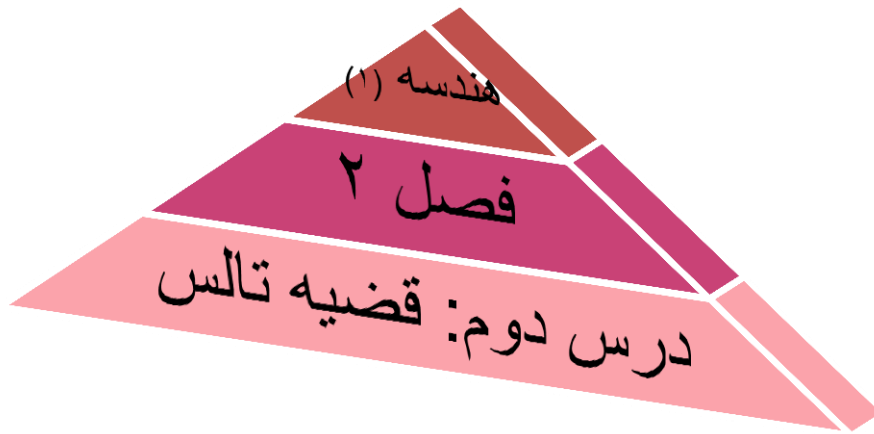


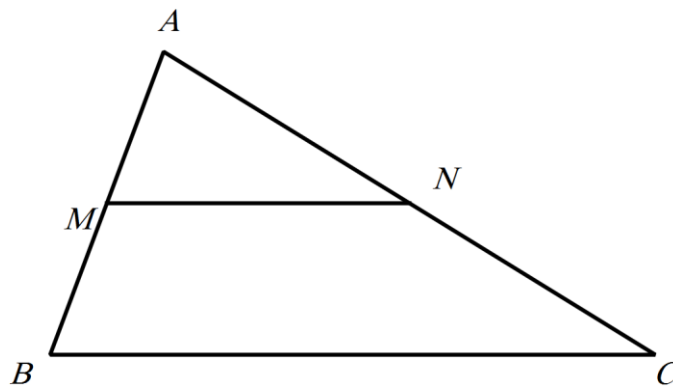
بسم الله الرحمن الرحيم



قضیه تالس را ریاضیدانی به نام تالس در ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح برای اندازه گیری ارتفاع اهرام مصر به کار برد که امروزه یکی از مشهورترین قضایای هندسه است.

قضیه تالس

هر گاه در یک مثلث، خط راستی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع چهار پاره خط جدا می کند که اندازه آن ها تشکیل یک تناسب می دهد:

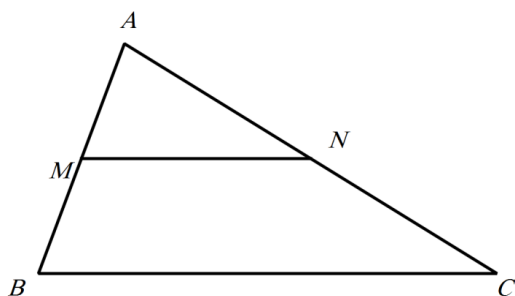


$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

این قضیه تالس به تالس جزء به جزء مشهور است. قضیه تالس را می توان به صورت زیر تعمیم داد که آن را تالس جزء به کل می نامند.

تعمیم قضیه تالس

اگر خطی دو ضلع از مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می کند که اندازه ضلع های آن با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب است:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

جزء به کل وارونه

تالس جزء به کل را از سمت قاعده به راس هم می توان نوشت، اما در این حالت نسبت $\frac{MN}{BC}$ برابر با آن ها نیست. یعنی فقط زمانی می توانیم تناسب را به صورت سه جزئی بنویسیم که جزء به کل از سمت راس به قاعده

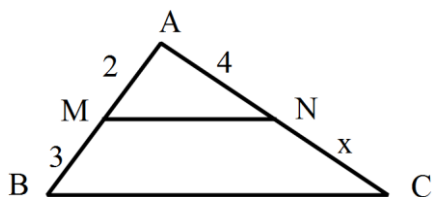
$$\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA} \quad \text{باشد:}$$

تذکره ۱

در مسائلی که پاره خط MN داده یا خواسته نشده است، از هر سه فرمول فوق می توان استفاده کرد. استفاده از هر سه حالت به یک جواب می رسد. فقط بستگی به شرایط و تشخیص ما دارد که در مسئله داده شده کدام یک سریع تر به جواب می رسد. برای درک بهتر به نمونه های زیر دقت کنید:

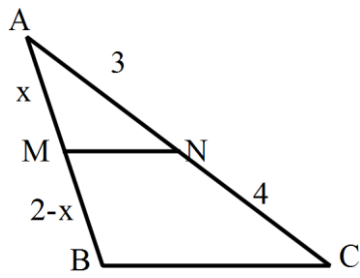
در شکل زیر $AM = 2$ ، $MB = 3$ و $AN = 4$ است. مقدار NC را بیابید.

