هندسه ۱ (پایه دهم)

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

مدرس:

سیدابوذر حسینی

* قضیه‌های شرطی

هر جمله‌ی شرطی که درستی آن به اثبات نیاز دارد، **قضیه‌ی شرطی** نامیده می‌شود.

صورت کلی قضیه‌های شرطی:

اگر : «فرض قضیه»، آنگاه : «حکم قضیه»

☑ مثال: **اگر $x > 5$ باشد، آنگاه $4x > 20$ است.**

☑ مثال: **اگر در مثلث ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ باشد، آنگاه $a^2=b^2+c^2$ است. (قضیه‌ی فیثاغورس)**

عکس قضیه‌ی شرطی: اگر در قضیه‌ی شرطی، جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه‌ی شرطی به‌وجود می‌آید. عکس قضیه‌ی شرطی، خود می‌تواند یک قضیه‌ی شرطی باشد.

* اگر یک قضیه‌ی شرطی و عکس آن هر دو برقرار باشند، قضیه را **دو شرطی** می‌نامیم.

صورت کلی قضیه‌های دو شرطی:

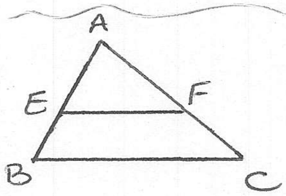
«فرض قضیه» اگر و تنها اگر «حکم قضیه»

☑ مثال: **قضیه‌ی فیثاغورس و تالس را به صورت شرطی، عکس شرطی و دو شرطی بنویسید.**

شرطی: اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است.

عکس شرطی: اگر در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آنگاه مثلث قائم الزاویه است.

دوشرطی: مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد.



شرطی: در شکل مقابل، اگر $EF \parallel BC$ باشد، آنگاه $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ است.

عکس شرطی: در شکل مقابل، اگر $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ باشد، آنگاه $EF \parallel BC$ است.

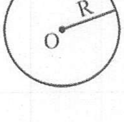
دوشرطی: در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ است اگر و تنها اگر $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ باشد.

* مکان هندسی

تعریف: مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا که دارای یک ویژگی مشترک هستند را مکان هندسی می‌نامیم، یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که این ویژگی را دارد، عضو این مجموعه است.

* طبق تعریف فوق واضح است که مسائل مکان هندسی، قضایایی دو شرطی هستند.

☑ **چند مثال ساده از مکان هندسی:**



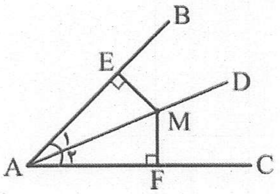
۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت، به یک فاصله‌ی ثابت می‌باشند، یک **دایره** است که نقطه‌ی ثابت، مرکز آن و فاصله‌ی ثابت، شعاع آن است.

۲- مکان فوق در فضا (یعنی مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی R می‌باشند)، یک **کره** به مرکز O و شعاع R است.

* اجزای فرعی مثلث (نیمساز، عمودمنصف ،ارتفاع، میانه)

۱) نیمساز به عنوان مکان هندسی:

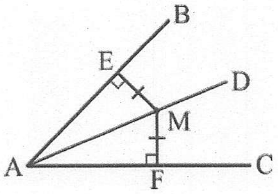
اثبات اول: اگر نقطه‌ای مانند M روی نیمساز زاویه‌ی A باشد، آنگاه از دو ضلع زاویه‌ی A به یک فاصله است.



$$\begin{cases} AM=AM & \text{وتر مشترک} \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 & \text{طبق فرض} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \overset{\triangle}{AEM} \cong \overset{\triangle}{AFM}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} ME=MF$$

اثبات دوم: اگر نقطه‌ای مانند M از دو ضلع زاویه‌ی A به یک فاصله باشد، آنگاه روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.



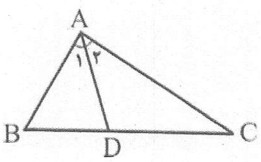
$$\begin{cases} AM=AM & \text{وتر مشترک} \\ ME=MF & \text{طبق فرض} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{AEM} \cong \overset{\triangle}{AFM}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \longrightarrow \hat{A}\ \text{نیمساز}\ AM$$

نتیجه: از دو اثبات بالا نتیجه می‌شود:

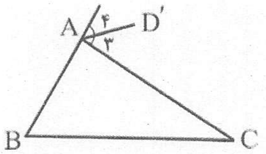
«نیمساز یک زاویه، **مکان هندسی** نقاطی از صفحه است که از دو ضلع زاویه، به یک فاصله‌اند.»

M روی نیمساز $AD \iff ME=MF$



نیمساز داخلی مثلث: نیمساز داخلی در مثلث، پاره‌خطی است که زاویه‌ی مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. ابتدای این پاره‌خط، رأس زاویه و انتهای آن بر روی ضلع مقابل زاویه می‌باشد.

