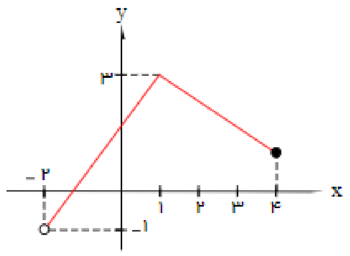
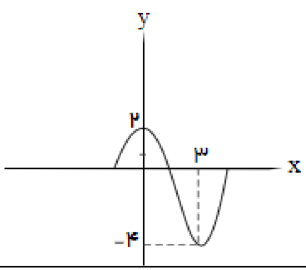
بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش منطقه ۱۸

دبیرستان نمونه دولتی فدک

امتحانات دی ماه ۱۴۰۰

| | | |
|---|---|---|
| نام: | آزمون درس: ریاضی ۳ | تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۰ |
| نام خانوادگی: | تعداد صفحه:۲ | مدت آزمون: .....۱۲۰......... دقیقه |
| کلاس: | پایه: دوازدهم رشته: تجربی | سرکارخانم : |
| نمره به عدد: | نمره به حروف: | امضای دبیر: |

| | سوالات | بارم |
|---|---|---|
| ۱ | اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به‌صورت $D_f=[-۲,۶]$ و $R_f=[۳,۱۰]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x)=۲f(x-۴)$ را بیابید. | ۱ |
| ۲ | نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است، دامنه و برد تابع $y=-۳f(۱-\frac{x}{۲})+۱$ را بیابید.   | ۱ |
| ۳ | نمودار تابع مقابل را رسم کنید. $y=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۹$ | ۱ |
| ۴ | دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $gof$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. | ۱ |
| ۵ | اگر تابع $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید. $g(x)=\sqrt{(x^۲-۸۱)f(x)}$ | ۱ |
| ۶ | ضابطهٔ تابع $y=(f^{-۱}og^{-۱})(x)$ را با فرض $(gof)(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌دست آورید. | ۱ |
| ۷ | تابع $y=x^۳$ را ابتدا نسبت به محور $y$ها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع $f$ حاصل شود، ضابطهٔ تابع وارون تابع $f$ را بیابید. | ۱ |
| ۸ | مقدار عددی عبارت $(\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲}+\cos\frac{۵\pi}{۱۲})$ را حساب کنید. | ۱ |
| ۹ | دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید. $۱)\ f(x)=۴\sin ۵x$ $۲)\ g(x)=-\frac{۳}{۲}\cos(\frac{۱}{۴}x)$ | ۱ |
| ۱۰ | اگر $\tan\alpha\leq -۱$، آنگاه حدود $\alpha$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیابید. | ۱ |
| ۱۱ | نمودار تابع $f(x)=a\cos bx+c$ بصورت زیر است، ضابطهٔ این تابع را بیابید.   | ۱ |

۱۲ معادلهٔ مثلثاتی $\cos(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید. ۱

۱۳ $m$ و $n$ را چنان بیابید که $f(x) = x^3 + mx - n$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ آن بر $x + 2$ برابر $-3$ باشد. ۱

۱۴ به سوالات زیر پاسخ دهید. ۱

الف

آ) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$

۱۵ حدهای زیر را محاسبه کنید: ۱

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^4 - 2x^2}{-x^3 + 2}$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5x^{10} - 2x + 3}}{\sqrt{x^6 + 2}}$

۱۶ حدود زیر را محاسبه کنید. ۱

الف

$\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{[\cos 4x]}{\tan x}$

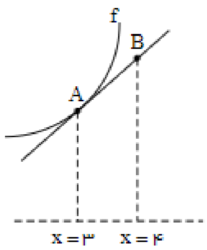
ب

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(x-6)(2x-7)(4x+1)}{17x^3 + 5}$

۱۷ نمودار تابعی مانند $f$ را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف $-2$ تعریف شده باشد. به طوری که $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$ و ۱

$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$

۱۸ در نمودار شکل مقابل اگر $f(3) = 7$، $f'(3) = 6$ باشد، مختصات نقطهٔ $B$ را بیابید. ۱




