



باسمه تعالی
وزارت آموزش و پرورش
اداره آموزش و پرورش ناحیه چهار تبریز
دبیرستان غیر دولتی صدرای نور

نام خانوادگی: پایه: دوازدهم ساعت شروع: ۸ صبح امتحانات نیم سال اول: ۱۴۰۱-۱۴۰۰ تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵

نام خانوادگی: شماره صندلی: مدت زمان امتحان: ۱۲۰

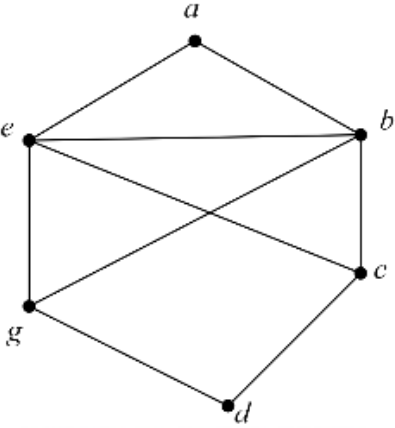
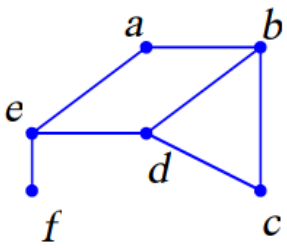
نام دبیر: نرگس اصلانی	پایه: دوازدهم	کلاس: R ۱۲	تعداد صفحه: ۵	تعداد سوال: ۱۸
-----------------------	---------------	------------	---------------	----------------

ریاضیات روح را صفا می بخشد و ذهن را برای درک حقیقت آماده می کند. افلاطون

ردیف	متن سوال	بارم							
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید .</p> <p>(الف) اگر $a \equiv b$ و $n m$ آنگاه $a \equiv b \pmod n$</p> <p>(ب) ۸۶ عضوی از $[2]_4$ است.</p> <p>(ج) از این که $a b + c$، همواره می توان نتیجه گرفت که $a b$ یا $a c$</p> <p>(د) گرافی وجود دارد که درجه رئوس آن ۲، ۲، ۳، ۴، ۵ است .</p>	۱							
۲	<p>جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید .</p> <p>(الف) P_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است.</p> <p>(ب) حاصل $[(a^y, b^z), [b^5, b^{11}]]$ برابر با است.</p> <p>(ج) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند.</p> <p>..... و $\forall m > 0$ ۲) $a c$ و $b c$ ۱)</p> <p>(د) در گراف کامل از مرتبهی ۴ تعداد دور به طول ۳ برابر است .</p>	۱							
۳	<p>برای اثبات یا رد احکام زیر از کدام روش اثبات استفاده می شود. احکام ستون سمت راست را به روش ستون سمت چپ وصل کنید.</p> <table border="1"> <tr> <td>اثبات بازگشتی</td> <td rowspan="2">الف) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگی هندسی آنها کمتر است.</td> </tr> <tr> <td>برهان خلف</td> </tr> <tr> <td>در نظر گرفتن همه حالتها</td> <td rowspan="3">ب) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</td> </tr> <tr> <td>اثبات مستقیم</td> </tr> <tr> <td>مثال نقض</td> </tr> </table>	اثبات بازگشتی	الف) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگی هندسی آنها کمتر است.	برهان خلف	در نظر گرفتن همه حالتها	ب) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	اثبات مستقیم	مثال نقض	۰/۵
اثبات بازگشتی	الف) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگی هندسی آنها کمتر است.								
برهان خلف									
در نظر گرفتن همه حالتها	ب) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.								
اثبات مستقیم									
مثال نقض									
۴	<p>به (الف) پاسخ کوتاه دهید و (ب) را تعریف کنید.</p> <p>الف) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی باشند، چه می نامیم؟</p> <p>ب) گراف همبند را تعریف کنید.</p>	۰/۵							