مثال ۱



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x} \rightarrow x = 6$$

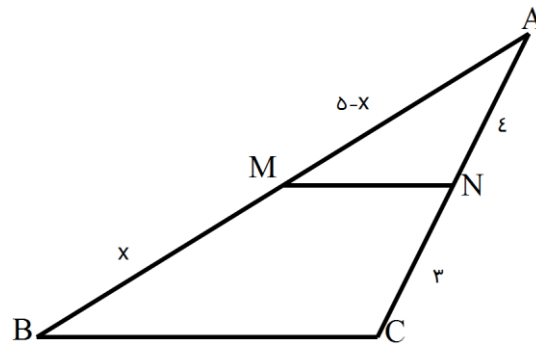
می توانستیم این سوال را به صورت جزء به کل بنویسیم ایرادی نداشت ولی محاسبه آن طولانی تر بود.



$$\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{6}{5}$$

مثال ۲

مثال ۳



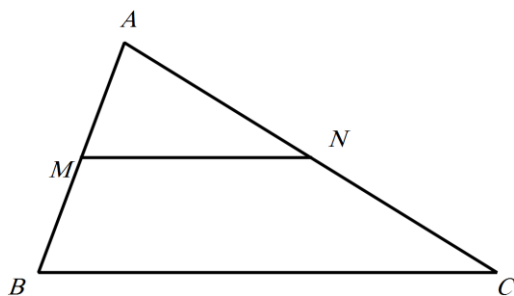
$$\frac{x}{5-x} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{15}{7}$$

تذکره ۲
در مسائلی که MN داده یا خواسته شده باشد، باید حتماً از تالس جزء به کل آن هم از راس به سمت قاعده استفاده کرد.

اگر خطی روی دو ضلع مثلثی، چهار پاره خط با اندازه های متناسب جدا کند،

عکس قضیه تالس

آن گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.



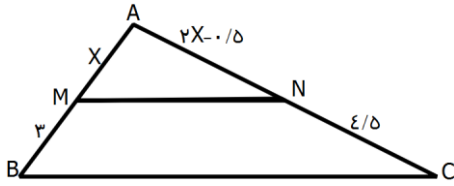
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow MN \parallel BC$$

مسائل مربوط به تالس از تنوع بالایی برخوردار است و طیف گسترده ای از مسائل را دربرمی گیرد، بنابراین تسلط به آن نیاز به یک دسته بندی مناسب و منطقی دارد که در زیر به چند نوع از آنها می پردازیم.

دسته اول

در این نوع یک پاره خط موازی قاعده مثلثی رسم شده و طول چهار قطعه روی دو ساق مثلث نوشته شده است که ممکن است بعضی از آنها مجهول باشند. در این حالت کافی است یک تالس جزء به جزء بنویسید و مجهول را پیدا کنید. البته همانطور که دیدید در این موارد حتی ممکن است از تالس جزء به کل هم استفاده کنیم.

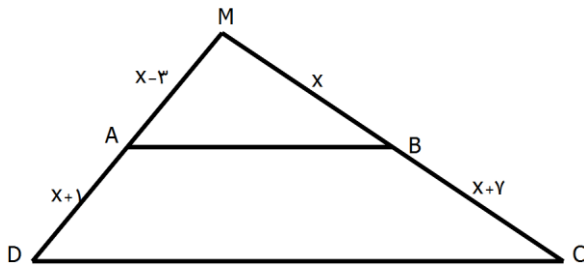
در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. مقدار x را بدست آورید.



$$\frac{x}{3} = \frac{2x - 0.5}{4/5} \Rightarrow x = 1$$

مثال ۴

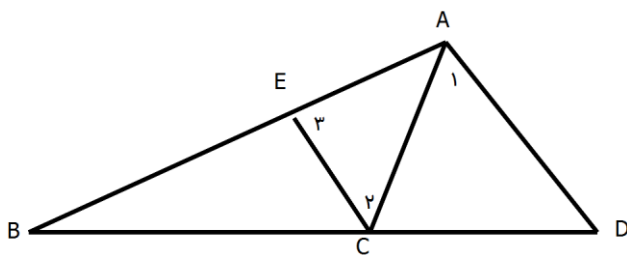
ذوزنقه ABCD مطابق شکل مفروض است و امتداد ساق های آن در نقطه M متقاطعند. مقدار x را بیابید.



