



مدرس: سيدابوذر حسيني

*** نسبت و تناسب**

تعریف: نسبت عدد a به عدد $b \neq 0$ عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$

تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ یک تناسب نامیده می‌شود: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال: در تناسب‌های زیر، مقدار x و y را بیابید.

الف) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$ طرفین - وسطین $\rightarrow 4x = 3x + 2 \rightarrow x = 2$

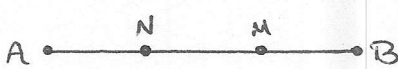
ب) $\frac{3}{y} = \frac{y}{27}$ $\rightarrow y^2 = 3 \times 27 = 81 \rightarrow y = \pm 9$

نکته: در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، عدد b میانگین هندسی دو عدد a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی $b^2 = ac$ به دست می‌آید.

مثال: میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۲۵ را بیابید.

$b^2 = 4 \times 25 = 100 \rightarrow b = \pm 10$

تست: روی پاره خط $AB = 12$ ، دو نقطه‌ی M و N را چنان انتخاب می‌کنیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 2$ ، در این صورت طول پاره خط MN کدام است؟

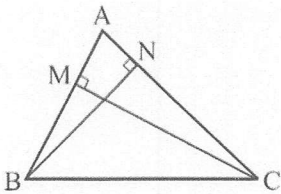


$\frac{AM}{MB} = 2 \xrightarrow{\text{ترکیب درخرج}} \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \rightarrow AM = 8$ ۳ (۱)

$\frac{BN}{AN} = 2 \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AB}{AN} = 3 \rightarrow AN = 4$ ۴ (۳) ✓

$MN = AM - AN = 8 - 4 = 4$ ۶ (۲)

مثال: با توجه به شکل مقابل، جاهای خالی را پر کنید.



الف) اگر AB را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می‌شود:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CM$

ب) اگر AC را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می‌شود:

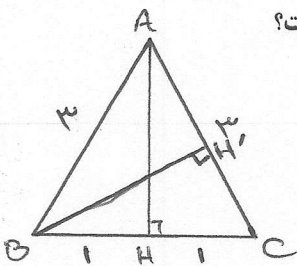
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BN$

پ) از (الف) و (ب) داریم:

$AB \times CM = AC \times BN \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{CM}$

نتیجه: در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌ها... وارد بر آن‌ها برابر است.

تست: اگر طول اضلاع مثلثی ۲ و ۳ و ۳ سانتی‌متر باشد، طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتی‌متر است؟



ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم: ۴√۲ (۱۷) ✓

حال اگر ارتفاع BH' را رسم کنیم، طبق نتیجه فوق داریم: ۴√۴ (۱۲) ✓

$AH \times BC = BH' \times AC$ √۲ (۱۳) ✓

$\sqrt{2} \times 2 = BH' \times 3 \rightarrow BH' = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ √۳ (۱۴) ✓

ویژگی‌های تناسب:

(۱) در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ با عمل طرفین-وسطین تساوی $ad=bc$ را خواهیم داشت.

(۲) در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان کسرها را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ را به دست آورد.

(۳) در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله‌ی میانی را عوض کرد و تناسب $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ را به دست آورد.

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} & \text{ترکیب در صورت} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} & \text{ترکیب در مخرج} \end{cases}$

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} & \text{تفزیل در صورت} \\ \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} & \text{تفزیل در مخرج} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

۷) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \rightarrow \begin{cases} \frac{a+c}{b+d} = k \\ \frac{a+c+e}{b+d+f} = k \end{cases}$

$\frac{x-y}{2x+y} = \frac{2}{5}$ *طرفین و سطحین* $\rightarrow 5x-5y = 4x+2y$
 $\rightarrow 5x-4x = 5y+2y \rightarrow x=7y \rightarrow \frac{x}{y} = 7$

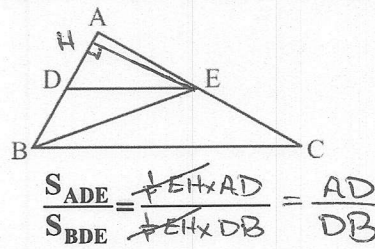
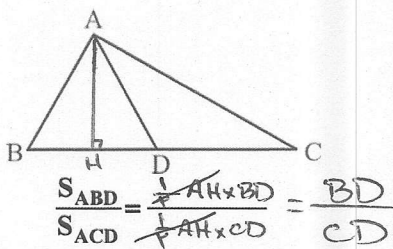
تست: اگر $\frac{x-y}{2x+y} = \frac{2}{5}$ باشد، کدام است $\frac{x}{y}$ ؟

- $\frac{7}{2}$ (۲) ۷ (۱) ✓
- $\frac{5}{3}$ (۴) ۵ (۳)

مثال: اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 5$ باشد، مقدار $\frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'}$ را بیابید.

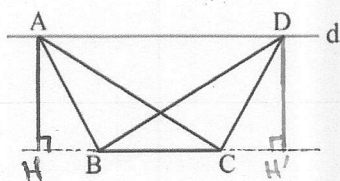
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 5 \rightarrow \frac{2a}{2a'} = \frac{3b}{3b'} = \frac{-4c}{-4c'} = 5$ *نسبت تناسب* $\rightarrow \frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'} = 5$

مثال: در شکل‌های زیر، نسبت مساحت دو مثلث خواسته شده را بنویسید.



نتیجه ۱: هرگاه اندازه‌های ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها.

نتیجه ۲: اگر دو مثلث یک رأس مشترک داشته باشند و قاعده‌ی مقابل به این رأس در دو مثلث روی یک خط راست قرار داشته باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های آن‌ها.



مثال: در شکل مقابل، $d \parallel BC$ است. نشان دهید: $S_{ABC} = S_{DBC}$.
 $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \times AH$ *فاصله موازی*
 $S_{DBC} = \frac{1}{2}BC \times DH'$ *فاصله موازی*
 $\rightarrow S_{ABC} = S_{DBC}$ *چون $AH = DH'$*

نتیجه: اگر دو مثلث، قاعده‌ی مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده‌ی مشترک، روی یک خط موازی این قاعده باشند، مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.

