درس اول

ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

آشنایی با ماتریس

۱- ماتریس $A=[i^2+j]_{2\times 3}$ که در آن i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون می‌باشد مفروض است. مجموع درایه‌های A کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۲- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases} i^2+1 & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+2 & i<j \end{cases}$، مجموع درایه‌های سطر دوم، چند واحد از مجموع درایه‌های ستون سوم کم‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با $a_{ij}=i^j-2$ که در آن i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است، حاصل $a_{12}-a_{31}+a_{22}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴- اگر $A=[i-j]_{2\times 3}$، $B=[i\times j]_{1\times 3}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۵- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -2 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ و $3A+B$ ماتریس همانی باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A-B$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۶- ماتریس $A=\begin{bmatrix} -2b & 2c+a \\ 3a+b & 10 \end{bmatrix}$ با ماتریس $B=[i^2+3j]$ که در آن i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون می‌باشد، برابر است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -1 ۴) ۵

۷- اگر $A=[i^2-2j]_{3\times 3}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، اثر ماتریس $3A-2I$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -3

۸- اگر i شمارهٔ سطر، j شمارهٔ ستون، $A=[3i-2j]_{2\times 3}$ و $B=[i^2-2j]_{2\times 3}$ باشند، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $2A+3B$ چند واحد از درایهٔ سطر اول و ستون دوم آن بزرگ‌تر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

۹- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $3A-2B+4C$ کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۶۲ ۴) ۵۸

۱۰- اگر i شمارهٔ سطر، j شمارهٔ ستون، $A=[2i+j]_{2\times3}$ ، $B=[i-3j]_{2\times3}$ و $2A-4B=[ai+bj]_{2\times3}$ باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۱- اگر $2A+\begin{bmatrix}1&2\\2&m\end{bmatrix}=3I+\begin{bmatrix}0&0\\0&-9\end{bmatrix}$ و اثر ماتریس A برابر ۴- باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{9}{2}$

۱۲- اگر ماتریس‌های A و B در تساوی‌های $B-2A=\begin{bmatrix}-6&-14\\7&1\end{bmatrix}$ و $5A+B=I$ صدق کنند، ماتریس $3A+B$ شامل کدام درایه نیست؟

۱) ۱- ۲) ۳ ۳) ۴- ۴) ۲

ضرب ماتریس‌ها

۱۳- اگر $A=[a_{ij}]_{2\times3}$ ، $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ و $C=[c_{ij}]_{2\times2}$ باشند، کدام ماتریس قابل تعریف است؟

۱) ABC ۲) CAB ۳) BCA ۴) BAC

۱۴- اگر ماتریس $A(B-C)$ تعریف‌شده باشد، کدام ماتریس، همواره تعریف‌شده است؟

۱) BC ۲) $A+B$ ۳) CA ۴) AC

۱۵- اگر دو ماتریس AC و $A+B$ تعریف‌شده باشند، کدام ماتریس، همواره تعریف می‌شود؟

۱) AB ۲) $B+C$ ۳) CB ۴) BC

۱۶- اگر $A=[i-j^2]_{2\times2}$ ، $B=[2i+j]_{2\times3}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس AB کدام است؟

۱) درایهٔ سطر اول و ستون سوم ۲) درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ۳) درایهٔ سطر اول و ستون دوم ۴) درایهٔ سطر دوم و ستون اول

۱۷- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ با $a_{ij}=\begin{cases}i^2-1 & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times3}$ با $b_{ij}=\begin{cases}i^2+1 & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+2 & i<j\end{cases}$ دو ماتریس باشند، مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix}2&x&-1\\x&3&x+2\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}4&1\\-3&0\\x&x^2\end{bmatrix}$ و درایهٔ سطر دوم و ستون اول AB برابر ۱۸ باشد، تفاضل کم‌ترین از بیشترین مقدار x کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۳

۱۹- اگر $A=\begin{bmatrix}4&a\\b&-1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}$ و حاصل AB ماتریس قطری باشد، مقدار a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۴ ۴) ۲۹

۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}-1&1&x\\x&-1&1\\-1&x&x\end{bmatrix}$ و $D=[d_{ij}]=ABC$ باشد، به ازای کدام مقدار x رابطهٔ $d_{23}=d_{32}$ برقرار است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۱- اگر A، B و C ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $AB=AC \Rightarrow B=C$
۲) $AB=\bar{O} \Rightarrow A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$
۳) $BA=\bar{O} \Rightarrow AB=\bar{O}$
۴) $A(BC)=(AB)C$

۲۲- اگر $A^2 = 4A - 3I$ باشد، A^3 کدام است؟

۱) $-12A + 13I$ ۲) $12A + 13I$
۳) $13A - 12I$ ۴) $-13A + 12I$

۲۳- ماتریس‌های $A = [2i + j]_{2\times 2}$ و $B = [i^2 - j]_{2\times 2}$ که در آن‌ها i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون می‌باشد مفروض‌اند. اثر ماتریس $AB - BA$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) صفر

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 2x\end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix}x & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ و $AB = \bar{O}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۵ ۴) ۴

۲۵- اگر A، B و C سه ماتریس 2×2 باشند که $BC = \bar{O}$ و $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل عبارت $(2AB + B)(CA + 2C)$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) BAC ۳) CAB ۴) $(A+I)^2$

۲۶- اگر A و B دو ماتریس مربعی 2×2 باشند که $AB = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$، حاصل $A\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 7\end{bmatrix}B + A\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -6\end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

۲۷- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\ 1 & -x & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴- ۳) ۱ ۴) ۳-

به توان رساندن ماتریس‌ها

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$، ماتریس A^4 چگونه است؟

۱) مجموع درایه‌های سطر اول آن ۵ است. ۲) مجموع درایه‌های ستون دوم آن ۲ است.
۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ باشند، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^2B کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

۳۰- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases}1 & i = j\\ 2 & i \neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ کدام است؟ خارج ۹۶

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A^2 + AB$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۹ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۳۲- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ و $BC=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ باشند، حاصل BA^2C کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 8 & 6\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 4 & 8\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}8 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}$

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7-A^4 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^9-A^4 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

