هندسه ۱

سال دهم – متوسطه دوره دوم

رشته ریاضی و فیزیک

تألیف: دپارتمان هندسه خوان آموز

گروه آموزشی خوان آموز

مبتکر اولین کتاب های هوشمند ایران

فهرست مطالب

فصل ۱. ترسیم های هندسی و استدلال

واژه هندسه (Geometry) از دو واژه‌ی Geo به معنای زمین و Metrein به معنای اندازه‌گیری آمده است. مصری‌ها اولین کسانی بودند که از هندسه برای کشاورزی و ساختن منابع و ابزارها استفاده می‌کرده‌اند. در این بین ترسیم اشکال هندسی یکی از مهمترین قسمت‌های هندسه بوده است.

اقلیدس پسر نوقطرس بن برنیقس، ریاضی دان، منجم و هندسه دان بزرگ تاریخ است که در سال ۳۲۳ ق.م متولد شد.

اقلیدس ریاضیدان یونانی ۲۳۰۰ سال قبل در شهر اسکندریه مصر که بخشی از یونان آن زمان بود زندگی می کرد.

او کتاب معروفش در زمینه هندسه را در این شهر بزرگ آموزشی نوشت.

اصول هندسه کتاب درسی اقلیدس بود که بیش از ۲۰۰۰ سال مورد استفاده مداوم قرار گرفت.

زندگینامه کامل اقلیدس

این فصل به دو بخش **ترسیم های هندسی** و **استدلال** تقسیم می شود.

الف) ترسیم های هندسی

در این بخش قرارمون اینِ که مطالب زیر رو با هم مرور کنیم و مطالب جدید رو یاد بگیریم:

۱) مقدمات رسم
۲) برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن
۳) برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن
۴) رسم خط عمود و خط موازی

درس صفر: مقدمات رسم

معنای ترسیم در هندسه:

در ترسیم شما فقط از ابزارهای پرگار و خط کش نا مدرج استفاده میکنید. در این فرآیند شما مجاز به استفاده از نقاله برای انداز گیری زاویه یا خط کش مدرج برای اندازه گیری طول پاره خط ها نیستید.

چرا ما ترسیم ها را یاد میگیریم؟

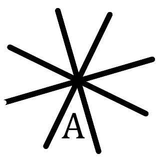
یونانیان با ستان قسمت مهمی از چیزی را که امروز ما به نام هند سه می شنا سیم را بیش از ۲۰۰۰ سال پیش فرمول بندی کردند. به ویژه، ریا ضیدان یونانی اقلیدس تمام این فرمول ها را در کتاب ۱۳ جلدی خود به نام "ا صول" که هنوز هم یکی از بهترین منابع هند سه به شمار می رود جمع آوری کرده ا ست. در این مجموعه اقلیدس از روش ترسیم به شکل گسترده ای استفاده کرده است و به همین خاطر ترسیم تبدیل به یکی از زمینه های مهم در مطالعه هندسه شده است. آن ها همینطور در دیدن مفاهیم هندسی به ما کمک می کنند و وقتی وسایل اندازه گیری نامناسب هستند ابزاری به ما می دهند تا اشکال را رسم کنیم.

چرا اقلیدس از ترسیم ها کمک گرفت؟

چرا اقلیدس براحتی از خط کش مدرج برای اندازه گیری طول ها ا ستفاده نکرد؟ برای مثال، یکی از تر سیم های بسیار اولیه تقسیم یک پاره خط به دو قسمت مساوی است. چرا او از خط کش مدرج برای تقسیم طول به دو قسمت استفاده نکرد؟

یک نظریه این ا ست که یونانی ها نمی توانستند براحتی محا سبات عددی ر انجام دهند. آن ها تنها اعدا طبیعی را می شناختند یعنی صفر و بقیه اعداد صحیح برای آن ها بی معنی بود. مثلا آن ها نمی توانستند ۵ را بر ۲ تق سیم کنند چون ۲٫۵ را نمی شناختند. همینطور آن ها اعداد را مثل امروزه به صورت د سته بندی شده ندا شتند یعنی ده تایی یا صدتایی یا ... نداشتند و اعداد را به صورتی که ما امروزه به آن ها اعداد یونانی می گوییم میشناختند که برای نوشتن و محاسبه بسیار نامناسب بود. مثلا عدد ۳۰ در اعداد یونانی به صورت XXX نوشته می شود. این مشکل آن ها را برآن داشت تا از ترسیم ها برای حل مسائل هندسی استفاده کنند یعنی تنها از خط کش نامدرج و پرگار.

