

به نام یکتای آرام بخش

نام و نام خانوادگی:	نام درس: ریاضی 3	رشته تحصیلی: تجربی	تاریخ: .../3/98
ساعت: 8 صبح	نوبت: خرداد	مدت امتحان: 120 دقیقه	طراح:

استفاده از ماشین حساب در حد چهار عمل اصلی بلا مانع است (16 سول در 2 صفحه تنظیم شده)

ردیف	سوالات	بارم
1-	گزینه درست را انتخاب نمایید. اگر $f(x) = -x^3 + 2x^2$ ، مقدار $f''(-1)$ عبارتست از (-2 یا 10) اگر صفحه p در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل (سهمی یا هذلولی) است.	0/5
2-	هر یک از جمله های زیر را با عبارت مناسب طوری کامل نمایید که یک گزاره صحیح حاصل شود. مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$ عبارتست از از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول ضلع قائمه آن ، یک حاصل می شود. در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$ داریم $f''(1) = -2$ ، مقدار a عبارتست از.....	1/5
3-	اگر $f(x) = x^2 - 1$ ، $-2 \leq x \leq 2$ ، دامنه و برد تابع $ f(x - 2) $ را بدست آورید.	1
4-	اگر f^{-1} وارون تابع خطی f باشد و داشته باشیم $f(1) = 2$ و $f^{-1}(2) = 3$ ، ضابطه f^{-1} را بنویسید.	1
5-	اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، مقدار $\tan 2x$ را بدست آورید.	1
6-	با استفاده از رسم نمودار تعیین کنید معادله $2 \cos x - 1 = 0$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ چند جواب دارد.	1
7-	حاصل حدود زیر را بدست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{ 3x + 1 }$	1/5
8-	معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ را در نقطه ای به طول 1 واقع بر منحنی بدست آورید.	1
9-	تابع $f(x) = [x]$ را در نظر بگیرید، ابتدا دامنه تابع مشتق f را مشخص نموده و سپس نمودار f' را در بازه $[-2, 1.5]$ رسم کنید.	1
10-	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (محاسبه لازم نیست) الف) $f(x) = \frac{(2x - 5)^3}{3x + 1}$ ب) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt[3]{x - 1}$	1/75

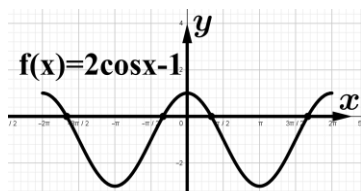
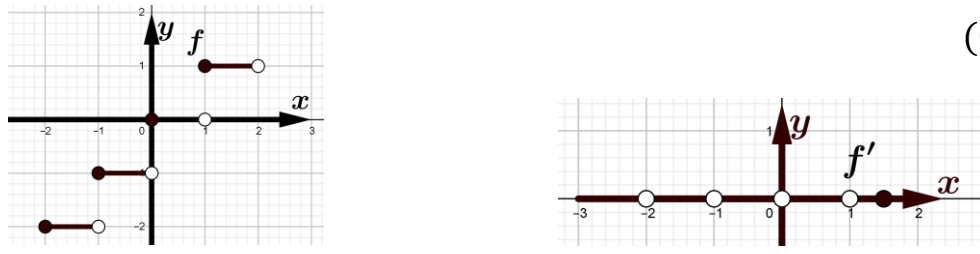
1	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. جرم این توده باکتری در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ به طور متوسط چند گرم افزایش می یابد؟	-11
1/5	مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $y = -x^3 + 9x - 13$ را در بازه $[-1, 2]$ در صورت وجود بدست آورید.	-12
1/25	فردی درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله مستقیمش با نقطه مقصد یعنی نقطه B، 10 کیلومتر است. اگر قایق به طور عمودی به طرف ساحل حرکت کند به نقطه A می رسد که فاصله اش از مقصد 8 کیلومتر است. فرض کنید سرعت حرکت قایق $4 \frac{km}{h}$ و سرعت پیاده روی فرد $3 \frac{km}{h}$ باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شود و به سوی B پیاده روی کند؟	-13
1/5	معادله دایره ای به مرکز $(-1, 1)$ را بنویسید که با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ مماس درون باشد.	-14
1/5	در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ 6 و قطر کوچک 4 واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه $(5, 4)$ باشد، ابتدا فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید و سپس مختصات کانون های بیضی را بنویسید.	-15
2	دو کیسه یکسان داریم، کیسه اول شامل 4 مهره سفید و 6 مهره سیاه است و کیسه دوم شامل 5 مهره سفید و 7 مهره سیاه است از کیسه اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در کیسه دوم قرار می دهیم سپس یک مهره از کیسه دوم انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این مهره سفید است؟	-16