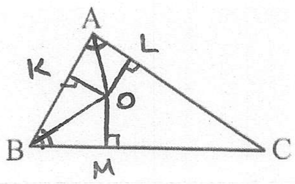
نیمساز داخلی $AD \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{\hat{A}}{2}$



نیمساز خارجی مثلث: نیمساز خارجی در مثلث، نیم‌خطی است که زاویه‌ی خارجی مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

نیمساز خارجی $AD' \Rightarrow \hat{A}_3=\hat{A}_4=\frac{180-\hat{A}}{2}$

قضیه: سه نیمساز داخلی هر مثلث همرس‌اند (در یک نقطه متقاطع‌اند).



برهان: نیمساز دو زاویه‌ی A و B را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند.
سپس از O به سه ضلع عمود می‌کنیم:

$\hat{A}$ نیمساز روی O $\longrightarrow OK=OL$ } $\longrightarrow OL=OM \longrightarrow$ O روی نیمساز $\hat{C}$ است ← سه نیمساز در O همرس اند.

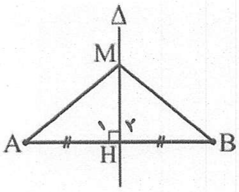
$\hat{B}$ " " O $\longrightarrow OK=OM$

نکته: محل همرسی نیمسازهای داخلی هر مثلث، همواره داخل مثلث قرار دارد و از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

$OK=OL=OM$
(مرکز دایره‌ی محاطی)

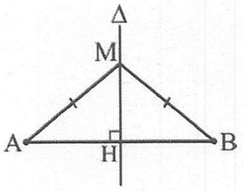
۲) عمودمنصف به عنوان مکان هندسی:

اثبات اول: اگر نقطه‌ای مانند M روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آنگاه از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.



$\begin{cases} AH=BH & \text{ط.ف} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \\ MH=MH & \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \xrightarrow{\text{اجزا نظیر}} MA=MB$

اثبات دوم: اگر نقطه‌ای مانند M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، آنگاه روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



برهان: عمود MH رسم: ①

$\begin{cases} MA=MB & \text{ط.ف} \\ MH=MH & \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}$

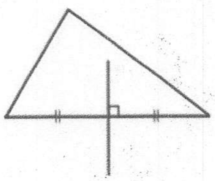
$\xrightarrow{\text{اجزا نظیر}} AH=BH$ ②

① و ② $\Longrightarrow$ MH عمودمنصف AB → M روی عمودمنصف

نتیجه: از دو اثبات بالا نتیجه می‌شود:

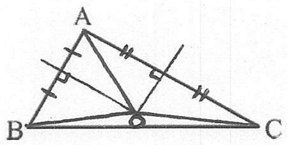
«عمودمنصف یک پاره‌خط، **مکان هندسی** نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.»

M روی عمودمنصف AB $\Leftrightarrow$ $MA=MB$



عمودمنصف در مثلث: عمودمنصف در مثلث، خطی است که از وسط یک ضلع بر آن عمود می‌شود.

قضیه: عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند.



برهان: ابتدا دو عمودمنصف اضلاع AB و AC را رسم کرده تا یکدیگر را در O قطع کنند، سپس از O به سه رأس وصل می‌کنیم:

O روی عمودمنصف AB → $OA=OB$

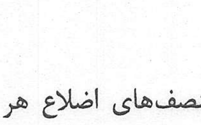
AC 〃 〃 O → $OA=OC$ → $OB=OC$ → O روی عمودمنصف BC → سه عمودمنصف در O همرس اند.

نکته‌ی ۱: محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

$OA=OB=OC$

(مرکز دایره محیطی)

نکته‌ی ۲: محل همرسی عمودمنصف‌ها، وضعیت خاصی نسبت به مثلث ندارد:

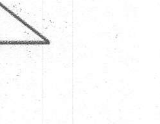


مثلث با زاویه‌ی منفرجه

محل همرسی، خارج مثلث

مثلث قائم‌الزاویه

محل همرسی، وسط وتر

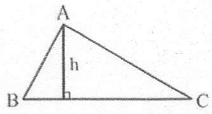


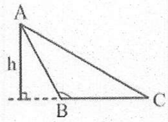
مثلث با زوایای حاده

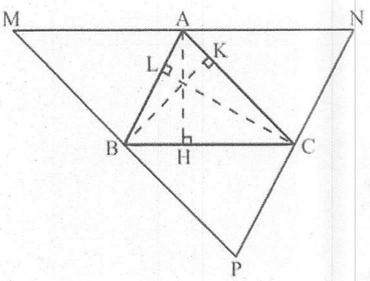
محل همرسی، داخل مثلث

۳) ارتفاع:

تعریف: ارتفاع در مثلث، پاره‌خطی است که از یک رأس بر ضلع مقابل آن رأس یا امتداد آن عمود می‌شود.







قضیه: ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.

برهان: از هر رأس مثلث ABC، خطی به موازات ضلع مقابل آن رسم می‌کنیم تا مثلث MNP به وجود آید،

$ABCN: \begin{cases} AN \parallel BC \\ AB \parallel NC \end{cases} \rightarrow$ متوازی الاضلاع $ABCN \rightarrow AN = BC$

$AMBC: \begin{cases} AM \parallel BC \\ AC \parallel MB \end{cases} \rightarrow$ متوازی الاضلاع $AMBC \rightarrow AM = BC$

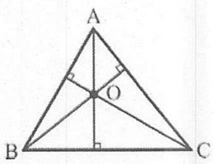
$\rightarrow AN = AM \rightarrow$ AH منصف MN است. (۱)

$\begin{cases} MN \parallel BC \\ AH \perp BC \end{cases} \rightarrow AH \perp MN \rightarrow$ AH عمود بر MN است (۲)

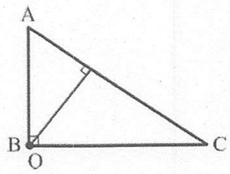
(۱) و (۲) $\rightarrow$ AH عمودمنصف MN است.