مثال: نقطه‌ای مثل A داده شده ا ست. چند خط می‌توان ر سم کرد که از نقطه A می‌گذرند. اگر خط کش را در جهت مختلف طوری که نقطه A در امتداد آن باشـــد قرار دهیم و خط رســـم کنیم به راحتی می‌توان دید که **بینهایت** خط از نقطه A می‌گذرند.



حالا فرض کنید نقطه‌ی متمایزی مثل B داده شده است. چند خط می‌توان رسم کرد که هم از A و هم از B می‌گذرد؟

اگر خط‌کش را در امتداد B, A قرار دهیم، خواهیم دید که تنها می‌توان یک خط رسم کرد.

بنابراین با داشتن دو نقطه از یک خط معین می‌توان آن خط را رسم کرد.

پس **خط کش (نامدرج)** تنها ابزاری برای وصل کردن نقاط به یکدیگر و ساختن خط است.

وسیله دیگری که از آن استفاده می کنیم پرگار است.

برای رسم کردن تمام نقاطی که از یک نقطه فاصله‌ی یکسانی دارند از **پرگار** استفاده می‌کنیم.

اما فاصله چیست؟

ما کوتاه ترین م سیر بین دو نقطه یا دو شکل را فا صله بین آن دو می گوییم. در هند سه این کوتاه ترین م سیر همان پاره خط واصل بین دو نقطه است.

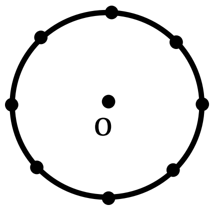
در واقع تر سیم با پرگار، اولین جایی ا ست که ما از مفهوم فا صله ا ستفاده میکنیم. یعنی به کمک پرگار می توان فاصله های از قبل داده شده را رسم کرد.

ترسم پاره خطی برابر با پاره خطی مفروض (کپی پاره خط)

فرض کنید یک پاره خط به شما داده اند (طول آن را نمیدانید) و از شما بخواهند آن را دوباره ر سم کنید. دقت کنید که شما خط کش مدرجی برای اندازه گیری ندارید. برای ان کار شما دهانه پرگار را به اندازه طول پاره خط باز میکنید و دایره به اندازه آن شعاع ر سم می کنید، حالا اگر مرکز دایره را به یکی از نقاط روی دایره و صل کنید انگاه شما پاره خطی به اندازه پاره خط قبلی دارید.

تمرین پای تخته: مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه برابر با ۲ باشد.

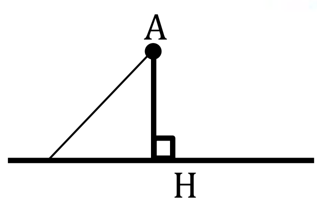
پاسخ: نقطه‌ی O را در نظر بگیرید. بینهایت نقطه در جهات مختلف نقطه‌ی O وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها تا O برابر با ۲ است. کافیست دهانه‌ی پرگار را به اندازه ۲ باز کنیم و دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز O رسم کنیم.



فاصله‌ی یک نقطه از یک خط چیست؟

در واقع باید کوتاه‌ترین مســـیر بین دو نقطه و خط را بیابیم. برای این‌کار باید پاره‌خط عمود بر خط و گذرنده از نقطه‌ی مفروض را اندازه بگیریم.

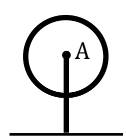
چون بنابر **قضیه‌فیثاغورث** هر نقطه‌ی دیگری روی خط فاصله‌اش تا نقطه مفروض بیشتر از طول پاره‌خط عمود بر خط است.



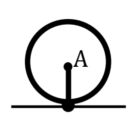
چه رابطه ای بین خط و دایره است؟

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L برابر با ۲ سانتی‌متر است.

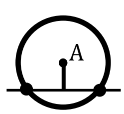
اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع کمتر از ۲ رسم کنیم، دایره و خط نقطه‌ی مشترک ندارند.



اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ رسم کنیم، دایره و خط تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند.



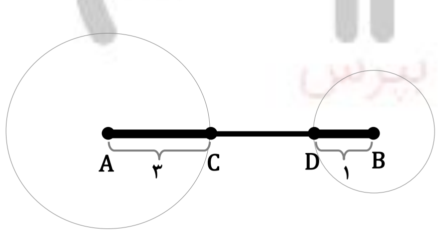
اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع بیشتر از ۲ رسم کنیم، دایره و خط تنها ۲ نقطه مشترک دارند.



رابطه‌ی خط و دایره

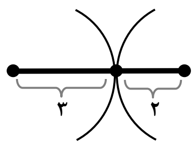
چه رابطه ای بین دو دایره وجود دارد؟

مثال: دو نقطه‌ی A , B و به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. ابتدا دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ و سپس دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۱ رسم می‌کنیم.

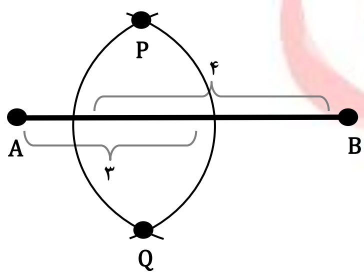


اگر نقاط برخورد دایره‌ها با پاره‌خط AB را D,C بنامیم می‌بینیم که $CD=۱$ و دایره‌ها نقطه‌ی مشترک ندارند.

حالا فرض کنید یکبار دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ و بار دیگر دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ رسم کنیم. چون مجموع دو شعاع دایره برابر با $۵=۳+۲$ است بنابراین دو دایره تنها یک نقطه مشترک دارند.



این‌بار فرض کنید شعاع دایره‌ها را ۳ و ۴ قرار دهیم. مجموع شعاع‌ها $۳+۴=۱$ بیشتر از طول پاره‌خط AB است. بنابراین دایره‌ها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. این دو نقطه را Q,P می‌نامیم. فاصله‌ی P,Q از نقطه A ، ۳ سانتی‌متر و از نقطه‌ی B ، ۴ سانتی‌متر است.



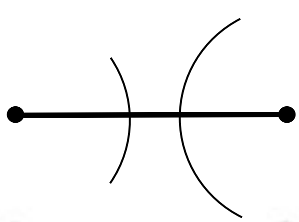
تمرین پای تخته ۲: با توجه به مثال های بالا آیا می توانید تمام روابط بین دو دایره را ترسیم کنید؟!

روابط بین دودایره

مثال: آیا می‌توان مثلثی به ابعاد ۶، ۲و ۳ ترسیم کرد؟

پاره‌خطی به طول ۶ رسم می‌کنیم.

از دوسر پاره‌خط دایره‌هایی به شعاع ۲ و ۳ رسم می‌کنیم.

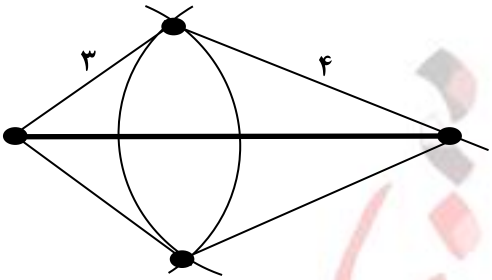


چون مجموع شعاع‌ها $۵=۳+۲$ کمتر از ۶ است بنابراین نمی‌توان مثلثی با این ابعاد رسم کرد. توجه کنید که ما اینجا داریم از نامساوی مثلثی به صورت شهودی استفاده می‌کنیم.

بنابر نامساوی مثلثی، مجموع دو ضلع همواره از ضلع سوم بزرگتر است.

مثال: آیا می‌توان مثلثی به ابعاد ۶ و ۳ و ۴ رسم کرد؟

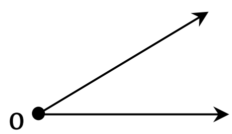
با تکرار مراحل بالا و توجه به این نکته که $۳+۴=۷$ بزرگتر از ۶ است، به راحتی مثلث مورد نظر را رسم کردیم.
توجه کنید که ما دو مثلث با این ابعاد توانستیم رسم کنیم.