ردیف	صفحه دوم	بارم
۵	عدد a چقدر باشد تا عدد $\overline{713a9}$ بر ۹ بخش پذیر شود.	۰/۵
۶	فرض کنید $x \neq 0$ عددی گویا و y عددی گنگ باشد ثابت کنید xy عددی گنگ است.	۱/۲۵
۷	الف) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: $(x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y)$ (برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم) ب) ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد فرد متوالی به علاوه یک، مربع کامل است.	۱ ۱/۵
۸	الف) اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $m \leq n, a b \Rightarrow a^m b^n$ ب) $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$	۱/۷۵ ۱

بارم	صفحه سوم	ردیف
۱/۲۵	در تقسیم ۵۱۱ و ۴۷۰ بر عدد b باقیمانده‌ها به ترتیب ۱۰ و ۱۳ شدند مقدار b را بیابید.	۹
۲	<p>الف) عدد صحیح n را طوری پیدا کنید که $۲n - ۱ \mid ۳n + ۷$</p> <p>ب) . باقی مانده‌ی تقسیم $۳۸^{۳۶} + ۱۹$ را بر ۴ به دست آورید.</p>	۱۰
۱/۷۵ ۰	اگر اول آبان در یک سال روز جمعه باشد، هفتم اسفند چندشنبه است؟	۱۱
۱	رقم یکان عدد $۲^{۱۱} + ۷$ را به دست آورید.	۱۲

بارم	صفحه چهارم	ردیف
۱	<p>معادله‌ی سیاله‌ی $4x + 3y = 19$ را در نظر بگیرید. الف : نشان دهید معادله‌ی سیاله دارای جواب است. ب : جواب عمومی معادله‌ی سیاله‌ی داده شده را بیابید.</p>	۱۳
۱	<p>اگر G گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱ باشد به طوری که درجه هر رأس آن ۲ یا ۳ می باشد. این گراف چند رأس از درجه ۳ دارد؟</p>	۱۴
۱	<p>نمودار مقابل مربوط به گراف $G(V, E)$ است: الف) کدام یال‌ها را از گراف حذف کنیم تا گراف دو-منتظم حاصل شود. ب) یک مسیر $e-d$ به طول ۳ بنویسید .</p> 	۱۵
۱/۲۵	<p>شکل مقابل نمودار گراف G می باشد. الف: مرتبه و اندازه‌ی گراف G را بنویسید. ب : مجموعه‌ی $N_G(b)$ را بنویسید. ج : مجموع درجه های رأس های گراف \bar{G} را مشخص کنید.</p> 	۱۶

بارم	صفحه پنجم		ردیف
۱۷۵ ۰	<p>ثابت کنید در هر گراف ساده : الف- اگر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه راس های گراف و q اندازه گراف باشد داریم: $\sum_{i=1}^p deg(v_i) = 2q$</p>		۱۷
۱	<p>علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد، چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟</p> <p>موفق باشید.</p>		۱۸
۲۰	جمع نمرات		
نام و نام خانوادگی دبیر:	با عدد:	نمره ورقه:	
	با حروف:		



بارم	راهنمای تصحیح	ردیف
۱	(الف) درست (۰/۲۵) (ب) درست (۰/۲۵) (ج) نادرست (۰/۲۵) (د) نادرست (۰/۲۵)	۱
۱	(الف) n رأسی (۰/۲۵) (ب) b^{11} (۰/۲۵) (ج) $\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$ (۰/۲۵) (د) ۴ (۰/۲۵)	۲
۰/۵	(الف) اثبات بازگشتی (ب) مثال نقض (هر کدام ۰/۲۵)	۳
۰/۵	(الف) گراف منتظم (۰/۲۵) (ب) گرافی است که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود دارد. (۰/۲۵)	۴
۰/۵	$\overbrace{713a^9}^9 \equiv 7 + 1 + 3 + a + 9 \equiv 20 + a \equiv 2 + a \equiv 0 \pmod{5} \quad a=7$	۵
۱	به برهان خلف فرض می‌کنیم xy گویا باشد آنگاه چون $x \neq 0$ عدد گویای $\frac{1}{x}$ وجود دارد. با توجه به اینکه حاصلضرب دو عدد گویا عددی گویاست حاصل $y = \frac{1}{x} \cdot xy$ عددی گویا است که تناقض است پس xy عددی گنگ است.	۶
۱/۲۵	$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, \quad (y-1)^2 \geq 0, \quad (x-y)^2 \geq 0$	۷
۱/۲۵	اثبات به روش مستقیم است: فرض کنید $2k+1$ و $2k+3$ دو عدد فرد متوالی دلخواه باشند می‌توان نوشت: $(2k+1)(2k+3) + 1 = 4k^2 + 8k + 4 = 4(k^2 + 2k + 1) = 4(k+1)^2$ بنابراین می‌توان حکم را نتیجه گرفت.	۷
۱/۲۵	(الف) $a b \xrightarrow{b \in \pi, n-m \geq 0} a^m b^m \times b^{n-m} \rightarrow a^m b^n$ (ب) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m a-b \quad (۰/۲۵) \Rightarrow m c \times (a-b) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow m ac - bc \quad (۰/۲۵)$	۸