تعرین (صفحه ۳۳ کتاب):

۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید. ویرنی $\sqrt{\text{نسبت}}$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{3}{5} \rightarrow x+y+z = \frac{3 \times 11}{5} = \frac{33}{5}$$

۲- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

$$b^2 = 8 \times 10 = 80 \rightarrow b = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

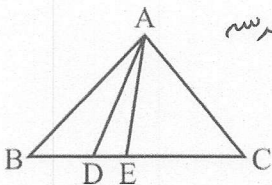
۳- طول های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ سانتی متر است. طول های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

بلندترین ارتفاع پیکوتاه ترین ضلع ولرد می شود:

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} \times 4 \times h_p = \frac{1}{2} \times 8 \times h_p$$

$$h_p = \frac{4\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{BD}{DE}$ را به دست آورید. هاعده ها هر سه مثلث روی یک خط بوده و رأس A در هر سه



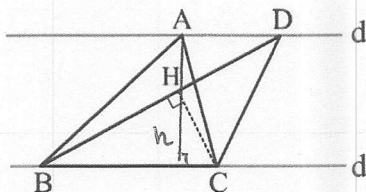
نسبت است و پس نسبت مساحت ها ۶ برابر نسبت قاعده ها است.

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}} = 3 \rightarrow \frac{EC}{DE} = 3 \rightarrow DE = \frac{1}{3} EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}} = 2 \rightarrow \frac{EC}{BD} = 2 \rightarrow BD = \frac{1}{2} EC$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + EC}{DE} = \frac{\frac{1}{2} EC + \frac{1}{3} EC + EC}{\frac{1}{3} EC} = \frac{\frac{11}{6} EC}{\frac{1}{3} EC} = \frac{11}{2}$$

۵- در شکل مقابل، $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC برابر 8 cm^2 است. اگر $BD = 6 \text{ cm}$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD را به دست آورید.

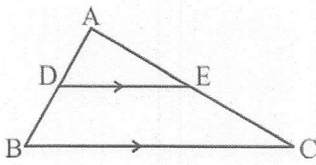


$$S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2} BC \times h \rightarrow S_{DBC} = 8$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{BD}{4} \times CH = 8 \rightarrow 3CH = 8 \rightarrow CH = \frac{8}{3}$$

*** قضیه تالس**

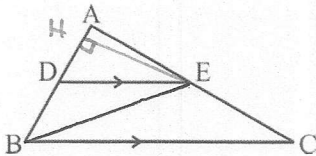
قضیه: در مثلث ABC شکل مقابل، اگر پاره خط DE موازی BC رسم شود، آنگاه پاره خطهای ایجاد شده روی AB و AC با یکدیگر متناسباند:



فرض: $DE \parallel BC$

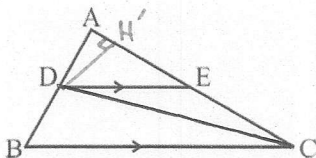
جزء به جزء حکم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow$

اثبات: مرحله اول: از E به B وصل می‌کنیم:



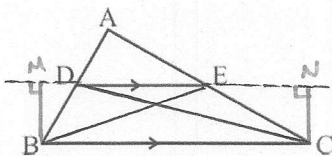
$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{1}{2} EH \times AD}{\frac{1}{2} EH \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (1)$$

مرحله دوم: از D به C وصل می‌کنیم:



$$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AE}{\frac{1}{2} DH' \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (2)$$

مرحله سوم: حال باید نشان دهیم: $S_{BDE} = S_{CDE}$



$$\begin{aligned} S_{BDE} &= \frac{1}{2} DE \times BM \\ S_{CDE} &= \frac{1}{2} DE \times CN \end{aligned} \quad \begin{array}{l} BM = CN \\ \text{فاصله دو خط} \\ \text{موازی برابر} \end{array} \rightarrow S_{BDE} = S_{CDE} \quad (3)$$

(1), (2), (3) \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} = \frac{AE}{EC} \\ S_{BDE} = S_{CDE} \end{array} \right. \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

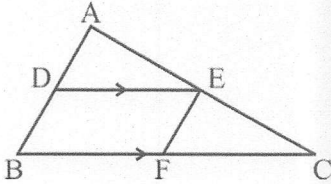
جزء به جزء

نتیجه ۱:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

جزء به کل از پال

نتیجه ۲ (تعمیم قضیه تالس):



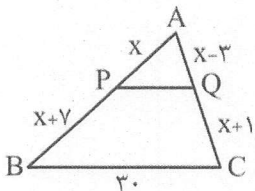
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

برهان: مطابق شکل، از نقطه E، پاره خط EF موازی را موازی AB رسم می کنیم،

$$\begin{cases} DE \parallel BF \\ DB \parallel EF \end{cases} \rightarrow \text{موازی الاضلاع} \rightarrow DEFB \rightarrow DE = BF$$

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به کل از پال}} \frac{DE}{BF} = \frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

مثال: در شکل مقابل، $PQ \parallel BC$ است:



الف) مقدار x را بیابید.

$$PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{x-3}{x+1}$$

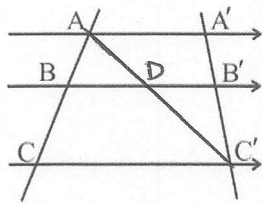
$$\rightarrow x(x+1) = (x-3)(x+7) \rightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - 21$$

$$\rightarrow x - 4x = -21 \rightarrow -3x = -21 \rightarrow x = 7$$

ب) طول PQ را بیابید.

$$\text{جزء به کل: } \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \rightarrow \frac{PQ}{30} = \frac{7}{14} \rightarrow PQ = 15$$