به طور مشابه ثابت می‌شود که BK عمودمنصف MP و CL عمودمنصف NP است و چون ثابت کردیم سه عمودمنصف هر مثلث همرسند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز همرس‌اند.

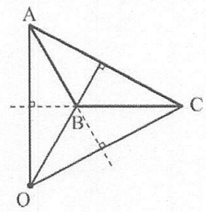
نکته: محل همرسی ارتفاع‌ها، مکان خاصی نسبت به مثلث ندارد:



مثلث با زوایای حاده
داخل مثلث



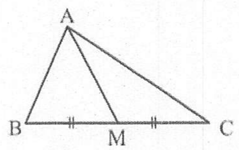
مثلث قائم‌الزاویه
روی رأس قائمه



مثلث با زاویه‌ی منفرجه
خارج مثلث

۴) میانه

میانه در مثلث، پاره‌خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل آن رأس وصل می‌کند.



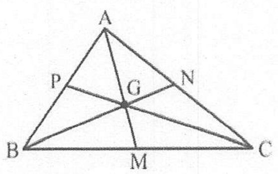
میانه $AM \Rightarrow BM = CM = \frac{BC}{۲}$

قضیه: میانه‌های هر مثلث همرس‌اند.

نکته‌ی ۱: محل همرسی میانه‌های هر مثلث دلخواه، همواره داخل مثلث قرار دارد.

نکته‌ی ۲: محل همرسی میانه‌های مثلث، **مرکز ثقل** مثلث نامیده می‌شود و معمولاً با حرف G نام‌گذاری می‌شود.

نکته‌ی ۳: مرکز ثقل مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = ۲$$

☑ مثال: **مکان هندسی نقاطی از داخل مثلث که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله باشند، کدام است؟**

۱) میانه‌ی BC   ۲) عمودمنصف BC

۳) نیمساز $\hat{B}$ ۴) نیمساز $\hat{A}$

☑ مثال: **مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مثلث که از دو رأس B و C به یک فاصله باشند، کدام است؟**

۱) نیمساز $\hat{A}$ ۲) میانه‌ی BC

۳) عمودمنصف BC   ۴) ارتفاع وارد بر BC

☑ مثال: **چند نقطه در صفحه‌ی مثلث، از رأس‌های مثلث به یک فاصله است؟**

۱) ۱   ۲) ۲   نقطه‌ی همرسی عمود منصف ها

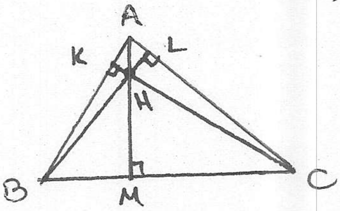
۳) ۴   ۴) بی‌شمار

تمرین:

۱- نقطه‌ی H محل همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC می‌باشد. نقطه‌ی A برای مثلث BHC چه نقطه‌ای است؟

در مثلث BHC، ارتفاع ها عبارتند از HM ، BK و CL

که مطابق شکل، در نقطه‌ی A همرس اند.



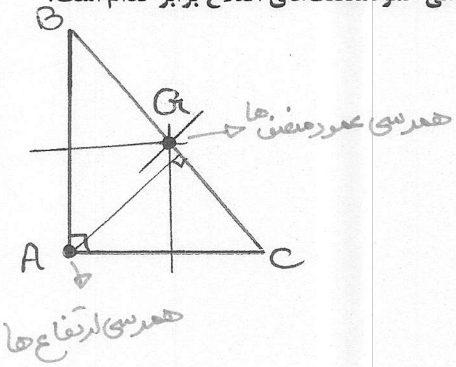
۱) محل همرسی ارتفاع‌ها

۲) مرکز ثقل

۳) محل همرسی عمودمنصف‌ها

۴) محل همرسی نیمسازها

۲- مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. فاصله‌ی نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها از نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع برابر کدام است؟



طول AG مدنظر سؤال است:

$$AG = \frac{BC}{2}$$

میانه وارد بر وتر

۱) $\frac{AB}{2}$

۲) $\frac{AC}{2}$

۳) $\frac{BC}{2}$

۴) صفر

روش کلی یافتن مکان هندسی:

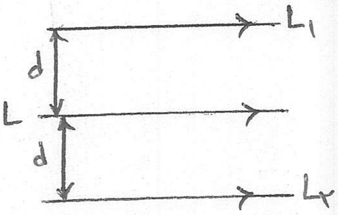
گام اول: به اندازه‌ی کافی نقطه‌هایی را که در ویژگی داده شده صدق می‌کنند، می‌یابیم.

