

بسمه تعالی

تاریخ تحویل: ۹۷/۰۷/۱۷	پایه: دوازدهم	آزمون شماره ۱: ریاضیات گسسته
نمره ورقه:	دبیرستان استاد شهریار	نام و نام خانوادگی:
نمره	سوالات	ردیف

۱	ثابت کنید مجموع هر سه عدد فرد عددی فرد است.	۱
۱	ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد گویا عددی گویا ست.	۲
۱.۵	ثابت کنید اگر a مضرب ۳ نباشد آن گاه $a^2 - 1$ مضرب ۳ است.	۳
۱.۵	ثابت کنید اگر به حاصل ضرب دو عدد طبیعی فرد متوالی یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل است.	۴
۲	ثابت کنید اگر p یک عدد اول و $p > 3$ باشد آن گاه می توان آن را به صورت $p = 6p + 1$ یا $p = 6p + 5$ نوشت. (به روش با در نظر گرفتن تمامی حالات)	۵
۱	ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد به صورت $5 + 6k$ به صورت $6q + 1$ است.	۶
۲	ثابت کنید اگر به حاصل ضرب ۴ عدد صحیح متوالی یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل است.	۷
۳	برای هر یک از گزاره های زیر مثال نقض بیاورید. (i) برای هر عدد طبیعی n آن گاه $3^n + 2$ عددی اول است. (ii) اگر a و b و c اعداد طبیعی باشند، آن گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است. (iii) فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند به گونه ای که $\cos x = \cos y$ ، آیا $\cot x = \cot y$ درست است؟ (iv) برای هر دو عدد حقیقی مثبت: $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ (v) اگر برای هر سه مجموعه A, B و C داشته باشیم $A \cap B = A \cap C$ آن گاه $B = C$. (vi) اگر x عددی گنگ باشد، آن گاه $x^3 + 3x^2 + 3x$ نیز عددی گنگ است.	۸
۱	ثابت کنید اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a + b$ عددی فرد باشد، آن گاه ab عددی زوج است.	۹
۱	ثابت کنید اگر n عددی صحیح باشد، آن گاه $n^2 + 3n$ عددی زوج است.	۱۰
۱	برای این که ثابت کنیم $n^2 + 5n - 3$ به ازای هر عدد طبیعی n ، عددی فردی است یک بار n را زوج و بار دیگر فرد، فرض می کنیم. در این صورت از کدام هم ارزی استفاده کرده ایم؟ (۱) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ (۲) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ (۳) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ (۴) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	۱۱
۱	اگر $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $n^2 + 1$ عددی اول باشد، آن گاه $n \in \{1, 2, 4\}$	۱۲
۲	به ازای چند عدد طبیعی $1 \leq n \leq 20$ عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است؟	۱۳
۱	ثابت کنید اگر x و y عددهایی گویا و ناصفر باشند، آن گاه $x\sqrt{2} + y$ عددی گنگ است.	۱۴
۲۰	موفق و سربلند باشید. شهرباف	جمع

تاریخ تحویل: ۹۷/۰۷/۱۷	پایه: دوازدهم	آزمون شماره ۱: ریاضیات گسسته
نمره ورقه:	دبیرستان استاد شهریار	نام و نام خانوادگی:
نمره	سوالات	