تست: در شکل مقابل می دانیم $AB=16$ و $BC=24$ و $A'C'=30$ ، طول $A'B'$ چقدر است؟



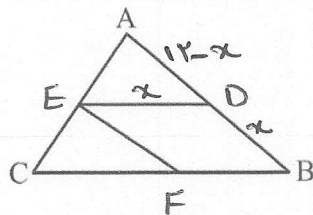
برهان: از A به C وصل می کنیم:

$$\Delta ACC': \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC'} \Rightarrow \frac{16}{24} = \frac{A'B'}{30-A'B'}$$

$$\Delta A'C': \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AD}{DC'}$$

$$\rightarrow 40 - 2A'B' = 3A'B' \Rightarrow 5A'B' = 40 \Rightarrow A'B' = 8$$

تست: در شکل مقابل، یک لوزی در مثلث ABC محاط شده است به طوری که B، رأس لوزی و دو ضلع مجاور آن روی BC و AB قرار دارد. اگر $AB=12$ و $BC=18$ و $AC=9$ باشد، طول ضلع لوزی کدام است؟

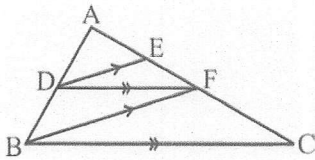


ضلع لوزی را x می گیریم:

$$\text{جزء به کل: } \frac{x}{BC} = \frac{AD}{AB} \rightarrow \frac{x}{18} = \frac{12-x}{12}$$

$$\rightarrow 5x = 34 \rightarrow x = \frac{34}{5}$$

مثال مهم: در شکل مقابل، $DE \parallel BF$ و $DF \parallel BC$ است:



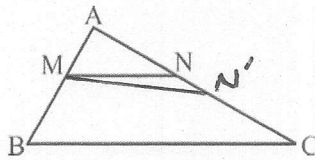
الف) ثابت کنید: $\frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}$

$$\begin{aligned} \triangle ABF: DE \parallel BF &\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EF} \\ \triangle ABC: DF \parallel BC &\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}$$

ب) ثابت کنید: $AF^2 = AE \times AC$ (AF میانگین هندسی AE و AC است)

$$\begin{aligned} \triangle ABF: \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AF} \\ \triangle ABC: \frac{AD}{AB} &= \frac{AF}{AC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF^2 = AE \times AC$$

عکس قضیه تالس:



در مثلث ABC، اگر نقاط M و N روی اضلاع AB و AC طوری انتخاب شوند که تناسب

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

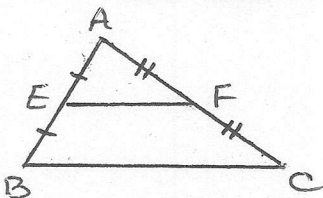
برقرار باشد، آنگاه $MN \parallel BC$ است. اثبات پارچه خفت: فرض کنیم

MN موازی BC نیست پس پاره خطی مانند MN' موازی BC وجود دارد:

$$MN' \parallel BC \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC} \xrightarrow{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}} AN' = AN \text{ غیر ممکن}$$

پس فرض خلف (نقض حکم) نادرست بوده و درستی حکم یعنی موازی بودن MN با BC ثابت می شود.

مثال مهم (قضیه میانه خط مثلث): ثابت کنید پاره خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل می کند، موازی و نصف ضلع سوم است.



$$\begin{aligned} \text{ف: } \begin{cases} AE = EB \\ AF = FC \end{cases} & \quad \text{ح: } \begin{cases} EF \parallel BC \\ EF = \frac{BC}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = 1 \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} EF \parallel BC$$

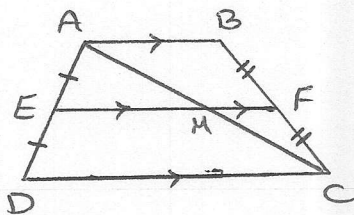
$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{EF}{BC} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow EF = \frac{BC}{2}$$

مثال مهم (قضیه میانه خط ذوزنقه): ثابت کنید پاره خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می کند، موازی و نصف مجموع دو قاعده است.

$$\begin{aligned} \text{ف: } \begin{cases} AE = ED \\ BF = FC \end{cases} & \quad \text{ح: } \begin{cases} EF \parallel AB \text{ و } CD \\ EF = \frac{AB+CD}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

با فرض اثبات قسمت اول حکم، قسمت دوم را فقط اثبات می کنیم:



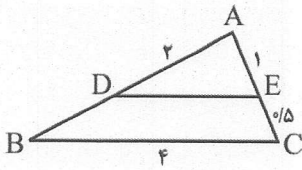
$$\triangle ADC: EM \parallel DC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{EM}{DC} = \left(\frac{AE}{AD}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow EM = \frac{DC}{2}$$

$$\triangle ABC: MF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{MF}{AB} = \left(\frac{CF}{CB}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow MF = \frac{AB}{2}$$

$$EF = EM + MF = \frac{DC}{2} + \frac{AB}{2} \rightarrow EF = \frac{AB+CD}{2}$$

تقریباً [صفحه ۳۶ کتاب]:

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. با توجه به اندازه‌ی پاره‌خط‌ها طول‌های AB و DE را به دست آورید.



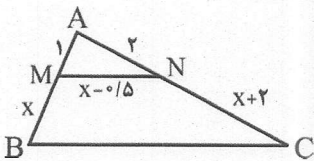
جزء به جزء:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{1}{11.5} = \frac{2}{AB} = \frac{DE}{4} \rightarrow DE = \frac{4}{11.5}$$

$$\frac{1}{11.5} = \frac{2}{AB} \rightarrow AB = 23$$

$$\frac{1}{11.5} = \frac{DE}{4} \rightarrow DE = \frac{4}{11.5}$$

۲- در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$ باشد، مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.



جزء به جزء:

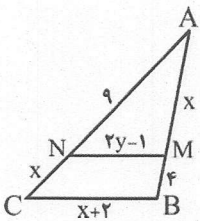
$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \rightarrow 2x = x+2 \rightarrow x = 2$$

جزء به کل:

$$\frac{x-0.5}{BC} = \frac{1}{1+x} \rightarrow \frac{1.5}{BC} = \frac{1}{3} \rightarrow BC = 3 \times 1.5$$

$$\rightarrow BC = 4.5$$

۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.