گام دوم: این نقطه‌ها را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا تصوری شهودی از مکان هندسی موردنظر پیدا کنیم.

گام سوم: مکان هندسی را توصیف می‌کنیم.

مثال‌هایی از مکان هندسی:

☑ مثال: **مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله‌ی مشخص d می‌باشند، چیست؟**

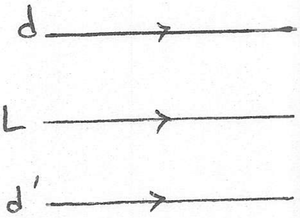


همان موردنظر، دو خط به موازات L و در دو طرف آن، به فاصله‌ی d از L می‌باشد. (خط‌های L1 و L2)

☑ مثال: **مکان فوق در فضا چه می‌شود؟**

همان فوق در فضا، استوانه‌ای است که خط L محور آن و d شعاع قاعده‌ی آن است.

☑ مثال: **مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله‌اند، چیست؟**



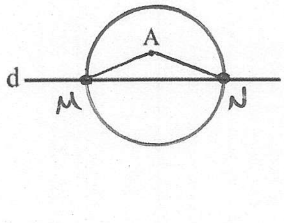
همان موردنظر، خطی است مانند L، موازی d و d' و در وسط d و d'

☑ مثال: **مکان فوق در فضا چه می‌شود؟**

همان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و P' به یک فاصله‌اند، صفحه‌ای است موازی P و P' و در وسط آن‌ها.

نکته: برخی مسائل مکان هندسی به صورت ترکیبی بوده و جواب مسأله از فصل مشترک دو یا چند مکان هندسی مختلف به دست می‌آید.

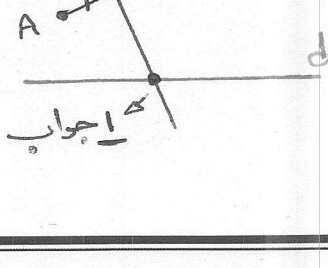
☑ مثال: **در شکل مقابل، نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی A باشند. مسأله چند جواب دارد؟**

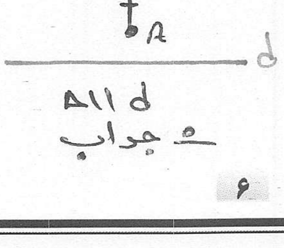


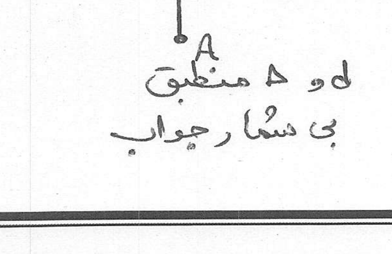
همان هندسی نقاطی که به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی A می‌باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ است. تقاطع این دایره با خط d می‌شود جواب‌های مسأله یعنی نقاط M و N.

☑ مثال: **دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسأله همواره جواب دارد؟** همان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف پاره‌خط AB است.

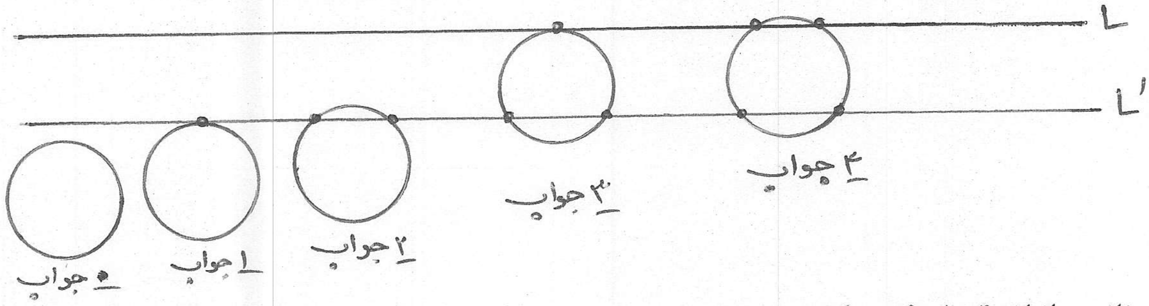
حال، تقاطع این خط عمودمنصف (Δ) با خط d می‌شود جواب‌های مسأله:



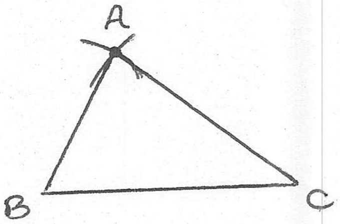




☑ مثال: دایره‌ی (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایره‌ی (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصله‌ی معلوم d باشد. مسأله چند جواب دارد؟ همان هندسی نقاطی که از خط Δ به فاصله‌ی معلوم d می باشند، دو خط موازی Δ و در طرفین آن است (L و L′). حال، تقاطع دایره‌ی (C) با L و L′ می شود جوابهای مسأله



☑ مثال: مثلثی به اضلاع ۴ و ۵ و ۶ رسم کنید.



ابتدا پاره‌خطی به طول $BC=6$ رسم می‌کنیم. حال برای یافتن راس سوم مثلث یعنی A دو کمان، یکی به شعاع ۵ و دیگری به شعاع ۴ می زنیم. این دو کمان یکدیگر را در A قطع می‌کنند. اگر از A به B و C وصل کنیم، مثلث رسم می‌شود.