۳۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر سوم A^5B^2 کدام است؟

۱) ۹- ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۲۷-

۳۶- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۳۷- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & \tan x\\ \cot x & 0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}A^{10}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\tan^9 x & 3\\ 3 & \cot^9 x\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}5 & 8\\ 14 & 18\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\tan^{10} x & 2\\ 2 & \cot^{10} x\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}14 & 18\\ 5 & 8\end{bmatrix}$

۳۸- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A^{10} کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

۳۹- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^6 کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۸ ۳) ۳۶ ۴) ۳۹

۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A^6 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۲۷

۴۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس A^{10} کدام است؟

۱) 3^{11} ۲) 3^{10} ۳) 3^8 ۴) 3^9

۴۲- در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۲^{۱۱}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۹}$

۴۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۱&۰\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^{۲}+A^{۳}+A^{۴}+A^{۵}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۴۴- اگر $A^{۲}+A+I=\bar{O}$ باشد، حاصل $A^{۵۰}$ کدام است؟

۱) $A+I$ ۲) $A^{۲}$ ۳) A ۴) $-A-I$

۴۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۳&۶&۲۴\\ \frac{۱}{۳}&۱&۲&۸\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۲}&۱&۴\\ \frac{۱}{۲۴}&\frac{۱}{۸}&\frac{۱}{۴}&۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^{۲}$ کدام است ؟ داخل ۹۷

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۴۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\ ۱&۱&۱\\ ۱&۱&۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^{۶}$ کدام است؟

۱) $۳^{۶}$ ۲) $۲^{۶}$ ۳) $۳^{۷}$ ۴) $۲^{۷}$

۴۷- اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱&-\frac{۲}{۳}\\ ۴&۲&-\frac{۴}{۳}\\ ۶&۳&-۲\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{۴}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۴۸- اگر A، B و C سه ماتریس و $A=B+C$ باشد، حاصل $A^{۲}+B^{۲}-AB-BA$ کدام است؟

۱) $-C^{۲}$ ۲) $C^{۲}$ ۳) $\bar{O}$ ۴) C

۴۹- اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری‌که $A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۳\\ -۳&۳\end{bmatrix}$، $B^{۲}=\begin{bmatrix}۷&۳\\ ۹&۷\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۳&۲\\ ۲&۳\end{bmatrix}$. حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲&۲\\ ۲&۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۶&۶\\ ۶&۳\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳&۳\\ ۳&\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱&۴\\ ۵&۲\end{bmatrix}$

اتحاد در ماتریس‌ها

۵۰- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱&۳\\ ۱&-۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&a\\ ۲&b\end{bmatrix}$ و $(A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲}$ باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۱- اگر $A(I-A)=I$ باشد، ماتریس $A^{۴}$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $-I$

۵۲- اگر ماتریس مربعی A در رابطهٔ $A-A^{۲}-I=\bar{O}$ صدق کند، حاصل $A^{۱۵}+A^{۱۶}$ کدام است؟

۱) $-I+A$ ۲) $-I-A$ ۳) $I-A$ ۴) $I+A$

پاسخ‌های تشریحی

۱ | ۴

درسنامه

آشنایی با ماتریس

ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک ماتریس نامیده می‌شود. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند C، B، A و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

در حالت کلی اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) است.

بنابراین در ماتریس $A_{m\times n}$ داریم:

$$A_{\underset{\text{تعداد سطرها}}{m}\times \underset{\text{تعداد ستون‌ها}}{n}}$$

درایه: هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. درایه‌ای که در سطر i اُم و ستون j اُم ماتریس A قرار دارد را با a_{ij} نشان می‌دهند. یعنی هر درایه دارای یک آدرس ij است که عدد سمت چپ جای سطر و عدد سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند. درایهٔ a_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس $A_{m\times n}$ می‌نامیم که $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ تغییر می‌کنند.

نکته گاهی اوقات ماتریس A را می‌توان توسط درایهٔ عمومی آن نمایش داد و برای اختصار نوشت $A=[a_{ij}]$. در این صورت برای به دست آوردن هر درایهٔ ماتریس A باید از قانون و ضابطهٔ a_{ij} تبعیت کرد. مثلاً ماتریس $A=[2i-j]_{2\times 3}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix} 2(1)-1 & 2(1)-2 & 2(1)-3 \\ 2(2)-1 & 2(2)-2 & 2(2)-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

تک‌تک درایه‌های A را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1^2+1 & 1^2+2 & 1^2+3 \\ 2^2+1 & 2^2+2 & 2^2+3 \end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=27$$

۲ | ۲ درایه‌های سطر دوم و ستون سوم ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 1-3+2 \\ 2+1 & 2^2+1 & 2-3+2 \\ \bullet & \bullet & 3^2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ \bullet & \bullet & 10 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید مجموع درایه‌های سطر دوم برابر ۹ و مجموع درایه‌های ستون سوم برابر ۱۱ است. پس مجموع درایه‌های سطر دوم ۲ واحد از مجموع درایه‌های ستون سوم کم‌تر است.

۳ | ۴ کافی است درایه‌های a_{12}، a_{31} و a_{22} را به دست آوریم:

$$\begin{cases} a_{12}=1^2-2=-1 \\ a_{31}=3^1-2=1 \\ a_{22}=2^2-2=2 \end{cases}\Rightarrow a_{12}-a_{31}+a_{22}=-1-1+2=0$$

۴ ۳

درسنامه

انواع ماتریس

الف) ماتریس افقی: ماتریسی است که تعداد سطرهای آن کم‌تر از تعداد ستون‌هایش است.

$[\ \ ]_{m\times n}\ (m<n)$

نکته ماتریسی که فقط از یک سطر تشکیل شده باشد را ماتریس سطری می‌نامیم.

$[\ \ ]_{1\times n}\ (n>1)$

ب) ماتریس قائم: ماتریسی است که تعداد ستون‌های آن کم‌تر از تعداد سطرهایش است.

$[\ \ ]_{m\times n}\ (m>n)$

نکته ماتریسی که فقط از یک ستون تشکیل شده باشد را ماتریس ستونی می‌نامیم.

$[\ \ ]_{m\times 1}\ (m>1)$

پ) ماتریس مربعی: ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌هایش با هم برابر است.