جزء به جزء:

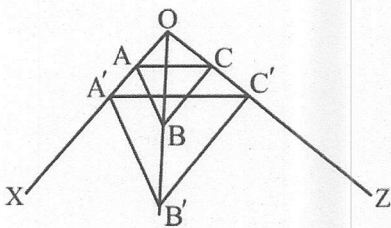
$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{x-1} \rightarrow 2(x-1) = x \rightarrow 2x - 2 = x \rightarrow x = 2$$

جزء به کل:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \rightarrow \frac{2y-1}{x+2} = \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{2y-1}{4} = \frac{1}{3} \rightarrow 3(2y-1) = 4$$

$$\rightarrow 6y - 3 = 4 \rightarrow 6y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{6}$$

۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ است. با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



$\triangle OA'B': AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$

$\triangle OB'C': BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'}$

$\frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'}$

$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} \triangle OA'C': AC \parallel A'C'$

۵- در متن جزوه حل شد.

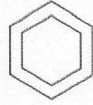
۶- در کتاب حل شود.

۷- در متن جزوه حل شد.

۸- در کتاب حل شود.

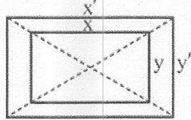
*** تشابه**

تعریف: دو چندضلعی را متشابه گوئیم هرگاه زوایای نظیرشان با هم برابر بوده و اضلاع نظیرشان با هم متناسب باشند.



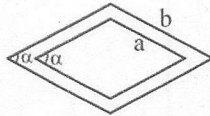
نتیجه ۱: دو ضلعی منتظم همواره با یکدیگر متشابه‌اند.

نتیجه ۲: دو مستطیل زاویه‌هایشان همواره برابر است، لذا اگر نسبت طول به عرضشان نیز برابر باشد، متشابه‌اند.



$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Rightarrow \text{دو مستطیل متشابه‌اند}$$

نتیجه ۳: دو لوزی اضلاعشان همواره متناسب است، پس اگر یک زاویه‌ی برابر داشته باشند، متشابه‌اند.



تست: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

(۲) دو مثلث قائم‌الزاویه همواره متشابه‌اند.

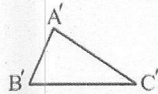
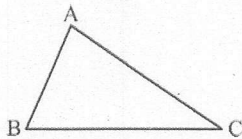
(۱) دو مستطیل همواره متشابه‌اند.

(۴) دو لوزی همواره متشابه‌اند.

(۳) دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه‌اند.

مثلث‌های متشابه:

هرگاه زوایای دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر و اضلاع نظیر، متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

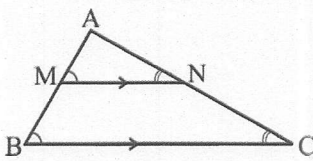


$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

k را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم.

قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

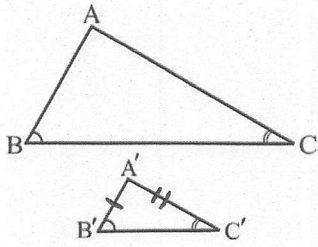
اثبات:

$$MN \parallel BC \begin{cases} \xrightarrow{\text{موازی}} \hat{M} = \hat{B} \quad (1) \\ \xrightarrow{\text{موازی}} \hat{N} = \hat{C} \quad (2) \end{cases}$$

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها، سه حالت مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم. راهبرد اصلی ما برای اثبات این سه قضیه این است که روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا کرده و ثابت می‌کنیم که MN موازی BC است. حالات تشابه دو مثلث

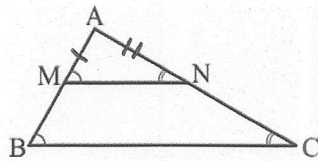


۱- هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی

A'B' و A'C' جدا می‌کنیم:



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ \end{cases} \begin{matrix} B = B' \\ c = c' \end{matrix} \rightarrow \hat{A} = \hat{A}' \quad (1)$$

$$\begin{cases} AM = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AN = A'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق برهان}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C' \quad (2)$$

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{B}' \\ \hat{N} = \hat{C}' \\ MN = B'C' \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{M} = \hat{B}' \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق برهان}} \hat{M} = \hat{B} \xrightarrow{\text{عکس قضیه خطوط موازی و مورب}} MN \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

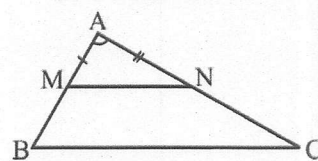
۲- هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌ی بین این دو ضلع در دو مثلث برابر باشد، دو مثلث

متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی

A'B' و A'C' جدا می‌کنیم:

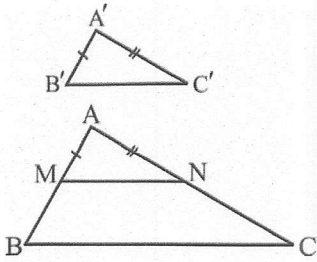


$$\begin{cases} AM = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AN = A'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق برهان}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C' \quad (1)$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

۳- هرگاه اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی

A'B' و A'C' جدا می‌کنیم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{طبق فرض داریم}} \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

طبق قضیه امساکی تشابه

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \quad (1)$$

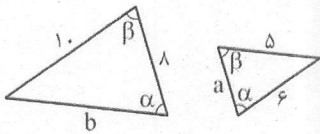
فرض: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ جزء به کل

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$MN = B'C' \Rightarrow \begin{cases} MN = B'C' \\ AM = A'B' \\ AN = A'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض فرض)}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C' \quad (2)$$

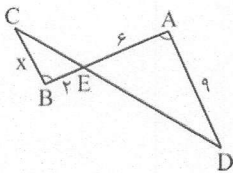
$$(1), (2) \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

نکته: در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناسب، روبرو به زاویه‌های برابرند.