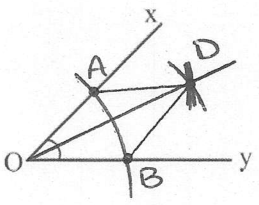
نکته: شرط این که مثلثی به اضلاع a و b و c را بتوان رسم کرد این است که:

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ a+c>b \end{cases}$$

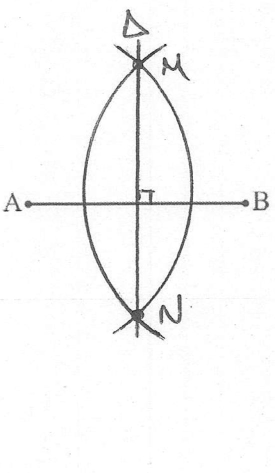
: قضیه نامساوی مثلث

* ترسیم‌های هندسی با خط کش و پرگار

روش رسم نیمساز یک زاویه:

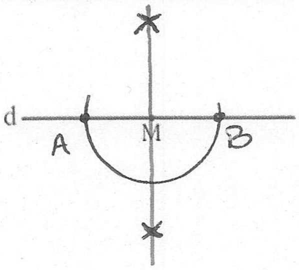


ابتدا کمانی با شعاع دلخواه رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را در نقاط A و B قطع کند. سپس به مرکز A و B و شعاع‌های یکسان به شعاع بیش از نصف AB، دو کمان می زنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند. OD نیمساز $\hat{O}$ است.



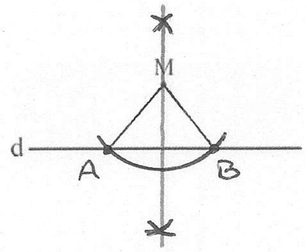
روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط:

دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف AB باز کرده و دو کمان یکسان به مرکزهای A و B می زنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند. MN عمودمنصف AB است.



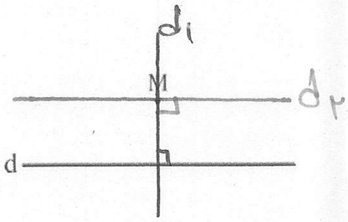
➢ **رسم خطی عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن:**

ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در A و B قطع کند. حال اگر عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، خطی داریم که از M می‌گذرد و بر d عمود است.



➢ **رسم خطی عمود بر یک خط، از نقطه‌ای خارج آن:**

مانند قسمت قبل، ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواهی که خط d را در ۲ نقطه قطع کند، کمانی رسم می‌کنیم. حال اگر عمود منصف پاره‌خط AB به وجود آمده را رسم کنیم، خطی خواهیم داشت که از M می‌گذرد و بر d عمود است.

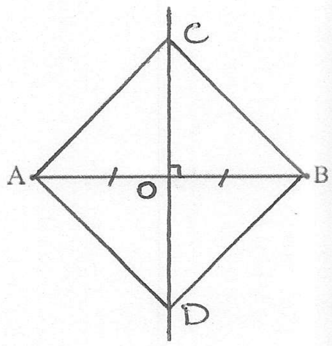


➢ **رسم خطی موازی با یک خط، از نقطه‌ای خارج آن:**

① از نقطه‌ی M، خط d_1 را عمود بر d رسم می‌کنیم.

② از نقطه‌ی M، خط d_2 را عمود بر d_1 رسم می‌کنیم.

خط d_2 با d موازی است (زیرا هر دو خط بر d_1 عمودند)، پس d_2 جواب مسأله است.



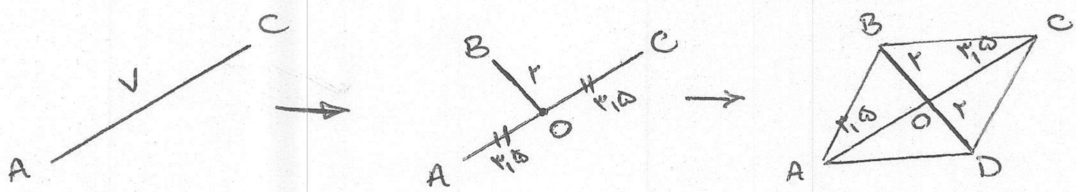
➢ **رسم مربعی که طول قطر آن داده شده است:**

ابتدا عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کرده و نقطه‌ی تقاطع آن با AB را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود منصف AB را در C و D قطع کند. اگر از C و D به A و B وصل کنیم، مربع $ACBD$ تشکیل می‌شود.

تمرین (صفحه ۱۶ کتاب):

۱- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

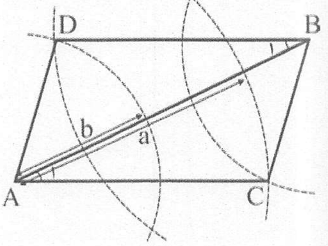
ابتدا پاره خط AC به طول ۷ را رسم کرده و وسط آن را O می نامیم. حال از نقطه ی O و در راستای غیر از راستای AC ، به اندازه ۲ پاره خطی رسم می کنیم تا نقطه ی B به دست آید. پاره خط رسم شده را از سمت دیگر به اندازه ۲ امتداد می دهیم تا نقطه ی D به دست آید و شکل کامل شود. چون راستای BD دلخواه بوده پس بی‌شمار شکل ممکن می توان رسم کرد.