رسم مثلث با اضلاع مشخص

درس اول: برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن

تعریف زاویه:



دو نیم‌خط با ابتدای مشترک تشکیل یک زاویه می‌دهند.
پس برای رسم یک زاویه کافیست با استفاده از خط‌کش دو نیم خط متقاطع رسم کنیم.

ترسیم یک زاویه برابر با زاویه ای مفروض (کپی زاویه)

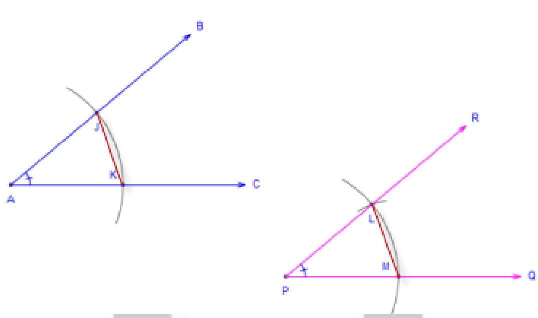
۱) ابتدا یک نیم خط دلخواه مثل $\overrightarrow{PQ}$ رسم می کنیم.

۲) دایره‌ای به مرکز A و شعاع دلخواه رسم می‌کنیم نقاط برخورد دایره با اضلاع را J,K می‌نامیم.

۳) حال دایره‌ای به مرکز P و همان شعاع قبلی می‌زنیم محل برخورد را M می‌نامیم.

۴) سپس دهانه ی پرگار را به اندازه ی $\overline{KJ}$ باز می کنیم و از نقطه ی M دایره ای رسم می کنیم تا دایره قبلی را در نقطه ای مثل L قطع کند. حال L را به P وصل می کنیم.

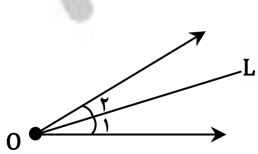
چون $\overline{PL}=\overline{PM}=\overline{AJ}=\overline{AK}$, $\overline{JK}=\overline{LM}$ پس $A\hat{B}C \cong A\hat{J}K$ پس $\hat{A}=\hat{P}$.



کپی زاویه

تعریف نیمساز زاویه:

نیمساز زاویه خطی است که یک زاویه رابه دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.
$O_۱=O_۲$, L نیمساز زاویه است.



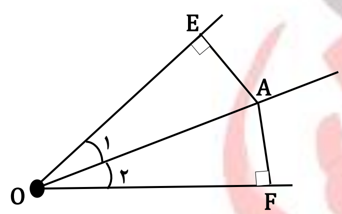
تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

تمرین پای تخته ۳: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: زاویه O و نقطه‌ی A روی نیمساز O را در نظر بگیرید.

دیدیم که فاصله‌ی یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خط عمود بر آن خط.

بنابراین از نقطه A به اضلاع زاویه O عمود می‌کنیم و نقاط تقاطع را F,E می‌نامیم.



$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OA} & \text{(ضلع مشترک)} \\ AEO = AFO = ۹۰^\circ \\ O_۱ = O_۲ & \text{(نقطه A روی نیمساز است.)} \end{cases}$$

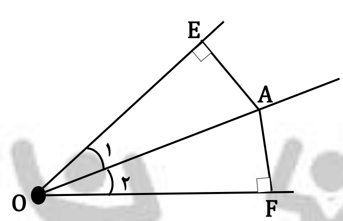
بنابر حالت وتر و یک زاویه دو مثلث قائم‌الزاویه AEO , AFO همنهشت هستند که با $A\overset{\Delta}{E}O \cong A\overset{\Delta}{F}O$ نشان می‌دهیم. پس $\overline{AE} = \overline{AF}$ یعنی فاصله‌ی تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه‌اند.

پاسخ تشریحی

اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آن‌گاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

تمرین پای تخته ۴: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: نقطه A را داخل زاویه O طوری در نظر بگیرید که فاصله‌اش تا دو ضلع زاویه مقداری یکسان باشد. A را به O وصل می‌کنیم.



$$\begin{cases} \overline{AE} = \overline{AF} & \text{(طبق فرض)} \\ \overline{AO} = \overline{AO} & \text{(ضلع مشترک)} \\ A\hat{E}O = A\hat{F}O = ۹۰^\circ \end{cases}$$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $AEO \cong AFO$ پس $O_۱ = O_۲$. یعنی نقطه‌ی A روی نیمساز زاویه O قرار دارد.