تست: دو مثلث مقابل متشابه‌اند. کدام است a+b؟

$$\frac{10}{a} = \frac{12}{\alpha} = \frac{14}{\beta} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases} \rightarrow a+b = 16$$

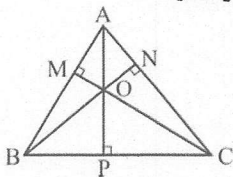


تست: در شکل مقابل، $\hat{A} = \hat{B}$ است. اندازه‌ی پاره‌خط BC کدام است؟

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \end{cases} \rightarrow \triangle AED \sim \triangle BEC \rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{4}{2} = \frac{9}{x} \rightarrow x = 9$$

تست: در شکل مقابل، M و N پای ارتفاع‌های مثلث ABC می‌باشند. چند مثلث متشابه با مثلث AOM وجود دارد؟



$$\triangle AOM \sim \triangle OPC \sim \triangle ABP \sim \triangle CBM$$

تست: طول اضلاع یک مثلث ۳ و ۴ و ۶ می‌باشد. این مثلث با مثلثی با کدام طول اضلاع متشابه است؟

۱۲ و ۱۰ و ۷/۵ (۴)

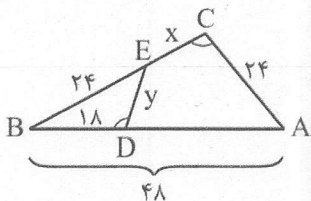
۶ و ۹ و ۴/۵ (۳✓)

۱۸ و ۸ و ۱۹ (۲)

۶ و ۶ و ۸ (۱)

$$\frac{3}{4.5} = \frac{4}{4} = \frac{6}{9}$$

مثال: در شکل مقابل، $\hat{C} = \hat{D}$ می‌باشد. x و y را بیابید.

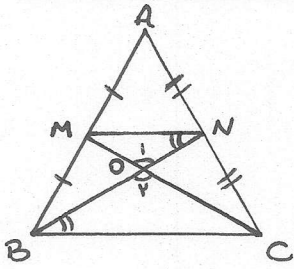


$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

$$\rightarrow \frac{18}{48} = \frac{12}{x+18} = \frac{y}{48}$$

$$\rightarrow \frac{18}{48} = \frac{12}{x+18} \rightarrow x = 12$$

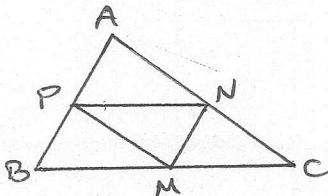
$$\rightarrow \frac{18}{48} = \frac{y}{48} \rightarrow y = 18$$



مثال: در شکل مقابل، BN و CM دو میانه‌ی مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\triangle OMN \sim \triangle OBC$

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$ $\xrightarrow{\text{عکس تالس}}$ $MN \parallel BC$ $\xrightarrow{\text{بنابراین } \angle N = \angle B}$

$\begin{cases} \angle N = \angle B \\ \angle O_1 = \angle O_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle OMN \sim \triangle OBC$

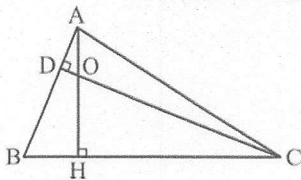


مثال: وسط‌های اضلاع مثلث ABC را M و N و P می‌نامیم. نشان دهید: $\triangle MNP \sim \triangle ABC$

MP و NP میان خط‌های مثلث ABC با سینه، لذا داریم:

$\begin{cases} MN = \frac{1}{2} AB \\ MP = \frac{1}{2} AC \\ NP = \frac{1}{2} BC \end{cases} \rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}$ $\xrightarrow{\text{نسب متساوی}} \triangle MNP \sim \triangle ABC$

تست: در شکل مقابل، AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $AD = DO = \frac{1}{3} OH = 12$ ، طول HC کدام است؟

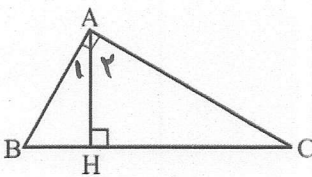


$\begin{cases} \angle O_1 = \angle O_2 \\ \angle H = \angle D = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle AOD \sim \triangle COH \rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{AD}{CH} = \frac{OD}{OH}$

- ۱۶۵ (۱)
- ۱۷۰ (۲)
- ۱۷۵ (۳)
- ۱۸۰ (۴) ✓

$\rightarrow \frac{1}{HC} = \frac{1}{34} \rightarrow \frac{1}{HC} = \frac{1}{8 \times 4} \rightarrow HC = 180$

مثال مهم (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه): در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC شکل مقابل،



الف) ثابت کنید دو مثلث ABH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AB^2 = BH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ABH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{BC} = \frac{AB}{BC}$

\downarrow

$AB^2 = BH \times BC$

ب) ثابت کنید دو مثلث ACH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AC^2 = CH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ACH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CH}{BC} = \frac{AC}{BC}$

\downarrow

$AC^2 = CH \times BC$

پ) با استفاده از دو قسمت (الف) و (ب) قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases} \xrightarrow{+} AB^2 + AC^2 = BH \times BC + CH \times BC = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$BC \times (BH + CH)$

ت) ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AH^2 = BH \times CH$ (AH واسطه هندسی بین BH و CH است)

$\triangle ABH: \hat{A}_1 + \hat{B} = 90^\circ \xrightarrow{A_1 + A_2 = 90^\circ} \hat{A}_2 = \hat{B}$

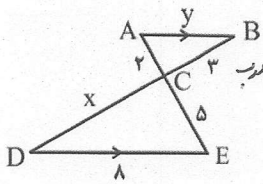
$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ABH \sim \triangle ACH \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$

\downarrow

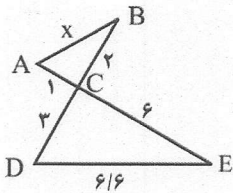
$AH^2 = BH \times CH$

تمرین [صفحه ۴۲ کتاب]:

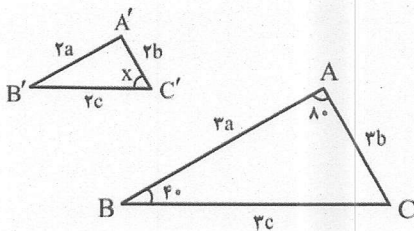
۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید.