۱۹ مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -1$ به‌دست آورید. ۱

۲۰ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید. ۱

" موفق و سربلند باشید"

| | | |
|---|---|---|
| | بسمه تعالی<br>اداره آموزش و پرورش منطقه ۱۸<br>دبیرستان نمونه دولتی فدک<br>امتحانات دی ماه ۱۴۰۰ | |
| نام و نام خانوادگی: | آزمون درس: ریاضی ۳ | تاریخ آزمون: ............/........./۱۴۰۰ |
| کلاس: | پایه: دوازدهم رشته: تجربی | مدت آزمون: ..........۱۲۰.... دقیقه |
| نمره به عدد: | نمره به حروف: | امضای دبیر: |
| توضیحات دبیر: | | |

۱

$D_f=[-2,6]\Rightarrow -2\le x\le 6$

$g(x)=2f(x-4)\Rightarrow -2\le x-4\le 6\xrightarrow{+4} 2\le x\le 10\Rightarrow D_g=[2,10]$

$R_f=[3,10]\Rightarrow 3\le f(x)\le 10$

برد تابع‌های $y=f(x)$ و $y=f(x-4)$ یکسان است، پس داریم:

$3\le f(x-4)\le 10\xrightarrow{\times 2} 6\le 2f(x-4)\le 20\Rightarrow 6\le g(x)\le 20\Rightarrow R_g=[6,20]$

۲ با توجه به نمودار تابع $f$، دامنه و برد آن به‌صورت زیر است:

$D_f=(-2,4]\Rightarrow -2<x\le 4$

$y=-3f(1-\frac{x}{2})+1\Rightarrow -2<1-\frac{x}{2}\le 4\xrightarrow{-1} -3<-\frac{x}{2}\le 3$

$\xrightarrow{\times(-2)} 6>x\ge -6\Rightarrow -6\le x<6\Rightarrow D_y=[-6,6)$

$R_f=(-1,3]\Rightarrow -1<f(x)\le 3$

برد توابع $y=f(x)$ و $y=f(1-\dfrac{x}{2})$ یکسان است، پس داریم:

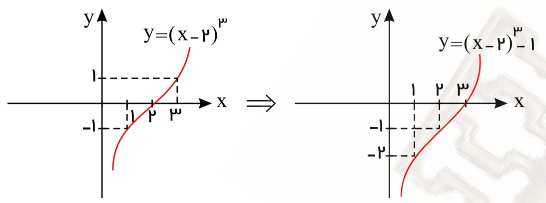
$-1<f(1-\dfrac{x}{2})\le 3\xrightarrow{\times(-3)} 3>-3f(1-\dfrac{x}{2})\ge -9\xrightarrow{+1} 4>-3f(1-\dfrac{x}{2})+1\ge -8$

$\Rightarrow -8\le y<4\Rightarrow R_y=[-8,4)$

۳ با تشکیل اتحاد مکعب دوجمله‌ای یعنی $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ داریم:

$y=x^3-6x^2+12x-9=x^3-6x^2+12x-8-1=(x-2)^3-1$

برای رسم $y=(x-2)^3-1$ باید $y=x^3$ را دو واحد به راست و سپس یک واحد به پایین منتقل کنیم.




۴

$f(x)=\sqrt{x-4}\rightarrow D_f: x-4\ge 0\rightarrow x\ge 4$

$g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{x\ge 4\ ,\ \sqrt{x-4}\ne \pm 1\}=\{x\ge 4\ ,\ x\ne 5\}=[4,5)\cup(5,+\infty)$

۵

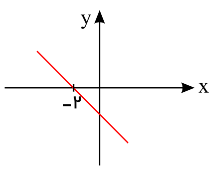
$g(x)=\sqrt{(x^2-81)f(x)}\Rightarrow (x^2-81)f(x)\ge 0$

چون $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2)=0$ است، داریم:

برای $x<-2$ تابع $f$ مثبت است. $x<-2\Rightarrow f(x)>f(-2)\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow$

برای $x>-2$ تابع $f$ منفی است. $x>-2\Rightarrow f(x)<f(-2)\Rightarrow f(x)<0\Rightarrow$

نمودار $f$ تقریباً به‌صورت مقابل است.