$[\ \ ]_{m\times n}\ (m=n)$

نکته به ماتریس مربعی $n\times n$ ، ماتریس مربعی مرتبهٔ n نیز می‌گویند.

ماتریس صفر: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشد. ماتریس صفر را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

ماتریس صفر می‌تواند قائم، افقی و یا مربعی باشد.

قطر اصلی و فرعی ماتریس‌های مربعی: در ماتریس مربعی A با قطر اصلی و قطر فرعی آشنا شوید. توجه کنید که درایه‌های روی قطر اصلی شمارهٔ سطر و ستون برابر دارند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

قطر فرعی　قطر اصلی

اثر ماتریس: در هر ماتریس مربعی، مجموع درایه‌های قطر اصلی را اثر ماتریس می‌نامند. اثر ماتریس A را با $tr(A)$ نشان می‌دهند.

انواع ماتریس‌های مربعی

۱ ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$

قطری

نکته در ماتریس قطری، درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. ماتریس‌های زیر، همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix} \quad و \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۲ ماتریس اسکالر: اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم.

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$$

اسکالر

۳ ماتریس همانی: اگر در ماتریس اسکالر $n\times n$ ، همهٔ درایه‌های قطر اصلی ۱ باشند، آن را ماتریس واحد یا همانی مرتبهٔ n می‌نامیم. ماتریس همانی مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس واحد (همانی)

ماتریس‌های A و B را معلوم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $C=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ به صورت مقابل است. پس:

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = ۱+(-۱)+(-۱)=-۱$$

۵ ۲

درسنامه

اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۱ **تساوی دو ماتریس:** دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

$$\forall i,j \,،\, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

۲ **جمع و تفریق ماتریس‌ها:** برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم. حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی مانند C است که از همان مرتبهٔ A و B می‌باشد.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \;,\; B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$

۳ **ضرب عدد در ماتریس:** برای ضرب عدد حقیقی r در ماتریس A، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \;,\; r\in\mathbb{R} \Rightarrow rA=[r\,a_{ij}]_{m\times n}$$

۴ **قرینهٔ یک ماتریس:** قرینهٔ ماتریس A را با $-A$ نمایش داده که از ضرب (-۱) در ماتریس A به دست می‌آید. واضح است که $A+(-A)=\bar{O}$ است.

خواص:

۱ جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$A+B=B+A$$

۲ جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

۳ ماتریس صفر، عضو خنثی عمل جمع است.

$$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$$

۴ اگر r و s اعداد حقیقی باشند، داریم:

$$r(A\pm B)=rA\pm rB \;,\; (r\pm s)A=rA\pm sA$$

۵ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد دلخواه ضرب کرد:

$$A=B\Rightarrow rA=rB$$

۶ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه مخالف صفر تقسیم کرد:

$$rA=rB \,,\, r\neq ۰ \Rightarrow A=B$$

با توجه به این‌که $۳A+B=I$ می‌باشد، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$۳A+B=I\Rightarrow ۳\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & a \\ ۰ & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & a \\ ۰ & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۱ & ۹+a \\ ۰ & ۹+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ۹+a=۰\Rightarrow a=-۹ \\ ۹+b=۱\Rightarrow b=-۸ \end{cases}$$

حال ماتریس $A-B$ را به دست می‌آوریم:

$$A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & a \\ ۰ & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳-a \\ ۰ & ۳-b \end{bmatrix}\xrightarrow{a=-۹,b=-۸}A-B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱۲ \\ ۰ & ۱۱ \end{bmatrix}\Rightarrow$$ بزرگ‌ترین درایه ۱۲ است.

۶ **۱** ابتدا درایه‌های ماتریس B را معلوم می‌کنیم. دقت کنید چون ماتریس B با ماتریس A برابر است باید ۲ × ۲ باشد:

$$B=\begin{bmatrix}1^2+3(1) & 1^2+3(2)\\ 2^2+3(1) & 2^2+3(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 7 & 10\end{bmatrix}$$

حال درایه‌های نظیر دو ماتریس را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}-2b=4\Rightarrow b=-2\\ 3a+b=7\xrightarrow{b=-2}3a-2=7\Rightarrow 3a=9\Rightarrow a=3 \quad \Rightarrow a+b+c=3+(-2)+2=3\\ 2c+a=7\xrightarrow{a=3}2c+3=7\Rightarrow 2c=4\Rightarrow c=2\end{cases}$$

۷ **۱** ابتدا درایه‌های ماتریس A را پیدا کرده و ماتریس $3A-2I$ را به دست می‌آوریم، اما چون اثر ماتریس $3A-2I$ یعنی مجموع درایه‌های قطر اصلی را می‌خواهیم، پس فقط درایه‌های قطر اصلی را معلوم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1^2-2 & \bullet & \bullet\\ \bullet & 2^2-4 & \bullet\\ \bullet & \bullet & 3^2-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \bullet & \bullet\\ \bullet & 0 & \bullet\\ \bullet & \bullet & 3\end{bmatrix}\Rightarrow tr(A)=-1+0+3=2$$

از طرفی می‌دانیم اثر ماتریس I_3 برابر $3=1+1+1$ است، پس:

$$tr(3A-2I)=3tr(A)-2tr(I)=3\times 2-2\times 3=0$$

البته می‌توانستیم درایه‌های قطر اصلی ماتریس $3A-2I$ را پیدا کنیم و سپس اثر آن را به دست آوریم.

۸ **۴** درایهٔ سطر دوم و ستون سوم و همچنین درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس‌های A و B را معلوم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}\bullet & -1 & \bullet\\ \bullet & \bullet & 0\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}\bullet & -3 & \bullet\\ \bullet & \bullet & -2\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

حال درایه‌های مورد نظر ماتریس $2A+3B$ را به دست می‌آوریم:

$$2A+3B=\begin{bmatrix}\bullet & -2 & \bullet\\ \bullet & \bullet & 0\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bullet & -9 & \bullet\\ \bullet & \bullet & -6\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & -11 & \bullet\\ \bullet & \bullet & -6\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

واضح است که درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $-6-(-11)=5$ واحد از درایهٔ سطر اول و ستون دوم بزرگ‌تر است.