$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{x} = \frac{8}{y} \Rightarrow y = 14 \Rightarrow \frac{14}{5} \\ \downarrow \\ x = \frac{15}{2}$$

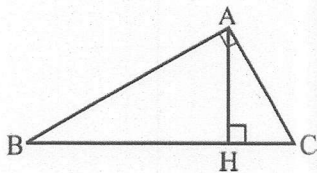


$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{A} = \hat{D} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{4} = \frac{x}{y} \\ \downarrow \\ x = 2, y = 4$$



$$\frac{r_a}{r_a} = \frac{r_b}{r_b} = \frac{r_c}{r_c} \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \Rightarrow \hat{C}' = \hat{C}$$

$$x + 40 + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{C} = 40 \Rightarrow x = 40$$



۲- در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، به کمک روابط طولی، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

۱) $BH=9$, $CH=4$, $AH=?$, $AB=?$, $AC=?$

$$AH^2 = BH \times CH = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

$$AB^2 = BH \times BC = 9 \times (9+4) = 9 \times 13 \Rightarrow AB = 3\sqrt{13}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 4 \times 13 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}$$

۲) $AB=10$, $BC=12$, $AC=?$, $AH=?$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 10^2 + AC^2 = 12^2 \Rightarrow AC^2 = 144 - 100 = 44 \Rightarrow AC = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 44 = CH \times 12 \Rightarrow CH = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$$

$$AH^2 + CH^2 = AC^2 \Rightarrow AH^2 + (\frac{11}{3})^2 = 44 \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

۳) $AB=8$, $AC=6$, $BH=?$, $CH=?$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 10$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 8^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = \frac{64}{10}$$

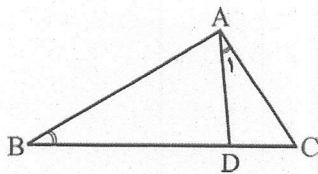
$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 6^2 = CH \times 10 \Rightarrow CH = \frac{36}{10}$$

۴) $AB=8$, $AH=4$, $BC=?$, $AC=?$

$$\triangle ABH: AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow 4^2 + BH^2 = 8^2 \Rightarrow BH^2 = 48 \Rightarrow BH = 4\sqrt{3}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 8^2 = 4\sqrt{3} \times BC \Rightarrow BC = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 8^2 + AC^2 = \frac{14^2}{3} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



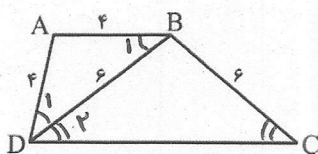
۳- در شکل مقابل $\hat{A}_1 = \hat{B}$ و $AC = 4$ و $BD = 6$ است. طول BC را به دست آورید.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{z.z} \triangle ACD \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{\frac{4}{f}}{BC} = \frac{\frac{BC-6}{f}}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{4}{BC} = \frac{BC-4}{4} \rightarrow 14 = BC^2 - 4BC$$

$$\rightarrow BC^2 - 4BC - 14 = 0 \rightarrow (BC-1)(BC+2) = 0$$

\downarrow
 $BC = 1$ $\rightarrow BC = -2$ غلط



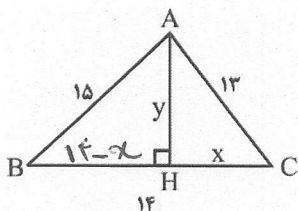
۴- در شکل مقابل، ABCD دوزنقه است. طول قاعده‌ی CD را به دست آورید.

$$\begin{aligned} BC = BD &\rightarrow \hat{D}_2 = \hat{C} \\ AB = AD &\rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB \parallel DC, \text{ و } BD &\rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} BC = BD \\ AB = AD \\ AB \parallel DC, \text{ و } BD \end{aligned}} \right\} \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C} = \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

س دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ به حالت دوزاویه هستند؛

$$\rightarrow \frac{\frac{f}{AB}}{\frac{BD}{f}} = \frac{\frac{f}{AD}}{\frac{BC}{f}} = \frac{\frac{f}{BD}}{DC} \rightarrow fDC = 24 \rightarrow DC = 9$$

۵- در شکل مقابل، مثلثی به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



$$\begin{aligned} \triangle ACH: x^2 + y^2 &= 13^2 \\ \triangle ABH: (14-x)^2 + y^2 &= 15^2 \end{aligned} \quad \ominus \rightarrow x^2 - (14-x)^2 = 13^2 - 15^2$$

$$\rightarrow x^2 = 194 - x^2 + 28x = 179 - 225$$

$$\rightarrow 28x = 194 + 149 - 225 = 118 \rightarrow x = 5$$

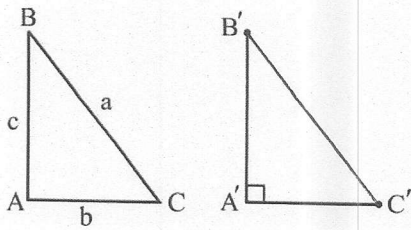
$$\rightarrow 5^2 + y^2 = 13^2 \rightarrow y^2 = 179 - 25 = 154 \rightarrow y = 12$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 14 = 84$$

۶- در کتاب حل شود.

۷- در کتاب حل شود.

۸- با قضیه فیثاغورس آشنا هستید. این قضیه می‌گوید: اگر در مثلث ABC ، زاویه A قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$ (الف) عکس این قضیه را بنویسید.



اگر در مثلث ABC ، $a^2 = b^2 + c^2$ یا شد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است ($\hat{A} = 90^\circ$).

(ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

(۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه‌های اضلاع آن برقرار است.