۲- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطرش ۶ سانتی‌متر باشد.

روش رسم مانند سؤال ۱

۳- پاره‌خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی a و بار دیگر به اندازه‌ی b باز می‌کنیم و از نقطه‌ی A دو کمان می‌زنیم (به طوری که مجموع a و b از اندازه‌ی AB بزرگ‌تر باشد). سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطه‌ی B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟



(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند)

متوازی الاضلاع است.

رأس D روی کمانی به مرکز A و شعاع a است ← $AD=a$

" " C " " " B " a " ← $BC=a$

" " D " " " B " b " ← $BD=b$

" " C " " " A " b " ← $AC=b$

$$\rightarrow \begin{cases} AD=BC=a \\ BD=AC=b \\ AB=AB \end{cases} \xrightarrow{(ض\,ض\,ض)} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{B}_1=\hat{A}_1$$

عکس قضیه خطوط موازی و مورب ← $BD \parallel AC$

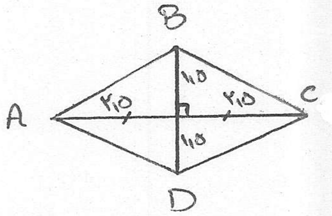
به همین ترتیب ثابت می شود: $AD \parallel BC$ ← ACBD متوازی الاضلاع

۴- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

دقیقاً روش رسم صورت سؤال قبل .

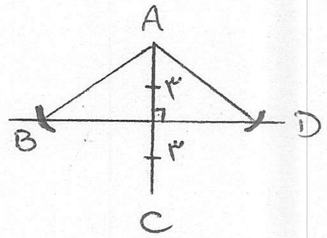
۵- می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید:

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.



پاره خط AC به طول ۵ را رسم می‌کنیم و روی عمودمنصف آن به اندازه‌ی ۱٫۵ در دو طرف امتداد می‌دهیم تا نقاط B و D به دست آیند.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

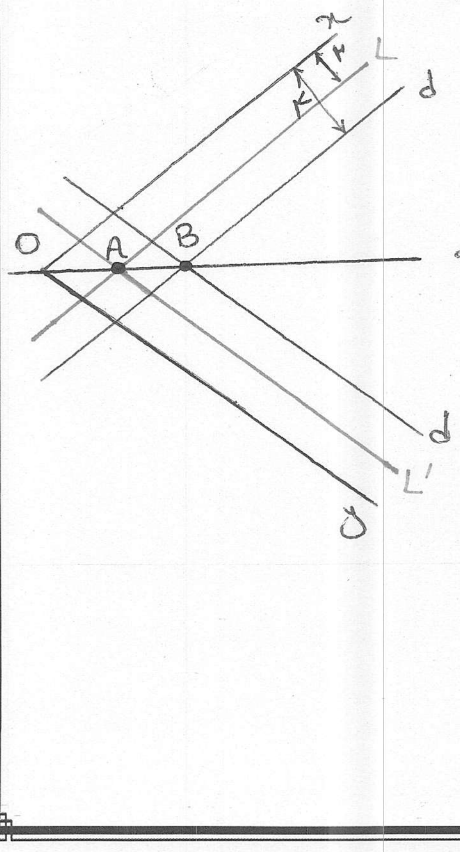


ابتدا پاره خط AC به طول ۶ را رسم می‌کنیم. بر وسط AC، عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی A، به اندازه ۵ کمان می‌زنیم تا عمودمنصف AC را در دو نقطه‌ی B و D قطع کند و شکل کامل شود.

۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید،

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۲ واحد باشد.

خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله‌ی ۲ واحد از آن‌ها رسم می‌کنیم.
محل تقاطع آنها پاسخ مسأله است. (L و L')



ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۴ واحد باشد.

خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله‌ی ۲ واحد از آن‌ها رسم می‌کنیم.
محل تقاطع آنها پاسخ مسأله است. (d و d')

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویه‌ی مورد نظر را رسم کنید.

خطی که از دو نقطه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) و (ب) می‌گذرد، زاویه را نصف می‌کند. (نقاط A و B)

۷- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

AB وتر دایره است. پس A و B روی محیط دایره اند لذا فاصله‌ی آنها تا مرکز دایره برابر است ($OA=OB$). بنابراین طبق عکس خاصیت عمودمنصف، O روی عمودمنصف AB قرار دارد.

۸- چگونه می‌توان مرکز یک دایره را مشخص کرد؟

طبق مسأله‌ی قبل، اگر دو وتر از دایره را مشخص کرده و عمودمنصف های آنها را رسم کنیم، این دو عمود منصف یکدیگر را در مرکز دایره قطع خواهند کرد.

* استدلال در هندسه

۱- **استدلال استقرایی:** روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات و نتایج.