۹ **۲** کافی است مجموع درایه‌های ماتریس‌های A ، B و C را به دست آوریم:

مجموع درایه‌های $A=14$ ، مجموع درایه‌های $B=11$ ، مجموع درایه‌های $C=11$

حال مجموع درایه‌های ماتریس $3A-2B+4C$ برابر است با:

مجموع‌درایه‌ها $=3\times 14-2\times 11+4\times 11=64$

۱۰ **۳** واضح است که درایه‌های $2A-4B$ به فرم زیر هستند:

$$2(2i+j)-4(i-3j)=4i+2j-4i+12j=14j$$

با مقایسهٔ $14j$ و $ai+bj$ متوجه می‌شویم که $a=0$ و $b=14$ است، پس $a+b=14$ می‌باشد.

۱۱ **۳** ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$2A+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & m\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -9\end{bmatrix}\Rightarrow 2A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & -6-m\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & -6-m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -3-\frac{m}{2}\end{bmatrix}$$

از طرفی گفته شده اثر ماتریس A برابر ۴- است، پس:

$$1+\left(-3-\frac{m}{2}\right)=-4\Rightarrow -3-\frac{m}{2}=-5\Rightarrow -\frac{m}{2}=-2\Rightarrow m=4$$

۱۲ **۲** از دستگاه دو معادله و دو مجهول، ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$(5A+B)-(B-2A)=I-\begin{bmatrix}-6 & -14\\ 7 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow 7A=\begin{bmatrix}7 & 14\\ -7 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

حال که ماتریس A به دست آمد، با قرار دادن A در یکی از معادلات، ماتریس B را به دست می‌آوریم:

$$5A+B=I\Rightarrow\begin{bmatrix}5 & 10\\ -5 & 0\end{bmatrix}+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-4 & -10\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $3A+B$ برابر است با:

$$3A+B=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -10\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

۱۳ ۲

درسنامه

ضرب ماتریس‌ها

شرط انجام‌پذیری ضرب دو ماتریس: اگر A و B دو ماتریس باشند، شرط آن‌که ضرب AB قابل تعریف باشد این است که تعداد ستون‌های ماتریس اول یعنی A با تعداد سطرهای ماتریس دوم یعنی B برابر باشد:

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

برابر

مرتبهٔ AB

به دست آوردن درایه‌های حاصل‌ضرب دو ماتریس: برای به دست آوردن درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس C یعنی c_{ij}، سطر iاُم ماتریس A را در ستون jاُم ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$c_{ij}=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\cdots+a_{ip}\times b_{pj}$$

اگر این کار را برای تک‌تک درایه‌ها انجام دهیم، ماتریس حاصل‌ضرب AB به دست می‌آید.

ویژگی‌ها

۱ ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A\times B\neq B\times A$$

نکته گاهی اوقات $A\times B$ تعریف می‌شود ولی $B\times A$ تعریف نمی‌شود. این اتفاق زمانی می‌افتد که $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$ باشند. در مواردی $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف می‌شوند، ولی هم‌مرتبه نیستند. این اتفاق زمانی می‌افتد که $A_{m\times p}$ و $B_{p\times m}$ باشند. اما اگر A و B هر دو مربعی و هم‌مرتبه باشند، $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف شده و هم‌مرتبه نیز هستند ولی ممکن است $A\times B\neq B\times A$ یا $A\times B=B\times A$ باشد.

نکته در صورتی که $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف شوند، آن‌گاه همواره اثر ماتریس AB با اثر ماتریس BA برابر است.

$$tr(AB)=tr(BA)$$

۲ ماتریس همانی، عضو خنثی عمل ضرب است.

$$A\times I=I\times A=A$$

نتیجه اگر ماتریس اسکالر kI در A ضرب شود، مانند آن است که عدد حقیقی k در ماتریس A ضرب شده است:

$$A\times kI=kI\times A=kA$$

۳ ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع و تفریق ماتریس‌ها توزیع‌پذیر است.

$$A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$$

توجه به ویژگی فوق از راست به چپ نیز نگاه کنید. یعنی می‌توان از « $A\times$ » از سمت چپ فاکتور گرفت.

۴ ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی جای پرانتزها در ضرب اهمیتی ندارد.

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

می‌دانیم وقتی ضرب دو ماتریس تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. حال ضرب بیش از دو ماتریس هنگامی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های هر کدام از ماتریس‌ها با تعداد سطرهای ماتریس بعدی برابر باشد، پس تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $A_{2\times 3}\underbrace{B_{3\times 3}}_{=}\underbrace{C_{2\times 2}}_{\neq}$ × ۲) $C_{2\times 2}\underbrace{A_{2\times 3}}_{=}\underbrace{B_{3\times 3}}_{=}$ ✓

بنابراین نیازی به بررسی گزینه‌های (۳) و (۴) نیست.

۱۴ ۴ چون $A(B-C)$ تعریف‌شده است، پس دو ماتریس B و C هم‌مرتبه یعنی $n\times m$ بوده و تعداد ستون‌های ماتریس A نیز باید با تعداد سطرهای $B-C$ برابر باشد. یعنی ماتریس A از مرتبهٔ $p\times n$ می‌باشد. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\underbrace{B_{n\times m}C_{n\times m}}_{\neq}$ × ۲) $\underbrace{A_{p\times n}+B_{n\times m}}_{\neq}$ × ۳) $\underbrace{C_{n\times m}A_{p\times n}}_{\neq}$ × ۴) $\underbrace{A_{p\times n}C_{n\times m}}_{=}$ ✓

۱۵ **۴** با توجه به این‌که $A+B$ تعریف‌شده است، پس هر دو از مرتبهٔ $n\times m$ هستند و از آن‌جایی که AC تعریف‌شده است، پس C از مرتبهٔ $m\times p$ است. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $A_{n\times \underbrace{m}B_{n}}{}_{\times m}$ ✗ $\neq$ ۲) $B_{n\times m}+C_{m\times p}$ ✗ $\neq$ ۳) $C_{m\times \underbrace{p}B_{n}}{}_{\times m}$ ✗ $\neq$ ۴) $B_{n\times \underbrace{m}C_{m}}{}_{\times p}$ ✓ $=$

۱۶ **۱** ابتدا ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۵\\ ۵ & ۶ & ۷\end{bmatrix}$$

حال ماتریس AB را محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۰ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۵\\ ۵ & ۶ & ۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۵ & -۱۸ & -۲۱\\ -۷ & -۸ & -۹\end{bmatrix}\Rightarrow$$ کوچک‌ترین درایه، درایهٔ سطر اول و ستون سوم است.

