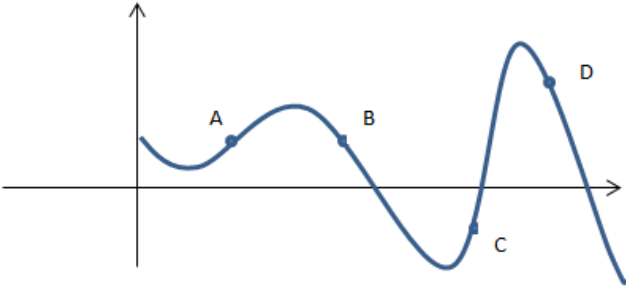


بسمه تعالی

سوالیات امتحان درس: حسابان ۲	رشته: ریاضی فیزیک	تعداد صفحه: ۲	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره متوسطه دوم	تاریخ امتحان: / /	ساعت شروع:
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد نوبت خرداد			

سؤالات پاسخ نامه دارد.

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ روی بازه $[-\infty, 3]$ اکیدا صعودی است. ب) تابع $y = x^3 + 1$ در بازه $[0, 1]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2 + 1$ قرار دارد. ج) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است. د) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه ای از این بازه است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) نمودار تابع $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ را می توان با واحد انتقال نمودار $y = x^3$ به سمت رسم کرد. ب) برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی مقدار a باید برابر با باشد. ج) دوره تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 2\sin\frac{\pi x}{4} - \sqrt{3}$ به ترتیب برابر با و است.	۱/۵
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 1 \\ x^3 - 2x & x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. $a - b$ کدام است؟ ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ب) تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ چند نقطه بحرانی دارد؟ ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)	۱
۴	نشان دهید $(2x - 1)$ یک مقسوم علیه چند جمله ای $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$ است. سپس مقسوم علیه های درجه اول دیگر $f(x)$ را بیابید	۱/۲۵
۵	معادله مثلثاتی زیر را حل کنید. $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$	۱/۲۵
۶	مجانبهای افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. $y = \frac{2x + 5}{ x - 1}$	۱

۱/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x}{3x - 1}$	۷	حاصل حدهای زیر را به دست آورید.												
۱	 <table border="1" data-bbox="480 762 1146 877"> <tr> <td>شیب</td> <td>-۲</td> <td>-۱</td> <td>۰/۵</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>نقطه</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲	نقطه					۸	با توجه به نمودار جدول را کامل کنید.		
شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲											
نقطه															
۱/۵	با استفاده از تعریف مشتق معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه $x = 3$ به دست آورید	۹													
۱/۲۵	$f(x) = \sqrt{x^3 - 5x} \sin \frac{x}{2} + \cos x$	۱۰	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)												
۰/۷۵	اگر $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ باشد آنگاه مشتق تابع $f(\tan x)$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.	۱۱													
۰/۷۵	با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر مقدار f' را برای نقاط داده شده حدس بزنید.	۱۲													
	<table border="1" data-bbox="326 1339 1222 1520"> <tr> <td>x</td> <td>۴</td> <td>۸</td> <td>۱۲</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>۱۵۰</td> <td>۱۱۰</td> <td>۹۰</td> </tr> <tr> <td>مقدار تقریبی $f'(x)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x	۴	۸	۱۲	$f(x)$	۱۵۰	۱۱۰	۹۰	مقدار تقریبی $f'(x)$					
x	۴	۸	۱۲												
$f(x)$	۱۵۰	۱۱۰	۹۰												
مقدار تقریبی $f'(x)$															
۰/۷۵	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی رو به بالا پرتاب می کنیم. اگر ارتفاع این جسم از زمین از معادله $h(t) = -3t^2 + 24t$ به دست آید، سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد با زمین را به دست آورید.	۱۳													
۱/۷۵	مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 + x + 1 $ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.	۱۴													
۱/۷۵	جهت تقعر و نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 8$ زیر را مشخص کنید.	۱۵													
۲	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2(x+3)$ را رسم کنید.	۱۶													