۲- **استدلال استنتاجی:** روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

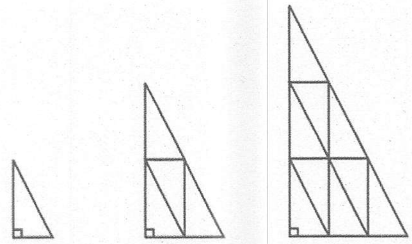
☑ مثال: **در شکل‌های زیر، تمام مثلث‌های کوچک با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.**

الف) با توجه به شماره شکل‌ها، جدول را کامل کنید.

ب) در شکل پانصدم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟

پ) حدس شما در حالت کلی چیست؟

ت) آیا می‌توانید درستی حدس خود را برای شکل هزارم توجیه کنید؟



(۱) (۲) (۳)

شماره شکل	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	......	(n)
تعداد مثلث های کوچک						

مثال فوق نمونه‌ای از استدلال استقرایی بود. همان‌طور که مشاهده شد، در این نوع استدلال نمی‌توان به قطعیت در مورد درستی حکم در حالت کلی نظر داد. اگر حکمی همواره درست نباشد، پس حالت استثنایی وجود دارد که کلیت آن را نقض می‌کند. به این حالت، مثال نقض گفته می‌شود.

*مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است، **مثال نقض** گفته می‌شود.

☑ **اگر دو زاویه مکمل باشند، آنگاه هر دو قائمه هستند. ← مثال نقض: زوایای ۳۰° و ۱۵۰°**

☑ **مجموع دو عدد گنگ، همواره گنگ است. ← مثال نقض: $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$**

* اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

ابتدا دو تعریف:

گزاره: گزاره یک جمله‌ی خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد.

نقیض یک گزاره: گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

اثبات غیرمستقیم یکی از روش‌های استدلال در هندسه است. این روش بر این اصل استوار است که از بین یک حکم هندسی و نقیض آن، تنها یکی از آن‌ها درست است.

در برهان خلف اثبات می‌کنیم که خلاف (نقیض) حکم نادرست است.

برای استفاده از برهان خلف گام‌های زیر را برمی‌داریم:

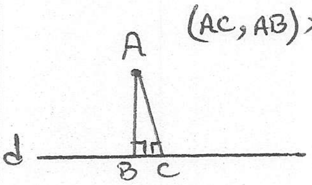
گام ۱: فرض می‌کنیم نقیض حکم درست است.

گام ۲: نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تناقض است.

گام ۳: با نادرست بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

☑ مثال: **ثابت کنید از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.**

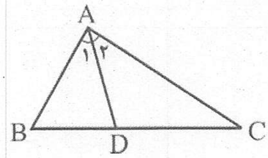
گام ۱: نقیض حکم درست است یعنی از نقطه‌ی A بیش از یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد (AC و AB)



گام ۲: $\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A}+\underbrace{\hat{B}}_{90}+\underbrace{\hat{C}}_{90}=180+A \rightarrow$ یعنی مجموع زوایای مثلث بیشتر از ۱۸۰ درجه شد که غیرممکن است ×

گام ۳: پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.

☑ مثال: **در مثلث ABC شکل مقابل، AD نیمساز زاویه‌ی A است. اگر $BD \neq CD$ باشد، ثابت کنید $AB \neq AC$ است.**



نقیض حکم: $AB = AC$

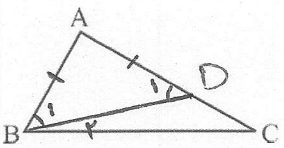
$$\begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} BD = CD \times$$ خلاف فرض

پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.

* قضایایی از استدلال استنتاجی

قضیه (نامساوی اضلاع و زوایا): اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

ف: $AC > AB$ ح: $\hat{B} > \hat{C}$



برهان: روی ضلع AC به اندازه‌ی $AD = AB$ جدا کرده، از D به B وصل می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ABD}: AB = AD \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \longrightarrow \hat{B}_1 > \hat{C} \rightarrow$

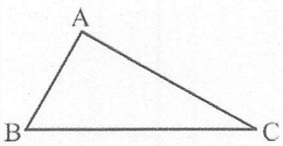
$\overset{\triangle}{DBC}$ زاویه خارجی $\hat{D}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C} \xrightarrow[\text{است که}]{\text{بدیهی}} D_1 > C$

$\xrightarrow{\text{بدیهی است که}} \underbrace{\hat{B}_1 + \hat{B}_2}_{B} > \hat{C} \rightarrow \hat{B} > \hat{C}$

عکس قضیه‌ی فوق نیز برقرار است:

قضیه: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.
اثبات با برهان خلف:

ف: $\hat{B} > \hat{C}$ ح: $AC > AB$



نقیض حکم: $AC \not> AB \xrightarrow{\text{که معادل است با}} AC \leq AB$

۲ حالت $\rightarrow$

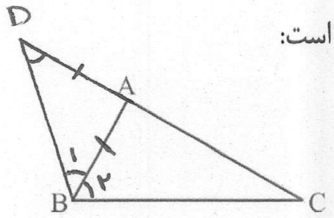
① $AC = AB \longrightarrow \hat{B} = \hat{C} \times$ خلاف فرض

② $AC < AB \xrightarrow[\text{قضیه}]{\text{طبق خود}} \hat{B} < \hat{C} \times$ خلاف فرض

پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.