۱۷ **۳** ماتریس‌های A و B را معلوم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۱\end{bmatrix}$$

حال ماتریس BA را به دست می‌آوریم:

$$BA=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times ۳}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ ۷ & ۱۹\end{bmatrix}_{۲\times ۲}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۱+۵+۷+۱۹=۳۲$$

۱۸ **۳** چون درایهٔ سطر دوم و ستون اول AB برابر ۱۸ است، کافی است سطر دوم A را در ستون اول B ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix}x & ۳ & x+۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ -۳\\ x\end{bmatrix}=۱۸\Rightarrow ۴x+(-۹)+(x^۲+۲x)=۱۸\Rightarrow x^۲+۶x-۲۷=۰\Rightarrow (x+۹)(x-۳)=۰\Rightarrow x=-۹, x=۳$$

بنابراین تفاضل کم‌ترین از بیشترین مقدار x برابر $۱۲=(-۹)-۳$ است.

۱۹ **۲** درایه‌های بیرون قطر اصلی ماتریس AB باید صفر باشند تا ماتریس AB قطری شود، بنابراین داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & -۸+۲a\\ b-۳ & \bullet\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}\Rightarrow a^۲+b^۲=۱۶+۹=۲۵$$

۲۰ **۲**

توجه

اگر بخواهیم درایهٔ سطر i اُم و ستون j اُم از ماتریس $D=ABC$ یعنی d_{ij} را پیدا کنیم، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$d_{ij}=[\text{سطر } i\text{اُم } A][B]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ C\end{bmatrix}$$

به طور کلی، برای به دست آوردن درایهٔ ij اُم حاصل‌ضرب چند ماتریس، از ماتریس اول فقط به سطر iاُم و از ماتریس آخر فقط به ستون jاُم احتیاج داریم. توجه کنید که ماتریس‌های دیگر باید به طور کامل حضور داشته باشند.

درایه‌های $d_{۲۳}$ و $d_{۳۲}$ را به دست آورده و مساوی هم قرار می‌دهیم تا x معلوم شود:

$$\begin{cases}d_{۲۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\\ x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\\ x\end{bmatrix}=۴x+۲+۲x=۶x+۲\\ d_{۳۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۱+(-۲)+۲x=۲x-۱\end{cases}\Rightarrow ۶x+۲=۲x-۱\Rightarrow ۴x=-۳\Rightarrow x=-\frac{۳}{۴}$$

۲۱ **۴** با توجه به ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها واضح است که گزینهٔ (۴) درست است. حال علت نادرستی گزینه‌های دیگر را می‌بینیم:

گزینهٔ (۱): قانون حذف در ماتریس‌ها برقرار نیست. مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-2&7\\5&-1\end{bmatrix}$ باشند، داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\16&10\end{bmatrix}\quad,\quad AC=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&7\\5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\16&10\end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینیم $AB=AC$ است، ولی $B\neq C$ می‌باشد.

گزینهٔ (۲): اگر A و B دو ماتریس و $AB=\bar{O}$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که A یا B ماتریس‌های صفر بوده‌اند. مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-8&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4&1\\8&2\end{bmatrix}$ باشند، داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}2&-1\\-8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1\\8&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۳): واضح است که در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. پس اگر $AB=\bar{O}$ باشد، لزومی ندارد که BA نیز صفر باشد.

نتیجه

۱ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد:

$$B=C\Rightarrow AB=AC \text{ یا } BA=CA$$

اما قانون حذف در حالت کلی در تساوی‌های ماتریسی برقرار نیست:

$$AB=AC \not\Rightarrow B=C$$

۲ در اعداد حقیقی وقتی ضرب دو عدد صفر می‌شود، حداقل یکی از آن‌ها صفر است ولی در حالت کلی در ماتریس‌ها، اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که لااقل یکی از آن‌ها صفر است.

$$\begin{bmatrix}2&4\\4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&12\\-2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

۲۲ **۳** کافی است طرفین تساوی $A^2=4A-3I$ را در A ضرب کنیم:

$$A^2=4A-3I \xrightarrow{A\times} A^3=4A^2-3A \xrightarrow{A^2=4A-3I} A^3=4(4A-3I)-3A=13A-12I$$

۲۳ **۴** چون اثر ماتریس AB با اثر ماتریس BA برابر است، پس اثر ماتریس $AB-BA$ حتماً برابر صفر است.

۲۴ **۱** ابتدا از تساوی $AB=\bar{O}$ مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-2&\bullet\\\bullet&\bullet\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$$

حال ماتریس BA را به دست می‌آوریم:

$$BA=\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&4\\-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=3$$

۲۵ **۱** ماتریس B را از سمت راست و ماتریس C را از سمت چپ از هر یک از پرانتزها فاکتور می‌گیریم:

$$(2AB+B)(CA+2C)=(2A+I)\underbrace{BC}_{\bar{O}}(A+2I)=\bar{O}$$

۲۶ **۲** اگر ماتریس A را از سمت چپ و ماتریس B را از سمت راست فاکتور بگیریم، داریم:

$$\text{حاصل}=A\left(\begin{bmatrix}2&-1\\-3&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1\\3&-6\end{bmatrix}\right)B=A\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}B=AIB=AB=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

۲۷ **۴** می‌دانیم حاصل‌ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. یعنی اگر بخواهیم ABC را حساب کنیم، مهم نیست که اول A را در B و سپس حاصل را در C ضرب کنیم یا این‌که اول BC را حساب کنیم و سپس A را از چپ در حاصل آن ضرب کنیم. بنابراین:

$$\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&1\\1&-x&0\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x+2-1&-2-2x+1&-1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x+1&-2x-1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+1&-2x-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow -x^2+x-4x-2=0\Rightarrow -x^2-3x-2=0\Rightarrow x'+x''=-\frac{b}{a}=-3$$