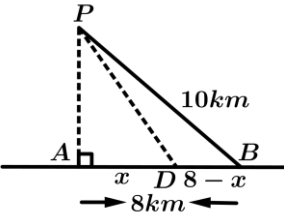
ریاضی زلف پریشان عالم است

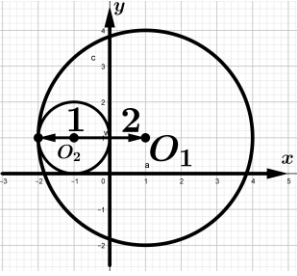
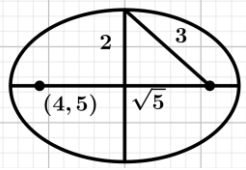
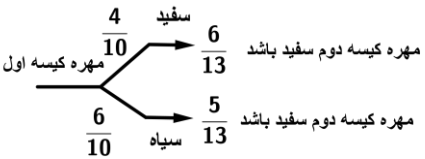
به نام یکتای آرام بخش

پاسخنامه آزمون

بارم	پاسخنامه سوالات	ردیف
0/5	$f(x) = -x^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = -6x + 4 \Rightarrow$ $f''(-1) = 10$ سهمی هر مورد 0.25	-1
1/5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$ مخروط $f(x) = x^3 + ax^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow$ $6 + 2a = -2 \Rightarrow a = -4$ هر مورد 0.5 نمره	-2
1	$D_f = [-2, 2] \Rightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_{ f(x-2) } = [0, 4]$ $R_f = [-1, 3] \Rightarrow R_{ f(x-2) } = [0, 3]$ با رسم شکل نیز می توان دامنه و برد تابع $ f(x-2) $ را بدست آورد تعیین دامنه و برد هر کدام 0.5 نمره	-3
1	می دانیم وارون یک تابع خطی، خطی است (0.25). از آنجا که $(2, 3) \in f^{-1}(0.25)$ و $(1, 2) \in f \Rightarrow (2, 1) \in f^{-1}(0.25)$ بنابراین ضابطه f^{-1} عبارتست از خط قائم $x = 2$ (0.25)	-4
1	$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$ (0.5) $\tan^2 2x = \frac{1}{\cos^2 2x} - 1 = \frac{625}{49} - 1 = \frac{576}{49} \Rightarrow \tan 2x = \frac{24}{7}$ (0.5) توجه کنید $\sin x = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan 2x > 0$ استفاده از فرمول های صحیح دیگر نیز قابل قبول است.	-5

1	 <p>ملاحظه می شود که معادله 4 جواب دارد که در شکل مشخص شده.</p> <p>رسم شکل 0.5</p>	-6
1/5	<p>الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}} \times \frac{x - \sqrt{2x + 3}}{x - \sqrt{2x + 3}} \quad (0.25) =$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2 - 2x - 3} \times (x - \sqrt{2x + 3}) \quad (0.25)$</p> <p>$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} \times (-2) \quad (0.25) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)}{(x - 3)} \times (-2)$</p> <p>$= \frac{-2}{-4} \times (-2) = -1 \quad (0.25)$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{ 3x + 1 } = \frac{-1 \quad (0.25)}{0^+} = -\infty \quad (0.25)$</p>	-7
1	<p>$f(1) = -1^3 + 2 - 1 = 0 \quad (0.25)$</p> <p>$f'(x) = -3x^2 + 2 \quad (0.25) \Rightarrow m_{\text{مماس}} = f'(1) = -3 + 2 = -1 \quad (0.25)$</p> <p>$y = -1(x - 1) = -x + 1 \quad (0.25)$ معادله مماس</p>	-8
1	<p>از آنجا که تابع f در نقاط صحیح ناپیوسته است بنابراین در این نقاط مشتق پذیر نیست ولی در سایر نقاط مشتق پذیر است و مشتق آن برابر صفر است پس دامنه تابع مشتق آن عبارتست از مجموعه $\mathcal{R} - \mathcal{Z}$.</p> <p>(0.5)</p> <p>رسم شکل (0.5)</p> 	-9
1/75	<p>الف) $f'(x) = \frac{((2x - 5)^3)'(3x + 1) - ((2x - 5)^3)(3x + 1)'}{(3x + 1)^2}$</p> <p>$= \frac{\overbrace{3 \times 2(2x - 5)^2}^{0.25} (3x + 1) - \overbrace{(2x - 5)^3 \times 3}^{0.25}}{\overbrace{(3x + 1)^2}^{0.25}}$</p>	-10