$x^2-81=0\Rightarrow x=\pm 9$

| $x$ | | $-9$ | | $-2$ | | $9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-81$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $(x^2-81)f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$\Rightarrow x \leq -9$ یا $-2 \leq x \leq 9 \;\Rightarrow\; D_g = (-\infty,-9] \cup [-2,9]$

**۶** ضابطهٔ تابع $y=(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)$ مدنظر بوده و با فرض $h(x)=(gof)(x)=\sqrt[3]{x}$، ضابطهٔ $y=h^{-1}(x)$ هدف مسأله می‌باشد. برای دست‌یابی به معکوس $h(x)$ کافی است از رابطهٔ $y=\sqrt[3]{x}$، $x$ را برحسب $y$ بیابیم:

$$y=\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم.}} y^3=x \to y=h^{-1}(x)=x^3$$

**۷**

$$y=x^3 \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y=(-x)^3=-x^3 \xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد چپ}} y=-(x+2)^3$$

$$\xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}} y=f(x)=-(x+2)^3+5 \Rightarrow (x+2)^3=5-y$$

$$\Rightarrow x+2=\sqrt[3]{5-y} \Rightarrow x+2=-\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x=-2-\sqrt[3]{y-5}$$

$$\Rightarrow y=f^{-1}(x)=-2-\sqrt[3]{x-5}$$

**۸**

$$A=(\frac{1}{2}-\sin\frac{\pi}{12})(\frac{1}{2}+\cos\frac{5\pi}{12})$$

می‌دانیم: $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{6\pi}{12}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12} \Rightarrow A=(\frac{1}{2}-\sin\frac{\pi}{12})(\frac{1}{2}+\sin\frac{\pi}{12}) \Rightarrow A=\frac{1}{4}-\sin^2\frac{\pi}{12} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$A=\frac{-1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

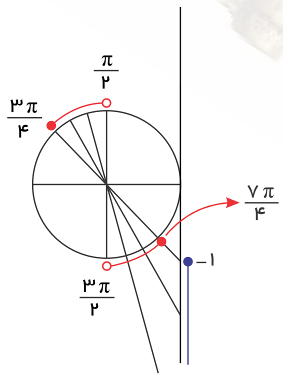
**۹** دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin bx$ و $y=a\cos bx$ برابر با $T=\frac{2\pi}{|b|}$ و ماکزیمم آن‌ها $|a|$ و مینیمم آن‌ها $-|a|$ است.

$$1)\ f(x)=4\sin 5x \to T=\frac{2\pi}{5}\ ,\ max=4\ ,\ min=-4$$

$$2)\ g(x)=-\frac{3}{2}\cos(\frac{1}{4}x) \to T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi\ ,\ max=|-\frac{3}{2}|=\frac{3}{2}\ ,\ min=-|-\frac{3}{2}|=-\frac{3}{2}$$

**۱۰** در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی $-1$ است.

$$\tan\alpha \leq -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\alpha\leq\frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{3\pi}{2}<\alpha\leq\frac{7\pi}{4}$$




**۱۱** تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است.

$$\frac{T}{2}=3 \Rightarrow T=6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=6 \Rightarrow |b|=\frac{\pi}{3} \xrightarrow{b>0} b=\frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} max\ f=|a|+c=2 \\ min\ f=-|a|+c=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c=-2 \Rightarrow c=-1 \to |a|=3 \xrightarrow{a>0} a=3$$

$$f(x)=3\cos(\frac{\pi}{3}x)-1$$

**۱۲**

$$\cos x(2\cos x-9)=5 \to 2\cos^2 x-9\cos x-5=0 \xrightarrow{\cos x=A} 2A^2-9A-5=0 \to \Delta=b^2-4ac=81+40=121$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۹+۱۱}{۴}=۵\rightarrow \cos x=۵ \ \text{(امکان ندارد)} \\ A=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۹-۱۱}{۴}=-\dfrac{۱}{۲}\rightarrow \cos x=-\dfrac{۱}{۲}=\cos(\pi-\dfrac{\pi}{۳})=\cos\dfrac{۲\pi}{۳}\xrightarrow{\cos x=\cos\alpha\rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha} x=۲k\pi\pm\dfrac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۳