$$\left. \begin{aligned} 511 &= bq + 10 \\ 470 &= bq' + 13 \end{aligned} \right\} \rightarrow b(q - q') = 44 = 4 \times 11$$

با توجه به اینکه $b > 13$ پس b تنها می‌تواند مقدار ۴۴ را اختیار کند.

$$\begin{cases} 2n-1 | 3n+7 \xrightarrow{\times 2} 2n-1 | 6n+14 \\ 2n-1 | 2n-1 \xrightarrow{\times 2} 2n-1 | 6n-2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2n-1 | 17 \quad (0/25)$$

(الف)

$$\Rightarrow 2n-1 = \pm 17 \rightarrow \begin{cases} n=9 \\ n=-8 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$2n-1 = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=0 \end{cases} \quad (0/25)$$

ب) $1 \dots \equiv -1 \rightarrow (1 \dots)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \rightarrow (1 \dots)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \rightarrow r = 2$

(۱)

۰/۷۵ اگر اول آبان در یک سال روز جمعه باشد، هفتم اسفند چندشنبه است؟

جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$30 - 1 = 29 + 30 + 30 + 30 + 7 = 126 \equiv 0$$

۷ اسفند جمعه است.

۱ رقم یکان هر عدد طبیعی برابر باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است. می‌دانیم که $32 \equiv 2 \pmod{10}$ پس:
 لذا رقم یکان برابر ۵ است.

$$\begin{aligned} 25^{10} &\equiv 2 \rightarrow (25)^2 \equiv (2)^2 \rightarrow 2^{10} \equiv 4 \rightarrow 2^{10} \times 2 \equiv 4 \times 2 \rightarrow 2^{11} \equiv 8 \\ &\rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 8 + 7 \rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \xrightarrow{15 \equiv 5} 2^{11} + 7 \equiv 5 \end{aligned}$$

الف: معادله دارای جواب است. $(4,3) = 1, 1 | 19 \rightarrow$
 ب: $4x + 3y = 19 \rightarrow 4x \equiv 19, 19 \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 + 3 \rightarrow 4x \equiv 4$
 $\rightarrow x \equiv 1 \rightarrow x = 3k + 1 \quad k \in Z$
 $4x + 3y = 19 \xrightarrow{x=3k+1} 4(3k+1) + 3y = 19 \rightarrow 3y = -12k + 15 \xrightarrow{\div 3} y = -4k + 5$

۱ فرض کنیم x تعداد راس‌های از درجه ۲ و y تعداد راس‌های از درجه ۳ باشد. در اینصورت:
 $2x + 3y = 22$ و $x + y = 8 \rightarrow x = 2$ و $y = 6$
 (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

۱ الف) $eb.ec.bg$ (ب) $(0/5)$ یا $ebgd$ (۰/۵)

۱/۲۵ الف: $p=6$ و $q=7$ ب: $N_G(b) = \{a, b, c\}$ ج: $\frac{p(p-1)}{2}$ = تعداد یالهای گراف G + تعداد یال های گراف \bar{G}

۰/۷۵	هر راس دلخواه را در نظر بگیریم که توسط یالی به هم متصل شده اند، چون این یال برای هر دو راس مزبور درجه محسوب می شود، پس در نتیجه حکم برقرار است و داریم: $\sum_{i=1}^p deg(v_i) = 2q$	۱۷
۱	نوشتن علت (۰/۵)	۱۸
۲۰		