(۲) پاره‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB = c$ و $A'C' = AC = b$

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه‌ی پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC = a$

$$\triangle A'B'C': \frac{A'B'^2 + A'C'^2}{AB'^2 AC'^2} = B'C'^2 \rightarrow \frac{c^2 + b^2}{a^2} = B'C'^2 \rightarrow B'C' = a \rightarrow B'C' = BC = a$$

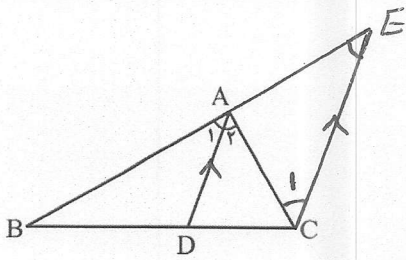
(۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$

$$\begin{cases} A'B' = AB = c \\ A'C' = AC = b \\ B'C' = BC = a \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC \xrightarrow{\text{اثر تطبیق}} \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

(ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دوطرفی بیان نمایید.

یک مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع ضلع وتر آن برابر مجموع مربع ضلع‌های دو ضلع دیگر باشد.

*** کاربردهای تشابه**

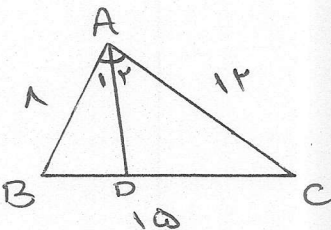


۱- قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی: در هر مثلث، نیمساز داخلی هر زاویه، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع زاویه تقسیم می‌کند:
 پرهان: از C خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند:

$$AD \parallel CE \begin{cases} \xrightarrow{\text{مورب } BE} \hat{A}_1 = \hat{E} \\ \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{C}_1 = \hat{E} \rightarrow AC = AE \quad (1)$$

$$\triangle BCE : AD \parallel CE \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

مثال: سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را بیابید.

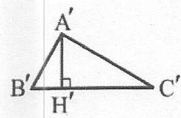
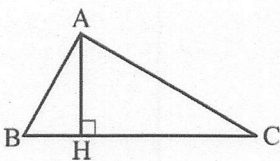


ح: BD و $CD = ?$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{15-BD} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{BD}{15-BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3BD = 30 - 2BD \Rightarrow 5BD = 30 \Rightarrow BD = 6$$

$$BD + CD = 15 \Rightarrow 6 + CD = 15 \Rightarrow CD = 9$$

۲- نسبت ارتفاعها: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاعهای نظیر برابر با نسبت تشابه است.

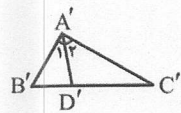
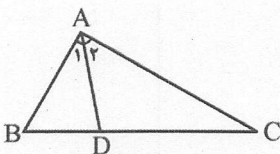


$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{ح: } \frac{AH}{A'H'} = k$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ACH \sim \triangle A'C'H' \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CH}{C'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

۳- نسبت نیمسازها: در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازهای نظیر برابر با نسبت تشابه است.



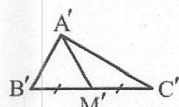
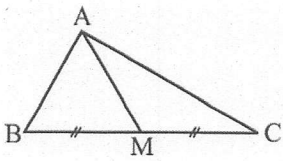
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{ح: } \frac{AD}{A'D'} = k$$

$$\hat{A} = \hat{A}' \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \quad (1) \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AD}{A'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = k$$

۴- نسبت میانها: در دو مثلث متشابه، نسبت میانهای نظیر برابر با نسبت تشابه است.



ف: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ $\text{ح: } \frac{AM}{A'M'} = k$

طبق فرض: $\frac{BC}{B'C'} = k \rightarrow \frac{CM}{C'M'} = k$ ①

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AC}{A'C'} = \frac{CM}{C'M'} = k \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right. \xrightarrow[\text{و تساوی زاویه بین}]{\text{تناسب ضلع}} \triangle ACM \sim \triangle A'C'M' \rightarrow$

$\rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CM}{C'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$

۵- نسبت محیطها: در دو مثلث متشابه، نسبت محیطها برابر با نسبت تشابه است.

ف: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

ح: $\frac{P}{P'} = k$

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \xrightarrow[\text{و تساوی تناسب}]{\text{نسبت ضلع}} \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = k \Rightarrow \frac{P}{P'} = k$

۶- نسبت مساحتها: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحتها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

ف: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

ح: $\frac{S}{S'} = k^2$

$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot h}{\frac{1}{2} a' \cdot h'} = \frac{a}{a'} \times \frac{h}{h'} = k \times k = k^2 \rightarrow \frac{S}{S'} = k^2$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{P}{P'} = \frac{h}{h'} = \frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} = k$

نتیجه: روابط فوق را به صورت مقابل در یک رابطه جمع می‌کنیم:

روابطی که در بالا در مورد مثلث‌های متشابه مطرح شد را می‌توان در مورد هر دو چندضلعی متشابه نیز مطرح کرد.

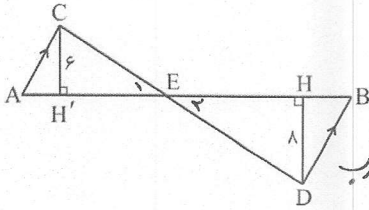
مثال: مثلث‌های ABC و A'B'C' متشابه‌اند. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵ و ۸ و ۱۱ و محیط مثلث A'B'C' برابر ۶۰ باشد، طول

اضلاع مثلث A'B'C' را به دست آورید.

$\frac{5}{a'} = \frac{8}{b'} = \frac{11}{c'} = \frac{5+8+11}{P'} \rightarrow \frac{5}{a'} = \frac{8}{b'} = \frac{11}{c'} = \frac{24}{60}$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{a'} = \frac{24}{60} \rightarrow a' = \frac{25}{2} \\ \frac{8}{b'} = \frac{24}{60} \rightarrow b' = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3} \\ \frac{11}{c'} = \frac{24}{60} \rightarrow c' = \frac{55}{2} \end{array} \right.$

مثال: در شکل مقابل، $AC \parallel BD$ و $AB = ۳۵$ می‌باشد.



الف) نسبت $\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}}$ را بیابید.