موفق باشید

مدت امتحان: 120 دقیقه		رشته ریاضی و فیزیک		راهنمای تصحیح امتحان درس حسابان 2	
تاریخ برگزاری امتحان:		دوره دوم متوسطه		پایه دوازدهم	
نمره	سؤالات				ردیف
1	الف) نادرست (ب) درست (ج) نادرست (د) نادرست هر مورد (0/25)				1
1/5	الف) 2، چپ (ب) صفر (ج) $4, 2-\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$ هر مورد (0/25)				2
1	الف) گزینه 3 ب) گزینه 1 هر مورد (0/5) $a=1, b=-2 \rightarrow a-b=3$ (0/5) $f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ صورت ریشه ندارد و ریشه های مخرج به دامنه تابع تعلق ندارد پس این تابع فاقد نقطه بحرانی است.				3
1/25	$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ (0/25) $f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 = 2 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 2 + 3 = 0 \rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$ (0/25) پس f بر $(2x-1)$ بخش پذیر است (0/25) $\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 4x + 2 \quad \quad 2x - 1 \\ \underline{-2x^3 + x^2} \\ -4x + 2 \\ \underline{+4x - 2} \\ \dots \end{array}$ $f(x) = (2x-1)(x^2-2) = (2x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ f : مقسوم علیه های دیگر $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (0/5)				4
1/25	$\tan x = X \quad X^2 - (1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0 \rightarrow$ (0/25) $a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} X=1 \rightarrow \tan x = 1 \rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{4} & (0/25) \\ X = \frac{c}{a} \rightarrow \tan x = \sqrt{3} \rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{3} & (0/25) \end{cases}$				5
1	$ x -1=0 \rightarrow x =1 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$ مجانبهای قائم $\rightarrow \begin{cases} x=1 & (0/25) \\ x=-1 & (0/25) \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{ x } = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \end{cases} \rightarrow$ مجانبهای افقی $\begin{cases} y=2 & (0/25) \\ y=-2 & (0/25) \end{cases}$				6

1/5	<p>الف) $\frac{[3^+]-2}{3-3^+} = \frac{3-2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (0/5)</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ x ^{-x(0.25)}}{3x(0.25)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-x}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{3x} = -\frac{2}{3}$ (0.25)</p>					7															
1	شیب	-2	-1	0/5	2	هر مورد (0/25)	8														
	نقطه	D	B	A	C																
1/5	<p>$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (0/25)</p> <p>$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} \times \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{(x-3) \times (1+1)} = \frac{1}{2}$ (0/25)</p> <p>$m = \frac{1}{2} \rightarrow x=3$ معادله خط مماس در $\begin{cases} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3) \end{cases}$ (0/25)</p> <p>$\rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (0/25)</p>					9															
1/25	<p>$f'(x) = \frac{3x^2 - 5}{2\sqrt{x^3 - 5x}} \times \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \times \sqrt{x^3 - 5x} - \sin x$ (0/5)</p>					10															
0/75	<p>$y = f(\tan x) \rightarrow y' = f'(\tan x) \times (1 + \tan^2 x) \rightarrow$ (0/25)</p> <p>$y' = \frac{1}{\tan x} \times (1 + \tan^2 x) \rightarrow y'_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2) = 2$ (0/25)</p>					11															
0/75	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>150</td> <td>110</td> <td>90</td> <td>هر مورد (0/25)</td> </tr> <tr> <td>مقدار تقریبی $f'(x)$</td> <td>$\frac{110-150}{8-4} = -\frac{40}{4} = -10$</td> <td>$\frac{90-150}{12-4} = \frac{-60}{8} = -7.5$</td> <td>$\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$</td> <td></td> </tr> </table>					x	4	8	12		f(x)	150	110	90	هر مورد (0/25)	مقدار تقریبی $f'(x)$	$\frac{110-150}{8-4} = -\frac{40}{4} = -10$	$\frac{90-150}{12-4} = \frac{-60}{8} = -7.5$	$\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$		12
x	4	8	12																		
f(x)	150	110	90	هر مورد (0/25)																	
مقدار تقریبی $f'(x)$	$\frac{110-150}{8-4} = -\frac{40}{4} = -10$	$\frac{90-150}{12-4} = \frac{-60}{8} = -7.5$	$\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$																		

