



راهپیمایی و دویسرسان غیرانتفاعی پسرانه علامه طباطبائی

۱- اگر  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k} + \vec{j}$  ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$  دو بردار باشند تصویر قائم  $\vec{a}$  را بر  $\vec{b} + \vec{a}$  بیابید. (۱ نمره)

۲- در صورتی که  $|\vec{b}| = 6$  و زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برابر  $\frac{\pi}{6}$  باشد اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{a} - 2\vec{b}$  را بیابید. (۱ نمره)

۳- معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه  $A(2, -1, 4)$  گذشته و شامل خط  $Z = \frac{y-1}{3} = x - 2$  باشد. (۱/۵ نمره)

۴- معادله قطرهای یک دایره به صورت  $mx + (m + 1)y + 2 = 0$  است اگر این دایره از نقطه  $A(-1, 2)$  بگذرد معادله آن را بنویسید. (۱ نمره)

۵- معادله هذلولی را بنویسید که دو خط  $2x - y = 0$  و  $2x + y = 4$  معادلات مجانب‌های آن بوده و طول رأس  $A$  آن برابر ۴ باشد. (۱/۵ نمره)

۶- سهمی به معادله  $x^2 + 4x - 2y + 9 = 0$  را رسم کنید و مختصات رأس و کانون معادله خط‌های آن را بیابید.  
(۱/۵ نمره)

۷- با استفاده از دوران نوع مقطع مخروطی  $xy - 1 = 0$  را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)

۸- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم مرتبه باشند نشان دهید  $AB^T - BA^T$  پاد متقارن است؟ (۱ نمره)

۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  داشته باشیم  $A^\alpha = \alpha A + \beta I$  آنگاه  $\alpha$  و  $\beta$  را بیابید. (۱/۵ نمره)

۱۰- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$  را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید. (۱/۵ نمره)

۱۱- بدون بسط دادن و با استفاده از ویژگی‌های دوران ثابت کنید. (۲ نمره)

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

۱۲- ثابت کنید اگر  $A$  ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر مرتبه ۳ باشد و  $A^*$  ماتریس الحاقی باشد آنگاه:  $|A^*| = |A|^2$  (۱/۵ نمره)

۱۳- دستگاه مقابل را به روش گaus یا ماتریس وارون حل کنید. (۲/۵ نمره)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

۱۴- اگر  $A$  ماتریسی مربعی وارون‌پذیر باشد ثابت کنید  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ . (۱ نمره)

-۱

$$\vec{a} = (2, -1, 1) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) = (3, 0, 1)$$

$$\vec{b} = (1, 1, 0)$$

$$a' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|^2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{6 + 0 + 1}{9 + 1} (3, 0, 1) = \frac{7}{10} (3, 0, 1)$$

-۲

$$|(a + b) \times (2b - a)| = |2a \times b - a \times a + 2b \times b - b \times a| = 3|a \times b|$$

$$= 3|a| \times |b| \sin \frac{\pi}{6} = 3 \times 6 \times \frac{1}{2} = 27$$

-۳

$$B = (2, 1, 0) \quad \overline{AB} = (0, -2, 4) \quad \vec{U} = (1, 3, 1)$$

$$A = (2, -1, 4)$$

$$\overline{AB} \times \vec{U} = (-14, 4, +2) \rightarrow \begin{cases} -14x + 4y + 2z = -28 + 4 = -24 \\ -14x + 4y + 2z = -24 \end{cases}$$

-۴

$$m = 0 \rightarrow y + 2 = 0 \rightarrow y = -2$$

$$m = -1 \rightarrow -x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$C(2, -2) \rightarrow R = AC = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$A(-1, 2)$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

۵- هذلولی افقی

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$2x = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + a = 4 \\ 1 + a = 4 \\ a = 3 \end{cases}$$

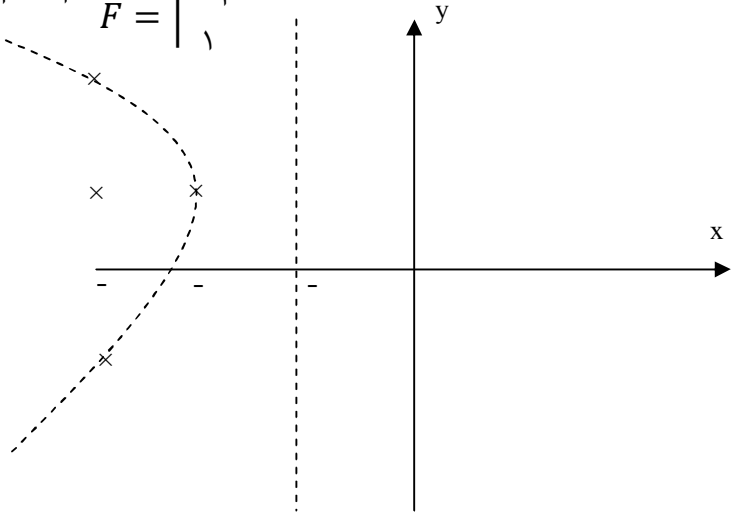
$$\frac{b}{a} = +2 \rightarrow \frac{b}{3} = +2 \rightarrow b = 6 \rightarrow \frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$$

$$y'' - 2y' + 1 - 1 + 4x + 9 = 0$$

$$C \mid \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} + 4a = -4 \rightarrow a = -1$$

$$\Delta = x = \alpha - a \quad F = \begin{vmatrix} \alpha + a = -2 - 1 \\ \beta = 1 \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x = -2 + 1 = -1$$



$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{1}{-1} \text{ تعریف نشده} \rightarrow 2\theta = 90 \rightarrow \theta = 45$$

$$\begin{cases} x' = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y' = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \end{cases}$$

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) - 1 = 0$$

$$\frac{2}{4} x'^2 - \frac{2}{4} y'^2 = 1 \rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1 \quad \text{هذلولی است}$$

$$S^T = (AB^T - BA^T)^T = (AB^T)^T - (BA^T)^T$$

$$= BA^T - AB^T$$

$$= -(AB^T - BA^T) = -S \text{ پاد متقارن}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \cdot & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \cdot \\ \cdot & \beta \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \rightarrow \beta = -1 \\ 2\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

$$P = A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & \cdot & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & \cdot & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 2 & \cdot & 12 \\ 12 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Q = A - A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{r}p + \frac{1}{r}Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 1+x+y+z & 1+y & z \\ 1+x+y+z & y & 1+z \end{vmatrix}$$

$$= 1+x+y+z \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & 1+y & z \\ 1 & y & 1+z \end{vmatrix}$$

$$= 1+x+y+z \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

-۱۲

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \rightarrow A^{-1}|A| = A^*$$

$$|A^{-1}|A| = |A^*|$$

$$|A|^r \times \frac{1}{|A|} = |A^*| \rightarrow |A^*| = |A|^r$$

۱۳- جوابهای معادله  $x = 1$  و  $y = 2$  و  $z = 3$

-۱۴

$$AA^{-1} = I \rightarrow |AA^{-1}| = |I|$$

$$\rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$