پاسخ تشریحی

ترسیم نیمساز یک زاویه:

زاویه XOY را در نظر بگیرید.

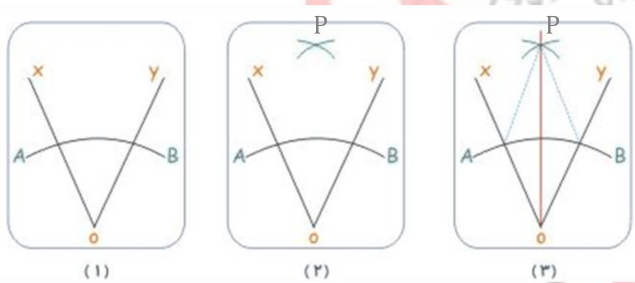
۱) دایره‌ای به شعاع دلخواه و به مرکز O رسم کنید، نقاط برخورد را A, B می‌نامیم.

۲) دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف فاصله‌ی A تا B باز می‌کنیم و دو دایره به مرکز B , A با شعاع یکسان رسم می‌کنیم. نقطه‌ی مشترک را P می‌نامیم.

توجه کنید که چون مجموع دو شعاع بیشتر از طول پاره‌خط $\overline{AB}$ است دو دایره حتماً یکدیگر را قطع می‌کنند.

۳) خط گذرنده از P, O را رسم کنیم.

اگر نقطه‌ی P را به B, A وصل کنیم آن‌گاه $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OP} = \overline{OP}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ بنابراین بنابر حالت (ض‌ض‌ض) $A\overset{\Delta}{O}P \cong B\overset{\Delta}{O}P$ و در نتیجه $AOP \cong BOP$ یعنی P روی نیمساز O قرار دارد.



ترسیم نیمساز یک زاویه

درس دوم: برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن

تعریف عمود منصف یک پاره‌خط:

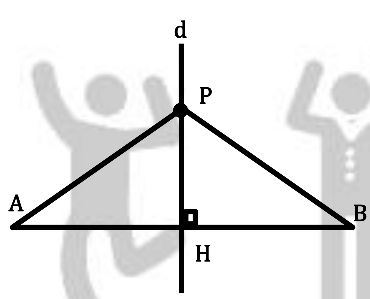
همانطور که از اسم عمود منصف پیداست، خطی است که بر پاره‌خط عمود است و آن را نصف می‌کند.

اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد، فاصله‌اش از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

تمرین پای تخته ۵: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: پاره‌خط $\overline{AB}$ و عمود منصف d و نقطه‌ی P روی آن را در نظر بگیرید.

نقطه P را به B , A وصل می‌کنیم. $\overline{PH} = \overline{PH}$, $\overline{AH} = \overline{BH}$, $PHA = PHB = ۹۰^\circ$ پس $A\overset{\Delta}{H}P \cong B\overset{\Delta}{H}P$ در نتیجه $\overline{AP} = \overline{BP}$.

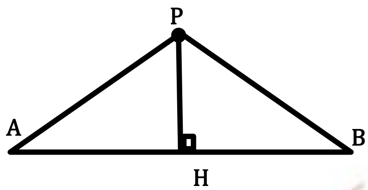


پاسخ تشریحی

اگر نقطه‌ای فاصله‌اش تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد آن‌گاه آن نقطه روی عمود منصف پاره‌خط است.

تمرین پای تخته ۶: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: پاره‌خط $\overline{AB}$ و نقطه P را طوری در نظر بگیرید که فا صله‌ی P تا دو سر پاره‌خط به یک اندازه با شد. یعنی $\overline{AP}=\overline{BP}$.



حالا از P به $\overline{AB}$ عمود می‌کنیم پای عمود را H می‌نامیم.

$\overline{AP}=\overline{BP}\ ,\ \overline{PH}=\overline{PH}\ ,\ AHP=BHP=90^\circ$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $A\overset{\Delta}{H}P \cong B\overset{\Delta}{H}P$ در نتیجه $\overline{AH}=\overline{BH}$ پس P روی عمودمنصف $\overline{AB}$ قرار دارد.