چون ABCD ذوزنقه است، پس $AB \parallel CD$ می باشد و حالا داریم:

$$\frac{x - 3}{x + 1} = \frac{x}{x + 7} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{x - 3}{4} = \frac{x}{7} \Rightarrow 7x - 21 = 4x \Rightarrow x = 7$$

در شکل زیر داریم $\hat{A} = \hat{C} = \hat{D}$. اگر $AB = 15$ و $AC = 6$ باشد، حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟



مثال ۶

چون $\hat{A} = \hat{C}$ پس طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب می توان نتیجه گرفت $CE \parallel AD$.

همچنین $\hat{A} = \hat{C}$ نشان می دهد مثلث ACE متساوی الساقین است، یعنی $AE = AC = 6$

حال با توجه به این اطلاعات بدست آمده متوجه می شویم بهتر است از تالس جزء به کل از قاعده به سمت

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

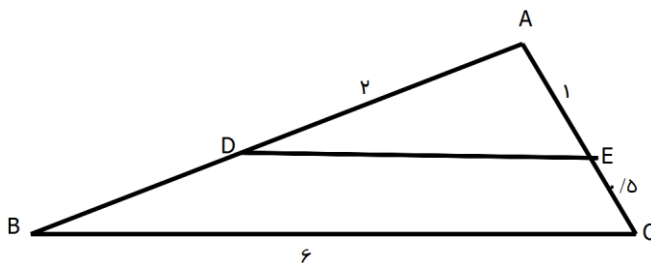
راس استفاده کنیم:

در این نوع یک پاره خط موازی قاعده رسم می شود و طول آن داده یا خواسته می شود که

دسته دوم

در این حالت باید از تالس جزء به کل استفاده کرد.

در شکل زیر $DE \parallel BC$: با توجه به اندازه پاره خط ها، طول های DE و AB را بیابید.



مثال ۷

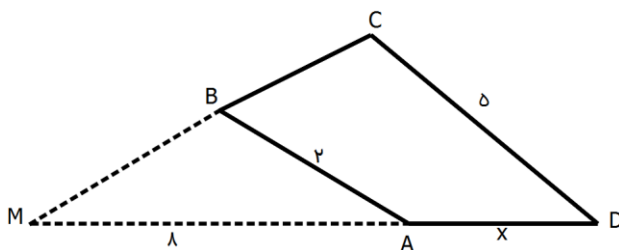
$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{1.5} = \frac{DE}{6} \Rightarrow DE = 4$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{4}{6} \Rightarrow AB = 3$$

در چهارضلعی ABCD اگر زوایای A و D مکمل هم باشند و امتداد اضلاع BC و AD در

مثال ۸

نقطه M به فاصله ۸ واحد از راس متقاطع باشند، اندازه ضلع AD کدام است؟



چون A و D مکملند، زاویه خارجی A برابر D است و در نتیجه $AB \parallel CD$ است. پس طبق تالس داریم:

$$AB \parallel CD: \frac{8}{8+x} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 12$$

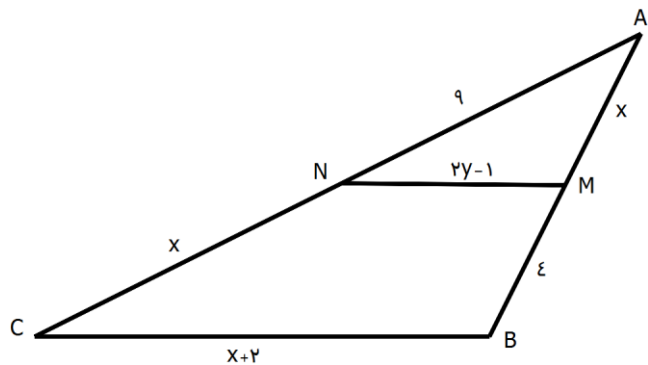
دسته سوم

ترکیب تالس جزء به جزء و تالس جزء به کل: معمولاً در این نوع سوالها دو مجهول وجود

دارد.

مثال ۹

در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را بدست آورید.

