - ۶۴^\circ$$

از طرفی، می‌دانیم $x + y + z + w = ۳۶۰^\circ$ است پس:

$$x + (x - ۹۶^\circ) + z + (z - ۶۴^\circ) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + z = ۲۶۰^\circ$$

حال داریم:

$$C\hat{K}B = \frac{x + z}{۲} = \frac{۲۶۰^\circ}{۲} = ۱۳۰^\circ$$

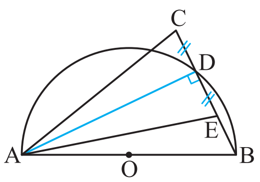


۴۷ ۱ زاویهٔ BAF ظلی است. پس:

$$B\hat{A}F = \frac{\overset{\frown}{AF}}{۲} \Rightarrow ۵۶^\circ = \frac{\overset{\frown}{AF}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = ۲ \times ۵۶^\circ = ۱۱۲^\circ$$

از طرفی EF قطر دایره است. پس:

$$\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AF} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AE} + ۱۱۲^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = ۶۸^\circ$$



۴۸ ۲ از A به D وصل می‌کنیم. چون زاویهٔ ADB زاویهٔ محاطی رو به نیم‌دایره است، پس $A\hat{D}B = ۹۰^\circ$ می‌باشد. از طرفی $CD = DE$ است پس در مثلث CAE، ارتفاع وارد بر CE، میانه نیز هست. لذا مثلث CAE متساوی‌الساقین بوده و داریم:

$$AC = AE \Rightarrow A\hat{C}E = A\hat{E}C = ۸۰^\circ \Rightarrow C\hat{A}E + ۸۰^\circ + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow C\hat{A}E = ۲۰^\circ$$