پس دو قضیه‌ی فوق را می‌توان به صورت دوشرطی به شکل زیر نوشت:

"در مثلث ABC، نامساوی $AC > AB$ برقرار است اگر و تنها اگر $\hat{B} > \hat{C}$"



قضیه نامساوی مثلث: در هر مثلث، مجموع طول هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است:

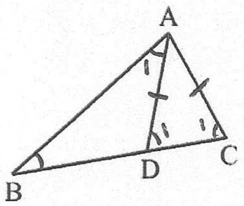
حکم: $\begin{cases} \boxed{AB+AC>BC} \\ AB+BC>AC \\ AC+BC>AC \end{cases}$

یکی از نامساوی‌ها را اثبات می‌کنیم، ۲ تای دیگر مشابه به همین اثبات می‌شود.

برهان: روی امتداد AC به اندازه‌ی AD=AB جدا کرده، از D به B وصل می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ADB}: AD=AB \to \hat{D}=\hat{B}_1 \xrightarrow{\text{بدیهی است که}} \hat{D}<\underbrace{\hat{B}_1+\hat{B}_2}_{\hat{B}}$

$\to \hat{D}<\hat{B} \xrightarrow[\text{نامساوی اضلاع و زوایا}]{\text{طبق عکس قضیه}} \underbrace{DC}_{\underbrace{AD+AC}_{AB}}>BC \Rightarrow AB+AC>BC$



☑ مثال: در شکل مقابل، $AC=AD$ می‌باشد. ثابت کنید: $AB>AC$

$\overset{\triangle}{ACD}: AD=AC \to \hat{D}_1=\hat{C}_1$

$\overset{\triangle}{ADB}$ زاویه خارجی $\hat{D}_1=\hat{B}+\hat{A}_1 \xrightarrow{\text{بدیهی}} \hat{D}_1>\hat{B}$ $\Rightarrow \hat{C}_1>\hat{B}$

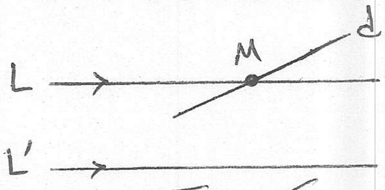
$\xrightarrow{\text{عکس قضیه نامساوی}} \overset{\triangle}{ABC}: AB>AC$

☑ مثال: اعداد ۱ + ۲a و ۵ و ۱۲ اضلاع مثلثی می‌باشند. حدود a را بیابید.

$\begin{cases} 2a+1+12>5 \to 2a>-8 \to a>-4 \\ 2a+1+5>12 \to 2a>6 \to a>3 \\ 5+12>2a+1 \to 16>2a \to a<8 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 3<a<8$

تمرین [صفحه ۲۷ کتاب]:

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط، فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.



L و 'L موازی‌اند و خط d، خط L را در M قطع کرده است.

نقیض حکم: خط d، خط 'L را قطع نمی‌کند. پس d موازی 'L است. در نتیجه از نقطه‌ی M دو خط d و L موازی 'L رسم شده است که غیر ممکن است.

پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم اثبات می‌شود.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB\neq AC$ باشد، آنگاه $\hat{B}\neq\hat{C}$.

نقیض حکم: $\hat{B}=\hat{C}$ ⟵ $A\hat{B}C$ متساوی‌الساقین ⟵ $AB=AC$ خلاف فرض

پس نقیض حکم نادرست بوده و درستی حکم ثابت می‌شود.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

نادرست - مثلث با زوایای ۱۵۰، ۲۰ و ۱۰ درجه را در نظر بگیرید.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

نادرست - در مثلث قائم‌الزاویه، از بین ۳ ارتفاع، دوتا از آنها با دو ضلع مثلث برابرند.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-2)\times180°$

هر n ضلعی را با رسم قطرهایش از یکی از رأس‌ها، می‌توان به $(n-2)$ مثلث تقسیم کرد. چون مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180°$ است، لذا مجموع زوایای داخلی n ضلعی می‌شود: $(n-2)\times180°$

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

لوزی‌ای وجود دارد که مربع نیست.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

هر مستطیل یک مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

وجود دارد مثلثی که بیش از یک زاویه قائمه دارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه‌ی روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

در هر مثلث، اگر دو زاویه برابر باشند، آنگاه دو ضلع رو به رو به آنها نیز برابرند.

دوشرطی: در هر مثلث، دو زاویه با هم برابرند، اگر و تنها اگر دو ضلع رو به رو به آنها با هم برابر باشند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

اگر قطرهای یک چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند، آنگاه آن چهارضلعی لوزی است.

دوشرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهایش عمودمنصف یکدیگر باشند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

در هر مثلث، اگر سه زاویه با هم برابر باشند، آنگاه سه ضلع برابرند.

دوشرطی: در هر مثلث سه ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر سه زاویه برابر باشند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند، آنگاه شعاع‌های برابر نیز دارند.

دوشرطی: دو دایره شعاع‌های برابر دارند اگر و تنها اگر مساحت‌های برابر داشته باشند.