۲۸ **۴**

درسنامه

به توان رساندن ماتریس‌ها

توان در ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه توان‌های صحیح و نامنفی A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^{۰}=I\,,\;A^{۱}=A\,,\;A^{۲}=A\times A\,,\;A^{۳}=A^{۲}\times A=A\times A^{۲}\,,\;\dots\,,\;A^{n}=A\times A^{n-۱}=A^{n-۱}\times A$$

محاسبهٔ توان‌های بزرگ‌تر در یک ماتریس: برای محاسبهٔ توان‌های بزرگ در یک ماتریس، ابتدا توان دوم آن را به دست می‌آوریم. اگر $A^{۲}$ برابر I، $-I$، $\bar{O}$، A یا kA باشد، به کمک موارد زیر، توان مورد نظر را به دست می‌آوریم:

۱) $A^{۲}=\bar{O}\Rightarrow A^{n}=\bar{O}$ ۲) $A^{۲}=A\Rightarrow A^{n}=A$ ۳) $A^{۲}=kA\Rightarrow A^{n}=k^{n-۱}A$

اگر $A^{۲}=I$ یا $A^{۲}=-I$ شود، باید A^{n} را به صورت ضرب ماتریس‌های $A^{۲}$ و A نوشته و با جای‌گذاری I یا $-I$ به‌جای $A^{۲}$، ماتریس A^{n} را به دست آوریم. مثلاً اگر $A^{۲}=-I$ باشد، ماتریس‌های $A^{۱۲}$، $A^{۱۳}$ و $A^{۱۴}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A^{۱۲}=\underbrace{A^{۲}\times A^{۲}\times\dots\times A^{۲}}_{۶\text{ بار}}=\underbrace{(-I)\times(-I)\times\dots\times(-I)}_{۶\text{ بار}}=(-I)^{۶}=I$$

$$A^{۱۳}=\underbrace{A^{۲}\times A^{۲}\times\dots\times A^{۲}}_{۶\text{ بار}}\times A=\underbrace{(-I)\times(-I)\times\dots\times(-I)}_{۶\text{ بار}}\times A=IA=A$$

$$A^{۱۴}=\underbrace{A^{۲}\times A^{۲}\times\dots\times A^{۲}}_{۷\text{ بار}}=\underbrace{(-I)\times(-I)\times\dots\times(-I)}_{۷\text{ بار}}=-I$$

اما اگر توان دوم A موارد فوق نبود، باید توان سوم آن را نیز به دست آوریم و از روی A، $A^{۲}$ و $A^{۳}$، ماتریس A^{n} را حدس بزنیم.

ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}$$

حال برای به دست آوردن $A^{۴}$ نیازی به محاسبهٔ $A^{۳}$ نیست. کافی است $A^{۲}$ را در خودش ضرب کنیم:

$$A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow$$ ماتریس $A^{۴}$ همانی است.

۲۹ **۲** چون درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $A^{۲}B$ را می‌خواهیم، کافی است درایه‌های سطر دوم $A^{۲}$ را حساب کرده و در ستون سوم B ضرب کنیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۱&۰&۲\\۲&۳&-۱\\۴&۲&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۰&۲\\۲&۳&-۱\\۴&۲&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\۰&۷&۲\\\bullet&\bullet&\bullet\end{bmatrix}$$

حال که سطر دوم $A^{۲}$ را به دست آوردیم، داریم:

$$A^{۲}B=\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\۰&۷&۲\\\bullet&\bullet&\bullet\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&۳\\\bullet&\bullet&۴\\\bullet&\bullet&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&۳۰\\\bullet&\bullet&\bullet\end{bmatrix}$$

۳۰ **۲** ماتریس A را معلوم کرده و $A^{۲}-۴A$ را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}-۴A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}-۴\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر ۱۵ است.

۳۱ **۴** می‌دانیم $A^۲+AB$ برابر $A\times(A+B)$ است، یعنی از سمت چپ از A فاکتور گرفتیم. بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix}۱&۳&۱\\۱&-۱&۲\\۳&۱&۰\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}۱&۳&۱\\۱&-۱&۲\\۳&۱&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\-۱&۰&۴\\۳&۲&۵\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۱&۳&۱\\۱&-۱&۲\\۳&۱&۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳&۴&۲\\۰&-۱&۶\\۶&۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۴&۲۵\\\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet\end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید مجموع درایه‌های سطر اول برابر $۳۸=۲۵+۴+۹$ می‌باشد. توجه کنید با نوشتن $A^۲+AB$ به صورت $A\times(A+B)$ به‌جای دوبار انجام عمل ضرب، یک بار ضرب می‌کنیم.

۳۲ **۳** ابتدا $A^۲$ را به دست می‌آوریم، واضح است که انتظار داریم $A^۲$ یا همانی شود یا اسکالر، چون در غیر این صورت با توجه به فرض‌های سؤال، حاصل $BA^۲C$ را نمی‌توان به دست آورد:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰&۱\\۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}=۲I$$

بنابراین $BA^۲C$ برابر است با:

$$BA^۲C=B\times ۲I\times C=۲BIC=۲BC=\begin{bmatrix}۲&۸\\۴&۶\end{bmatrix}$$

توجه کنید اگر $A^۲=\bar{O}$ می‌شد، باز هم محاسبهٔ $BA^۲C$ امکان‌پذیر بود و حاصل آن برابر صفر می‌شد.