۱	ثابت کنید مجموع هر سه عدد فرد عددی فرد است. جواب: $\left. \begin{aligned} x &= 2k - 1 \\ y &= 2q - 1 \\ z &= 2m - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + y + z = 2k + 2q + 2m - 2 - 1 = 2(k + q + m - 1) - 1 = 2t - 1 = \text{فرد}$	۱
۱	ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد گویا عددی گویا است. $\left. \begin{aligned} \text{جواب: } x &= \frac{a}{b} \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \\ y &= \frac{c}{d} \quad c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$	۲
۱.۵	ثابت کنید اگر a مضرب ۳ نباشد آن گاه $a^2 - 1$ مضرب ۳ است. جواب: $a \text{ مضرب } 3 \text{ نباشد} \Rightarrow \begin{cases} a = 3k + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k) = 3m \\ a = 3k + 2 \Rightarrow a^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1) = 3p \end{cases}$	۳
۱.۵	ثابت کنید اگر به حاصل ضرب دو عدد طبیعی فرد متوالی یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل است. $\left. \begin{aligned} \text{جواب: } x &= 2k - 1 \\ y &= 2k + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy = (2k - 1)(2k + 1) \Rightarrow xy + 1 = 4k^2 = (2k)^2 = \text{مربع کامل}$	۴
۲	ثابت کنید اگر p یک عدد اول و $p > 3$ باشد آن گاه می توان آن را به صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشت. (به روش با در نظر گرفتن تمامی حالات) جواب: اعداد صحیح به یکی از شکل های $6k + 1$ یا $6k + 2$ یا $6k + 3$ یا $6k + 4$ یا $6k + 5$ یا $6k + 6$ می باشند که از بین آن ها $6k$ مضرب ۶ و $6k + 2$ مضرب ۲ و $6k + 3$ مضرب ۳ می باشند، که اول نیستند پس هر عدد اول به شکل $p = 6k + 1$ هستند یا به فرم $p = 6k + 5$.	۵
۱	ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد به صورت $6k + 5$ به صورت $6q + 1$ است. $\left. \begin{aligned} \text{جواب: } x &= 6k + 5 \\ y &= 6m + 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy = 36km + 30k + 30m + 24 + 1 = 6(6km + 5k + 5m + 4) + 1$ $xy = 6q + 1$	۶
۲	ثابت کنید اگر به حاصل ضرب ۴ عدد صحیح متوالی یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل است. $k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 = (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1 = A(A+2) + 1 = A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2 = (k^2 + 3k + 1)^2 = \text{مربع کامل}$	۷
۳	برای هر یک از گزاره های زیر مثال نقض بیاورید. (i) برای هر عدد طبیعی n آن گاه $3^n + 2$ عددی اول است. جواب: $n = 5 \Rightarrow 3^5 + 2 = 245 \notin P$ مثال نقض	۸