	$f'(x) = (x^2 - 1)' \sqrt[3]{x-1} + (x^2 - 1) (\sqrt[3]{x-1})'$ $= \overbrace{2x}^{0.25} \overbrace{\sqrt[3]{x-1}}^{0.25} + (x^2 - 1) \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x-1)^2}}$																
1	$\frac{m(4) - m(0)}{4 - 0} (0.25) = \frac{\sqrt{4} + 2 \times 4^3}{4} (0.25) = \frac{2 + 128}{4} (0.25)$ $= 32.5 \text{ g}(0.25)$	-11															
1/5	$y' = -3x^2 + 9 (0.25) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} (0.25)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\sqrt{3}$</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">$\sqrt{3}$</td> <td style="padding: 5px;">2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y'</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$+$</td> <td style="padding: 5px;">$+$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td></td> <td style="text-align: center;">↗</td> <td style="text-align: center;">↗</td> <td style="text-align: center;">↘</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">در y' بازه مورد نظر در $\sqrt{3}$ تغییر علامت داده، پس این نقطه، ماکزیمم نسبی است (0/25) حال مقدار y را در نقاط اکسترمم و ابتدا و انتهای بازه حساب می کنیم</p> $y(-1) = -20 \Rightarrow \text{مینیمم مطلق} (0.25)$ $y(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 13 (0.25)$ $y(2) = -3 \Rightarrow \text{ماکزیمم مطلق} (0.25)$	x	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	2	y'	0	$+$	$+$	0	y		↗	↗	↘	-12
x	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	2													
y'	0	$+$	$+$	0													
y		↗	↗	↘													
1/25	<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> $AP^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow AP = 6 (0.25)$ $t(x) = \frac{PD}{4} + \frac{DB}{2} \Rightarrow t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{4} + \frac{8-x}{2} (0.25)$ $t'(x) = \frac{2x}{8\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{2} = 0 (0.25) \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 36} = x$ $\Rightarrow 4x^2 + 144 = x^2 \Rightarrow x^2 = 48 \Rightarrow x = 4\sqrt{3} (0.25)$ </div> </div> <p style="text-align: center;">و با توجه به جدول تغییرات، کوتاهترین زمان به ازای $x = 4\sqrt{3}$ بدست می آید</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$4\sqrt{3}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$t'(x)$</td> <td style="padding: 5px;">$-$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$t(x)$</td> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">↗</td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">رسم جدول (0.25)</p>	x	0	$4\sqrt{3}$	$t'(x)$	$-$	0	$t(x)$	↘	↗	-13						
x	0	$4\sqrt{3}$															
$t'(x)$	$-$	0															
$t(x)$	↘	↗															

1/5	$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9 \Rightarrow O_1$ $= (1, 1) \text{ (0.25) } , r_1 = 3 \text{ (0.25)}$ $d = r_1 - r_2 \text{ (0.25) } \Rightarrow \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - 1)^2} = 3 - r_2 \Rightarrow 2 = 3 - r_2$ $\Rightarrow r_2 = 1 \text{ (0.25) } \Rightarrow$ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ (0.5) } \quad \text{معادله دایره مورد نظر}$ 	-14
1/5	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + c^2 \text{ (0.5) } \Rightarrow c = \sqrt{5} \text{ (0.25) } \Rightarrow 2c$ $= \sqrt{10} \text{ (0.25) } \quad \text{فاصله کانونی}$ <p>مختصات کانون های بیضی: $(4 + \sqrt{5}, 5)$ و $(4 - \sqrt{5}, 5)$ مختصات هر کانون (0.25)</p> 	-15
2	 $P(W) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{24}{130} + \frac{30}{130} = \frac{54}{130} = \frac{27}{65}$	-16

قابل توجه مصحح گرامی: هر راه حل صحیح قابل قبول می باشد.

با آرزوی موفقیت برای شما عزیزان