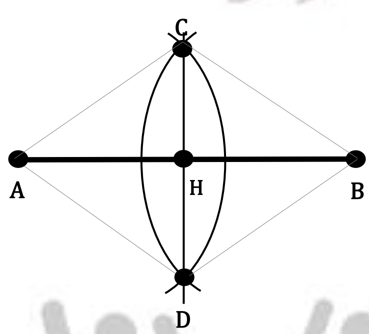
پاسخ تشریحی

ترسیم عمود منصف یک پاره‌خط:

پاره‌خط $\overline{AB}$ در نظر بگیرید.

۱) دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول $\overline{AB}$ باز کنید و یک بار دایره‌ای به مرکز A و یک‌بار دایره‌ای به مرکز B و شعاع یکسان رسم کنید. نقاط برخورد را D,C می‌نامیم.

۲) خط واصل D,C را رسم می‌کنیم.



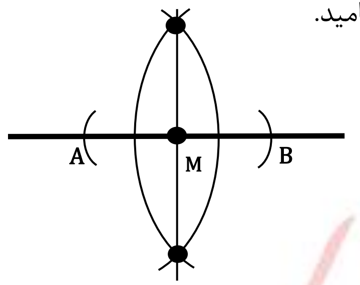
اگر C را به A,B و صل کنیم آن‌گاه $\overline{AC}=\overline{BC}$ بنابراین C روی عمود منصف $\overline{AB}$ است و به همین ترتیب D نیز روی عمود منصف $\overline{AB}$ است پس خط واصل D,C عمود منصف $\overline{AB}$ است.

ترسیم عمود منصف

درس سوم: رسم خط عمود و خط موازی

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ی روی آن:

خط d و نقطه‌ی M را روی آن در نظر بگیرید.



۱) دایره‌ای به مرکز M و شعاع دلخواه رسم کنید. نقاط برخورد را A , B بنامید.

۲) عمود منصف پاره‌خط $\overline{AB}$ را رسم کنید.

در این صورت خطی عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که از نقطه M می‌گذرد.

روش رسم

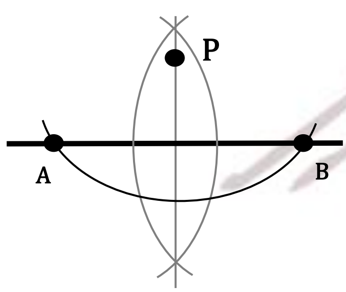
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ی غیرواقع بر آن:

خط d و نقطه خارج آن را در نظر بگیرید.

۱) دهانه‌ی پرگار را بیشتر از فاصله P تا خط d باز کرده و یک دایره رسم می‌کنیم. نقاط برخورد را A , B می‌نامیم.

۲) عمود منصف پاره‌خط $\overline{AB}$ را رسم می‌کنیم.

نقطه‌ی P از نقاط A , B به یک فاصله است پس P روی عمود منصف پاره‌خط $\overline{AB}$ و در نتیجه روی خط عمود بر خط d قرار دارد.



روش رسم

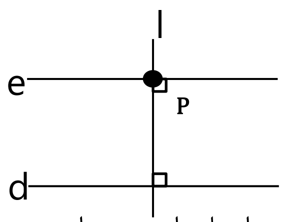
رسم خط عمود بر ابتدای یک نیم خط:

روش رسم

رسم یک مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع زاویه راست:

روش رسم

رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ی غیر واقع بر آن:



خط d و نقطه P خارج از آن را در نظر بگیرید.

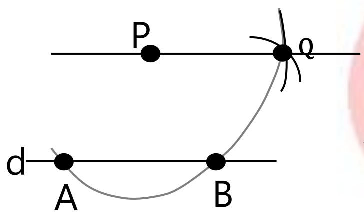
۱) خط عمود بر d و گذرنده از نقطه‌ی P را رسم کنید، آن را l می‌نامیم.

۲) خط عمود بر l و گذرنده از نقطه P را رسم کنید، آن را e می‌نامیم.

خط l را به عنوان خط مورب گذرنده از e,d دو خط در نظر می‌گیریم. چون تمام زوایای حا صل با هم م ساوی و برابر با 90° هستند بنابراین خط e با خط d موازی است.