	<p>(ii) اگر a و b و c اعداد طبیعی باشند، آن گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.</p> <p>جواب: $a = 2, b = 3, c = 8 \Rightarrow b\sqrt{ac} = 3\sqrt{16} = 12 \in \mathbb{Q}$ مثال نقض</p> <p>(iii) فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند به گونه ای که $\cos x = \cos y$، آیا $\cot x = \cot y$ درست است؟ جواب: $\cot \frac{f}{4} = 1 \neq \cot(-\frac{f}{4}) = -1$ ولی $\cos \frac{f}{4} = \cos(-\frac{f}{4})$ و $x = \frac{f}{4}, y = -\frac{f}{4} \Rightarrow \cot \frac{f}{4} = 1 \neq \cot(-\frac{f}{4}) = -1$</p> <p>(iv) برای هر دو عدد حقیقی مثبت: $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$</p> <p>جواب: $x = 9, y = 1 \Rightarrow \sqrt{9-1} \neq \sqrt{9} - \sqrt{1} \Rightarrow 2\sqrt{2} \neq 2$ مثال نقض</p> <p>(v) اگر برای هر سه مجموعه A, B و C داشته باشیم $A \cap B = A \cap C$ آن گاه $B = C$.</p> <p>جواب: $B \neq C$ ولی $A \cap B = A \cap C \Rightarrow \left. \begin{matrix} A \cap B = \{2\} \\ A \cap C = \{2\} \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \cap B = A \cap C$ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 5\}, C = \{2, 7\}$</p> <p>(vi) اگر x عددی گنگ باشد، آن گاه $x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ نیز عددی گنگ است. جواب: اگر $x = \sqrt[3]{2} - 1$ آن گاه $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = (x+1)^3 - 1 = (\sqrt[3]{2} - 1 + 1)^3 - 1 = 2 - 1 = 1 \in \mathbb{Q}$</p>	
۹	<p>ثابت کنید اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a+b$ عددی فرد باشد، آن گاه ab عددی زوج است.</p> <p>زوج $ab = 2km - 2k = 2(2km - k) = 2q$ $\left. \begin{matrix} a = 2k \\ b = 2m - 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a+b = \text{فرد}$</p>	۱
۱۰	<p>ثابت کنید اگر n عددی صحیح باشد، آن گاه $n^2 + 3n$ عددی زوج است. جواب:</p> <p>$n^2 + 3n = 2k^2 + 6k = 2(2k^2 + 3k) = 2q$ $\left. \begin{matrix} n = 2k \\ n = 2k - 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} n^2 + 3n = 2k^2 + 6k \\ n^2 + 3n = 2k^2 - 4k + 1 + 6k - 3 = 2(2k^2 + k - 1) = 2p \end{matrix} \right.$</p>	۱
۱۱	<p>برای این که ثابت کنیم $n^2 + 5n - 3$ به ازای هر عدد طبیعی n، عددی فردی است یک بار n را زوج و بار دیگر فرد، فرض می کنیم. در این صورت از کدام هم ارزی استفاده کرده ایم؟</p> <p>(۱) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ (۲) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ (۳) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ (۴) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$</p> <p>جواب: اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^2 + 5n - 3$ را با r نشان دهیم حکم را می توان به صورت $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد و داریم:</p> <p>$(p \vee q \Rightarrow r) \equiv r \vee \sim (p \vee q) \equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$</p>	۱
۱۲	<p>اگر $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $n + 1$ عددی اول باشد، آن گاه $n \in \{1, 2, 4\}$.</p> <p>جواب: $\left. \begin{matrix} n = 1 \Rightarrow n^2 + 1 = 2 \in P \\ n = 2 \Rightarrow n^2 + 1 = 5 \in P \\ n = 3 \Rightarrow n^2 + 1 = 10 \notin P \\ n = 4 \Rightarrow n^2 + 1 = 17 \in P \end{matrix} \right\} \Rightarrow n \in \{1, 2, 4\}$</p>	۱
۱۳	<p>به ازای چند عدد طبیعی $1 \leq n \leq 20$ عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است؟</p> <p>جواب:</p>	۲

	$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \text{زوج} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \text{زوج} \Rightarrow n(n+1) = 4k \Rightarrow$ $n = 4k \quad \text{یا} \quad n+1 = 4k$ <p>اگر $n = 4k$ داریم: $1 \leq 4k \leq 20 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq 5 \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow n = 4, 8, 12, 16, 20$</p> <p>اگر $n = 4k - 1$ داریم: $1 \leq 4k - 1 \leq 20 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{21}{4} \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow n = 3, 7, 11, 15, 19$</p> <p>روش تستی: اگر تعداد اعداد طبیعی که عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج می کند را m فرض کنیم داریم:</p> <p>اگر $m = \left[\frac{b}{a}\right]$ عددی زوج باشد و $m = \left[\frac{b}{a}\right] + 1$ اگر $\left[\frac{b}{a}\right]$ عددی فرد باشد.</p>	
۱	<p>ثابت کنید اگر x و y عددهایی گویا و ناصفر باشند، آن گاه $x\sqrt{2} + y$ عددی گنگ است.</p> <p>فرض خلف: فرض کنیم $T = x\sqrt{2} + y$ گویا باشد داریم:</p> $\left. \begin{array}{l} T \in Q \\ y \in Q \end{array} \right\} \Rightarrow T - y \in Q \Rightarrow x\sqrt{2} + y - y \in Q \Rightarrow x\sqrt{2} \in Q, x \neq 0$ $\left. \begin{array}{l} x\sqrt{2} \in Q \\ x \in Q \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{x} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$ <p>می دانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است و این یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.</p>	۱۴
۲۰	جمع	موفق و سربلند باشید. شعر باف