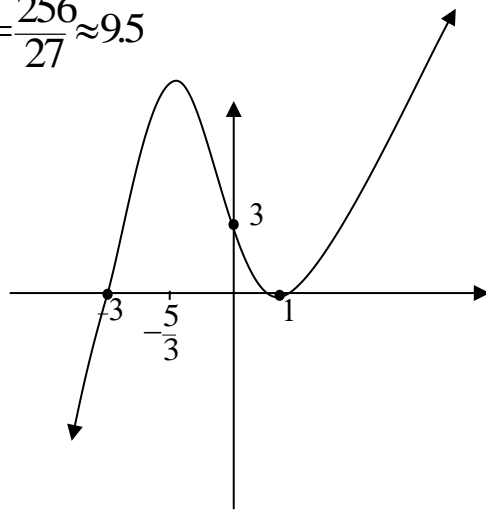
0/75	$h(t) = -6t + 24 \quad (0/25)$ $-3t^2 + 24 = 0 \rightarrow 3t(t-8) = 0 \begin{cases} t=0 \\ t=8 \end{cases}$ $h(0) = 24 \rightarrow \text{سرعت در لحظه پرتاب} \quad (0/25)$ $h(8) = -24 \rightarrow \text{سرعت در لحظه برخورد زمین} \quad (0/25)$	13																				
1/75	$ x+1 =x+1 \quad x \geq -1 \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - x - 1 & -2 \leq x < -1 \end{cases} \quad (0/25)$ $\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & -1 < x < 2 \\ 2x-1 & -2 < x < -1 \end{cases} \quad (0/25)$ <p>نقاط بحرانی: $\begin{cases} f'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} & (0/25) \\ f'(x) \text{ وجود ندارد} \rightarrow x = -1 & (0/25) \end{cases}$</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>2</td> <td>(0/25)</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>5</td> <td>1</td> <td>$\frac{3}{4}$</td> <td>7</td> <td></td> </tr> </table> <p>ماکزیمم مطلق $f(2) = 7 \quad (0/25)$</p> <p>مینیمم مطلق $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \quad (0/25)$</p>	x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	(0/25)	f(x)	5	1	$\frac{3}{4}$	7		14								
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	(0/25)																	
f(x)	5	1	$\frac{3}{4}$	7																		
1/75	$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x \quad (0/25)$ $f''(x) = 12x^2 + 12x - 72 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \quad (0/25)$ <p>طول نقاط عطف \rightarrow (0/25)</p> $\rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-3</td> <td></td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f''(x)</td> <td></td> <td>+</td> <td>o</td> <td>-</td> <td>o</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td></td> <td>∪</td> <td></td> <td>∩</td> <td></td> <td>∪</td> </tr> </table> <p>(0/75)</p>	x		-3		2		f''(x)		+	o	-	o	+	f(x)		∪		∩		∪	15
x		-3		2																		
f''(x)		+	o	-	o	+																
f(x)		∪		∩		∪																
2	$f(x) = 0 \rightarrow (x-1)^2(x+3) = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \quad D_f = R \quad (0/25)$ <p>طول نقاط برخورد با محور x ها $(1, 0), (-3, 0)$</p> <p>مختصات محل تلاقی با محور عرض ها $x=0 \rightarrow (0-1)^2(0+3) \rightarrow y=3 \rightarrow (0, 3)$</p> $f'(x) = 2(x-1)(x+3) + (x-1)^2 = 0 \quad (0/25) \rightarrow$ $(x-1)[2(x+3) + (x-1)] = 0 \quad (0/25)$	16																				

ریشه های مشتق
 «طول نقاط اکسترمم» (0/25)
 $(x-1)(3x+5)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{5}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{3}$	0	1	2	$+\infty$						
$f'(x)$		+		+	∅	-		-	∅	+		+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{9}{5}$ max	↘	3	↘	0 min	↗	5	↗	$+\infty$

جدول تغییرات (0/5)

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{64}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{256}{27} \approx 9.5$$



رسم نمودار (0/5)