راه‌حل دوم:

۱) دهانه‌ی پرگار را بیش از فاصله‌ی P تا خط d باز کرده و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌کنیم. نقاط برخورد را A , B می‌نامیم.



۲) دایره‌ای به مرکز B و شعاع $\overline{AP}$ رسم می‌کنیم.

۳) دایره‌ای به مرکز P و شعاع $\overline{AB}$ رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد را Q می‌نامیم.

۴) خط گذرنده از Q,P را رسم می‌کنیم.

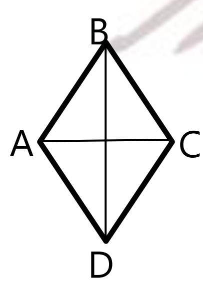
چون $\overline{AP}=\overline{BQ}$ ، $\overline{AB}=\overline{PQ}$ ا ست بنابراین چهار ضلعی ABPQ یک متوازی‌الا ضلاع ا ست. در نتیجه خط گذرنده از $\overline{PQ}$ با خط d موازی است.

روش رسم

ترسیم لوزی:

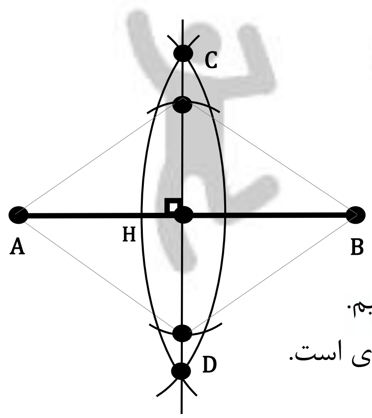
قبل از روش ترسیم، خواص لوزی را یادآوری می کنیم:

- ضلع های روبرو موازی اند.
- تمام اضلاع برابرند.
- زوایای روبرو دو به دو برابرند.
- قطرها عمود منصف یکدیگرند.
- زوایای مجاور مکمل اند.
- دارای ۲ محور تقارن است.
- قطرها نیمساز زاویه ها هستند.



تمرین پای تخته ۷: لوزی با قطرهایی به طول ۶ و ۴ رسم کنید.

پاسخ:



۱) پاره‌خط $\overline{AB}$ به طول ۶ رسم می‌کنیم.

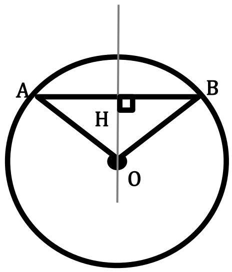
۲) عمودمنصف $\overline{AB}$ را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد با $\overline{AB}$ را H می‌نامیم.

۳) دهانه‌ی پرگار را به اندازه ۲ باز کرده و دایره‌ای به مرکز H و شعاع ۲ می‌زنیم،

۴) نقاط برخورد با عمودمنصف را D,C می‌نامیم و D,C را به B,A وصل می‌کنیم.

چون قطرها برهم عمود و منصف یکدیگر هستند پس چهارضلعی ABCD یک لوزی است.

یافتن مرکز دایره:



می‌دانیم که عمودمنصف وتر یک دایره از مرکز آن می‌گذرد.

دایره‌ای به مرکز O و وتر $\overline{AB}$ در آن در نظر بگیرید.

از O به $\overline{AB}$ عمود می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد H را می‌نامیم.

$$\overline{OH}=\overline{OH}\ ,\ \overline{OA}=\overline{OB}\ ,\ H_1=H_2=90^\circ$$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{B}H$ پس $\overline{AH}=\overline{BH}$ در نتیجه عمودمنصف وتر $\overline{AB}$ از O می‌گذرد.

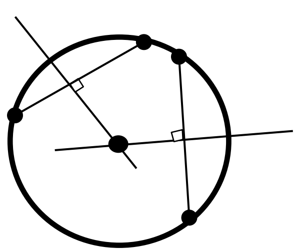
پس برای یافتن مرکز یک دایره کافیست:

۱) دو وتر از دایره را که با هم موازی نیستند رسم می‌کنیم.

۲) عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم. چون عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند،

بنابراین:

محل برخورد عمود منصف های دو وتر غیرموازی در دایره، مرکز دایره است.



روش رسم