$f(x)=x^۳+mx-n$

$x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=f(۱)=۰\Rightarrow ۱+m-n=۰\Rightarrow m-n=-۱$

$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=f(-۲)=-۳$

$\Rightarrow -۸-۲m-n=-۳\Rightarrow ۲m+n=-۵$

$$\begin{cases} m-n=-۱ \\ ۲m+n=-۵ \end{cases}$$

$۳m=-۶\Rightarrow m=-۲\Rightarrow -۲-n=-۱\Rightarrow n=-۱$

۱۴

**الف**

آ) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{[x]}{\sin x}=\dfrac{-۱}{۰^-}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}=\dfrac{۰}{۰}\rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}\times\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x^۲-x)}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\dfrac{۱}{(۳)(۲)}=\dfrac{۱}{۶}$

۱۵

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{۴x^۴-۲x^۲}{-x^۳+۲}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{۴x^۴}{-x^۳}=\lim\limits_{x\to -\infty}(-۴x)=-۴(-\infty)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{۵x^{۱۰}-۲x+۳}}{\sqrt{x^۶+۲}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{۵x^{۱۰}}}{\sqrt{x^۶}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{۵x^۲}=\sqrt{۵}(+\infty)=+\infty$

۱۶

**الف**

$\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{[\cos ۴x]}{\tan x}=\dfrac{[۱^-]}{۰^+}=\dfrac{۰}{۰^+}=۰$

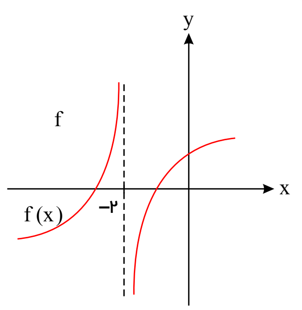
دقت کنید $\cos ۴\pi=۱$ است و در مسائل حدی هرکجا سینوس و کسینوس یک شوند منظور $۱^-$ است و $\tan\pi=۰$ است و $\pi^+$ در ناحیهٔ سوم است و در این ناحیه، تانژانت مثبت است یعنی $\tan\pi^+=۰^+$ است.

**ب**

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{(x-۶)(۲x-۷)(۴x+۱)}{۱۷x^۳+۵}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=}\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{(x)(۲x)(۴x)}{۱۷x^۳}=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{۸x^۳}{۱۷x^۳}=\dfrac{۸}{۱۷}$

۱۷

برای مثال تابعی مانند $f$ مطابق شکل روبرو را در نظر بگیرید.




چون همسایگی محذوف $-۲$ تعریف شده است پس تابع در نقطهٔ $x=-۲$ تعریف نشده است و داریم:

$\lim\limits_{x\to(-۲)^-}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}f(x)=-\infty$

۱۸

$m_{AB}=۶\rightarrow\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=۶\rightarrow\dfrac{۷-y_B}{۳-۴}=۶\rightarrow ۷-y_B=-۶\rightarrow y_B=۱۳\rightarrow B\begin{vmatrix}۴\\۱۳\end{vmatrix}$

۱۹

۲۰

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲-f(-۱)}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲+۳}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳+۱}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x+۱}=۱+۱+۱=۳$$

$$۱)\ x=۲\to y=۱۲-۴+۱=۹\to \left|\begin{matrix}۲\\۹\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ m_{\text{مماس}}=f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x+۱-f(۲)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x-۸}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow[x-۲\ \text{یعنی}]{\text{تقسیم بر عامل ابهام}}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲}=۶+۴=۱۰$$

$$۳)\ y-y_۱=m(x-x_۱)\to y-۹=۱۰(x-۲)\to y=۱۰x-۱۱$$