$\left. \begin{matrix} E_1 = E_2 \\ \hat{A} = \hat{B} \end{matrix} \right\} \text{مولفه‌ی مورب} \rightarrow \triangle ACE \sim \triangle BDE \rightarrow k = \frac{CH'}{DH} = \frac{4}{۸} = \frac{۳}{۴} \quad (۱)$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}} = k^2 = \left(\frac{۳}{۴}\right)^2 = \frac{۹}{۱۶}$$

۳۵-EB

ب) با توجه به اندازه‌ها، S_{BDE} چقدر است؟

$\frac{AE}{EB} = k = \frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{۳۵-EB}{EB} = \frac{۳}{۴} \rightarrow ۱۴۰ - ۴EB = ۳EB \rightarrow ۷EB = ۱۴۰ \rightarrow EB = ۲۰$

$$S_{BDE} = \frac{1}{2} DH \times EB = \frac{1}{2} \times ۸ \times ۲۰ = ۸۰$$

تست: اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵۰ باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

$$\frac{P}{P'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} \rightarrow \frac{۲۵}{۴۵} = \sqrt{\frac{۵۰}{S'}} \rightarrow \frac{۲۵}{۸۱} = \frac{\sqrt{۵۰}}{S'} \rightarrow S' = ۲ \times ۸۱ = ۱۶۲$$

- ۸۱ (۱)
- ۱۶۲ (۲✓)
- ۱۳۵ (۳)
- ۷۲ (۴)

$\rightarrow S' = 2 \times 81 = 162$

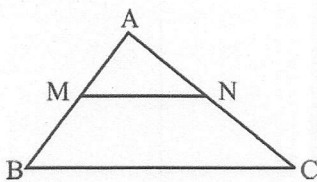
تعرین (صفحه ۴۹ کتاب):

۱- طول ضلع‌های یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

$$\frac{\frac{10}{a}}{\frac{10}{15}} = \frac{P}{P'} \rightarrow \frac{10}{15} = \frac{P}{P'} \rightarrow P = \frac{10}{3} P' \rightarrow P = \frac{10}{3} \times 42 = 140$$

بزرگ‌ترین ضلع مثلث اول

۲- در شکل مقابل $BC \parallel MN$ است و مساحت ذوزنقه‌ی $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.



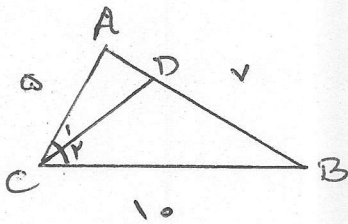
$BC \parallel MN \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMN \rightarrow k = \frac{AB}{AM} \quad (۱)$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = k^2 \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = \frac{k^2 - 1}{1} = 8 \rightarrow k^2 - 1 = 8 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = 3 \quad (۲)$$

$\frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = k^2 - 1 \rightarrow k^2 - 1 = 8 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = 3 \quad (۲)$

$\frac{AB}{AM} = 3 \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AB - AM}{AM} = \frac{3 - 1}{1} \rightarrow \frac{BM}{AM} = 2$

۳- در مثلث ABC، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است. طولهای دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به دست آورید.

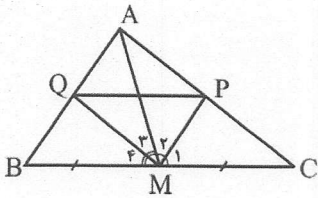


$$\text{نیمساز } CD \rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CA}{CB} \rightarrow \frac{AD}{7-AD} = \frac{5}{10}$$

$$\rightarrow 2AD = 7 - AD \rightarrow 3AD = 7 \rightarrow AD = \frac{7}{3}$$

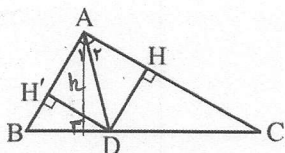
$$AD + BD = 7 \rightarrow \frac{7}{3} + BD = 7 \rightarrow BD = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

۴- در مثلث ABC شکل مقابل، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$.



$$\begin{aligned} \triangle ABM: \text{نیمساز } MQ &\rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB} \\ \triangle ACM: \text{نیمساز } MP &\rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

عکس تالس $\rightarrow PQ \parallel BC$



۵- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.

الف) با در نظر گرفتن BD و CD به عنوان قاعده، نسبت $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}h \times BD}{\frac{1}{2}h \times CD} \rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} \quad (1)$$

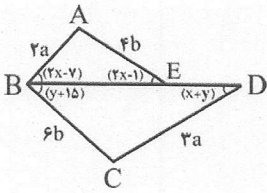
ب) نشان دهید: $DH = DH'$ و با استفاده از آن بار دیگر نسبت $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

و تشریح $\left\{ \begin{aligned} AD &= AD \\ \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \end{aligned} \right.$ و تشریح زاویه حاده $\triangle ADH \cong \triangle ADH' \xrightarrow{\text{ابن تطبیق}} DH = DH'$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times AB}{\frac{1}{2}DH \times AC} \rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

ج) از مقایسه دو قسمت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 ابجاتی دیگر برای قضیه نیمسازها $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ و (1) و (2)

۶- در شکل مقابل می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت مثلث ABE را بیابید.



$$\frac{BE}{DE} = 2 \xrightarrow{\text{ترکیب درخرج}} \frac{BE}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2a}{4a} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{AE}{BC} = \frac{4b}{4b} = \frac{2}{4}$$

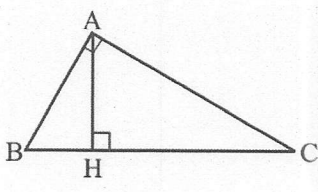
نسبت
ضلع $\rightarrow \triangle ABE \sim \triangle BCD$

بسیار زیاده ها مساوی تر برابریه

$$\begin{cases} 2x-1 = y+1 \\ 2x-1 = x+y \end{cases} \rightarrow x=9, y=2$$

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ABE}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\triangle ABH \sim \triangle ACH \sim \triangle ABC$ است. با توجه به این موضوع،



$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

الف) ثابت کنید:

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \quad (1)$$

$$\triangle ACH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = k'^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \quad (2)$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا، قضیه فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

$$(1) + (2) \rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH} + S_{ACH}} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} \rightarrow 1 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

$$\rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

۸- در کتاب حل شود.