۳۳ **۲** با محاسبهٔ $A^۲$ حاصل را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^۷-A^۴=(A^۲)^۳A-(A^۲)^۲=IA-I=A-I=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۳&-۳\end{bmatrix}$$

۳۴ **۴** ابتدا ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=-I$$

حال $A^۴$ و $A^۹$ را به دست می‌آوریم تا $A^۹-A^۴$ به دست آید:

$$A^۴=A^۲\times A^۲=(-I)\times(-I)=I^۲=I\ ,\ A^۹=A^۴\times A^۴\times A=I\times I\times A=A\Rightarrow A^۹-A^۴=A-I=\begin{bmatrix}۰&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}$$

۳۵ **۱**

درسنامه

ضرب ماتریس‌های خاص

۱ ضرب دو ماتریس هم‌مرتبه که درایه‌های یک طرف قطر اصلی آن‌ها صفر است، یک ماتریس به همان فرم و از همان مرتبه است که درایه‌های قطر اصلی آن، حاصل‌ضرب درایه‌های متناظر روی قطرهای اصلی دو ماتریس است.

$$\begin{bmatrix}a&\bullet&\bullet\\۰&b&\bullet\\۰&۰&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a'&\bullet&\bullet\\۰&b'&\bullet\\۰&۰&c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa'&\bullet&\bullet\\۰&bb'&\bullet\\۰&۰&cc'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&۰&۰\\\bullet&b&۰\\\bullet&\bullet&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a'&۰&۰\\\bullet&b'&۰\\\bullet&\bullet&c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa'&۰&۰\\\bullet&bb'&۰\\\bullet&\bullet&cc'\end{bmatrix}$$

توجه درایه‌هایی که با ● معلوم شده‌اند، ارزش حفظ کردن ندارند و در صورت لزوم باید محاسبه شوند.

۲ ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه، یک ماتریس قطری از همان مرتبه است که درایه‌های قطر اصلی آن، حاصل‌ضرب درایه‌های متناظر روی قطرهای اصلی دو ماتریس است.

$$\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a'&۰&۰\\۰&b'&۰\\۰&۰&c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa'&۰&۰\\۰&bb'&۰\\۰&۰&cc'\end{bmatrix}$$

نکته مطالب فوق در مورد به توان رساندن ماتریس‌ها هم برقرار است.

ماتریس‌های A^5 و B^2 را به دست آورده، سپس حاصل A^5B^2 را می‌یابیم. دقت کنید در ماتریس‌های A و B درایه‌های پایین قطر اصلی صفر هستند:

$$\left\{\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix}1&\bullet&\bullet\\0&5&\bullet\\0&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^5=\begin{bmatrix}1^5&\bullet&\bullet\\0&5^5&\bullet\\0&0&(-1)^5\end{bmatrix}\\ B=\begin{bmatrix}2&\bullet&\bullet\\0&2&\bullet\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow B^2=\begin{bmatrix}2^2&\bullet&\bullet\\0&2^2&\bullet\\0&0&3^2\end{bmatrix}\end{array}\right.\Rightarrow A^5B^2=\begin{bmatrix}4&\bullet&\bullet\\0&4\times5^5&\bullet\\0&0&-9\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های سطر سوم}=0+0+(-9)=-9$$

۳۶ **۳** ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

A^2 ماتریس خاصی نشد، سراغ A^3 می‌رویم:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

چون $A^3=-I$ شده است، پس A^{100} برابر است با:

$$A^{100}=\underbrace{A^3\times A^3\times\dots\times A^3}_{\text{۳۳ بار}}\times A=\underbrace{(-I)\times(-I)\times\dots\times(-I)}_{\text{۳۳ بار}}\times A=-IA=-A=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-1$$

۳۷ **۲** ابتدا تکلیف A^{10} را معلوم می‌کنیم. بنابراین A^2 را حساب کرده و داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&\tan x\\\cot x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\tan x\\\cot x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^{10}=I$$

بنابراین $\begin{bmatrix}2&1\\-1&5\end{bmatrix}A^{10}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ برابر $\begin{bmatrix}2&1\\-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ می‌باشد. پس داریم:

$$\begin{bmatrix}2&1\\-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&8\\14&18\end{bmatrix}$$

۳۸ **۲** ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=A$$

چون $A^2=A$ شده است، پس $A^{10}=A$ خواهد بود. بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم A^{10} برابر ۲- است.

۳۹ **۴** ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

چون A^2 ماتریس خاصی نشد، سراغ A^3 می‌رویم:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&6&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9&9\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از ماتریس‌های A^2 و A^3 می‌توان نتیجه‌گرفت که A^6 به صورت $\begin{bmatrix}1&6\times3&6\times3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=A^6$ است. پس مجموع درایه‌های آن برابر ۳۹ می‌باشد.

۴۰ **۳** ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

چون A^2 ماتریس خاصی نشد، سراغ A^3 می‌رویم:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از روی A^2 و A^3 می‌توان گفت $A^6=\begin{bmatrix}1&6&\bullet\\0&1&6\\0&0&1\end{bmatrix}$ است. پس مجموع درایه‌های ستون دوم آن برابر ۷ می‌باشد.

۴۱ | ۴ ابتدا $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&-۱&۱\\-۱&۱&-۱\\۱&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱&۱\\-۱&۱&-۱\\۱&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۳&۳\\-۳&۳&-۳\\۳&-۳&۳\end{bmatrix}=۳A\Rightarrow A^{۱۰}=۳^۹A=\begin{bmatrix}\bullet&\bullet&۳^۹\\\bullet&\bullet&-۳^۹\\\bullet&\bullet&۳^۹\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون سوم $A^{۱۰}$ برابر $۳^۹+(-۳^۹)+۳^۹=۳^۹$ است. دقت کنید چون $A^۲=۳A$ شد، از خاصیت «$A^۲=kA\Rightarrow A^n=k^{n-۱}A$» استفاده کردیم.

۴۲ | ۳ باز هم طبق روال، $A^۲$ را باید حساب کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\۰&۰&۰&۰\\۱&۱&۱&۱\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\۰&۰&۰&۰\\۱&۱&۱&۱\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲&۲&۲\\۰&۰&۰&۰\\۲&۲&۲&۲\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}=۲A\Rightarrow A^{۱۰}=۲^۹A$$

بنابراین $A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۲^۹&۲^۹&۲^۹&۲^۹\\۰&۰&۰&۰\\۲^۹&۲^۹&۲^۹&۲^۹\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ برابر است با $۲^{۱۲}=۲^۹\times۲^۳=۸\times۲^۹$.

۴۳ | ۳ ابتدا $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۰\end{bmatrix}=A$$

چون $A^۲=A$ شده است، پس A به هر توانی برسد دوباره برابر A می‌شود، بنابراین:

$$A+A^۲+A^۳+A^۴+A^۵=A+A+A+A+A=۵A=\begin{bmatrix}۵&۰\\۵&۰\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۱۰$$

۴۴ | ۴ از تساوی $A^۲+A+I=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم که $A^۲=-A-I$ است. حال $A^۳$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=-A-I\xRightarrow{A\times}A^۳=-A^۲-A\xRightarrow{A^۲=-A-I}A^۳=-(-A-I)-A=I$$

بنابراین $A^{۵۰}$ برابر است با:

$$A^{۵۰}=\underbrace{A^۳\times A^۳\times\ldots\times A^۳}_{\text{۱۶ بار}}\times A^۲=\underbrace{I\times I\times\ldots\times I}_{\text{۱۶ بار}}\times A^۲=I\times A^۲=A^۲=-A-I$$

۴۵ | ۱

نیم‌نگاه

اگر در ماتریس A، درایه‌های هر سطر، مضربی از درایه‌های یک سطر، یا درایه‌های هر ستون، مضربی از درایه‌های یک ستون باشند، داریم:

$$A^۲=tr(A)\times A$$

نتیجه اگر تمام درایه‌های ماتریس A با هم برابر باشند، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}a&a&\cdots&a\\a&a&\cdots&a\\\vdots&&&\vdots\\a&a&\cdots&a\end{bmatrix}_{n\times n}\Rightarrow A^۲=(na)A$$

ابتدا ماتریس C را معلوم می‌کنیم:

$$C=\begin{bmatrix}۱&۳&۶&۲۴\\\frac{۱}{۳}&۱&۲&۸\\\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۲}&۱&۴\\\frac{۱}{۲۴}&\frac{۱}{۸}&\frac{۱}{۴}&۱\end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید سطرهای دوم، سوم و چهارم، مضرب سطر اول هستند (اگر سطر اول را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب کنیم، سطر دوم و اگر آن را در $\frac{۱}{۶}$ ضرب کنیم، سطر سوم و اگر آن را در $\frac{۱}{۲۴}$ ضرب کنیم، سطر چهارم به دست می‌آید). پس داریم:

$$C^۲=tr(C)\times C\Rightarrow C^۲=(۱+۱+۱+۱)C\Rightarrow C^۲=۴C\Rightarrow C^۲=\begin{bmatrix}۴&\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&۴&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&۴&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet&۴\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی $C^۲$ برابر ۱۶ است.

۴۶ **۳** چون تمام درایه‌های A برابر ۱ و مرتبهٔ ماتریس ۳ است، پس:

$$A^۲=(۳\times۱)A \Rightarrow A^۲=۳A \Rightarrow A^۶=۳^۵A \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۹\times۳^۵=۳^۷$$

۴۷ **۲** چون درایه‌های ستون دوم و درایه‌های ستون سوم، مضرب درایه‌های ستون اول هستند، پس داریم:

$$A^۲=tr(A)\times A \Rightarrow A^۲=۲A \Rightarrow A^۴=۲^۳\times A=۸A$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^۴$ برابر است با:

$$۸\times(۲+۲+(-۲))=۱۶$$

۴۸ **۲** واضح است که $A^۲+B^۲-AB-BA$ همان $(A-B)^۲$ می‌باشد. نگاه کنید:

$$(A-B)^۲=(A-B)\times(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲ \xrightarrow{A-B=C} A^۲-AB-BA+B^۲=(A-B)^۲=C^۲$$

۴۹ **۲** می‌دانیم $(A+B)\times(A+B)$ برابر $A^۲+AB+BA+B^۲$ می‌باشد، پس:

$$(A+B)\times(A+B)=\begin{bmatrix}۳&۲\\۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۲\\۲&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳&۱۲\\۱۲&۱۳\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix}۱۳&۱۲\\۱۲&۱۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۳\\-۳&۳\end{bmatrix}+AB+BA+\begin{bmatrix}۷&۳\\۹&۷\end{bmatrix}\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}۱۳&۱۲\\۱۲&۱۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۷&۶\\۶&۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۶\\۶&۳\end{bmatrix}$$

۵۰ **۳**

درسنامه

اتحاد در ماتریس‌ها

ضرب دو ماتریس در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست، ولی اگر دارای خاصیت جابه‌جایی باشد، آن‌گاه اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است و بالعکس؛ یعنی اگر اتحادهای جبری در ماتریس‌ها برقرار باشند، حتماً ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد. مثلاً داریم:

$$(A\pm B)^۲=(A\pm B)(A\pm B)=A^۲\pm AB\pm BA+B^۲ \xrightarrow{AB=BA} (A\pm B)^۲=A^۲\pm۲AB+B^۲$$

$$(A+B)(A-B)=A^۲-AB+BA-B^۲ \xrightarrow{AB=BA} (A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$$

$$(AB)^۳=ABABAB \xrightarrow{AB=BA} (AB)^۳=A^۳B^۳$$

نکته ضرب ماتریس I با هر ماتریس دلخواه مانند A دارای خاصیت جابه‌جایی است. بنابراین تمام اتحادهای جبری در مورد ماتریس‌های A و I برقرار است. مثلاً داریم:

$$(A\pm I)^۲=A^۲\pm۲A+I$$

$$(A+I)^۳=A^۳+۳A^۲+۳A+I$$

چون اتحاد $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ برقرار است، پس $AB=BA$ می‌باشد. لذا داریم:

$$\begin{cases}AB=\begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&a\\۲&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&-a+۳b\\-۱&a-b\end{bmatrix}\\ BA=\begin{bmatrix}۱&a\\۲&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱+a&۳-a\\-۲+b&۶-b\end{bmatrix}\end{cases}\xrightarrow{AB=BA}\begin{cases}-۱+a=۵\Rightarrow a=۶\\-۲+b=-۱\Rightarrow b=۱\end{cases}\Rightarrow a+b=۷$$

۵۱ **۲** رابطهٔ $A(I-A)=I$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A(I-A)=I\Rightarrow A-A^۲=I\Rightarrow A^۲=A-I$$

چون ضرب A و I خاصیت جابه‌جایی دارد، پس می‌توانیم از اتحادها استفاده کنیم:

$$A^۲=A-I\Rightarrow A^۴=(A-I)^۲\Rightarrow A^۴=A^۲-۲A+I\xrightarrow{A^۲=A-I}A^۴=(A-I)-۲A+I=-A$$