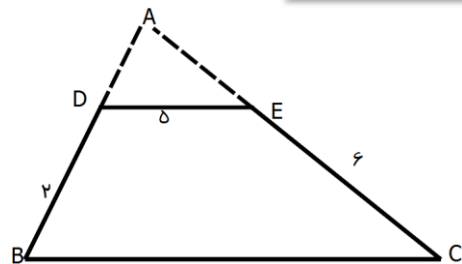


$$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2y-1}{x+2} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{2y-1}{8} \Rightarrow 2y-1 = 4.8 \Rightarrow y = \frac{5.8}{2} = 2.9$$

در شکل زیر محیط مثلث ADE برابر ۲۱ است. محیط ذوزنقه DECB را بیابید.

مثال ۱۰



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{AE}{6} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = x \text{ و } AE = 3x$$

$$\text{محیط } ADE = x + 3x + 5 = 21 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{5}{y} = \frac{x}{x+2} \Rightarrow \frac{5}{y} = \frac{4}{6} \Rightarrow y = 7.5$$

$$\text{محیط ذوزنقه} = 2 + 5 + 6 + \frac{7}{5} = 20.4$$

دسته چهارم

تالس جزء به کل کاربردی: در این نوع مسائل که می خواهیم طول سایه یا بلندی یک

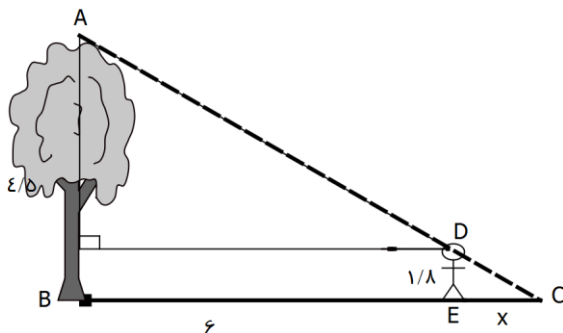
درخت یا ساختمان را پیدا کنیم، باید یک مثلث قائم الزاویه و خطی که موازی ضلع قائم

آن است پیدا کنیم و اطلاعات داده شده را روی آن مثلث منتقل کنیم و سپس با استفاده از تالس جزء به کل مجهول خواسته شده را پیدا کنیم.

شخصی با قد ۱۸۰ سانتی متر در فاصله ۶ متری از درختی به ارتفاع ۴/۵ متر ایستاده

مثال ۱۱

است. طول سایه این شخص روی زمین چقدر است؟



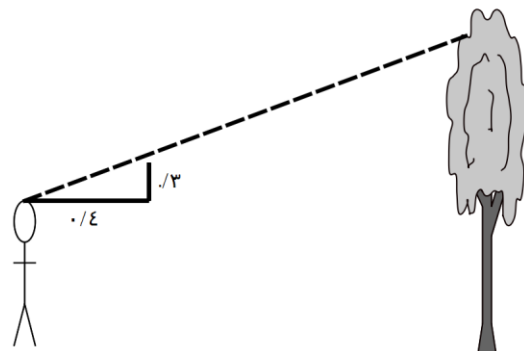
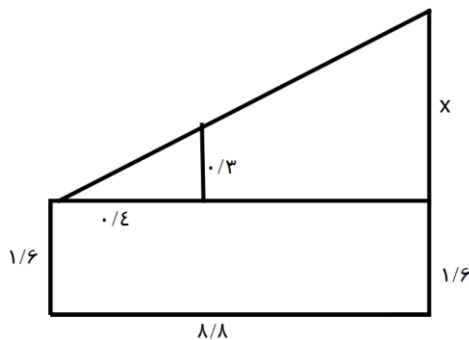
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{1.8}{4.5} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow x = 4$$

شخصی برای پیدا کردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل زیر ساخت. اگر

مثال ۱۲

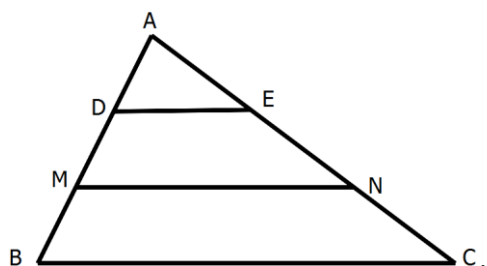
او در فاصله ۸/۸ متری از درخت بایستد، می تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند. فاصله

تقریبی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. ارتفاع تقریبی درخت را بیابید.



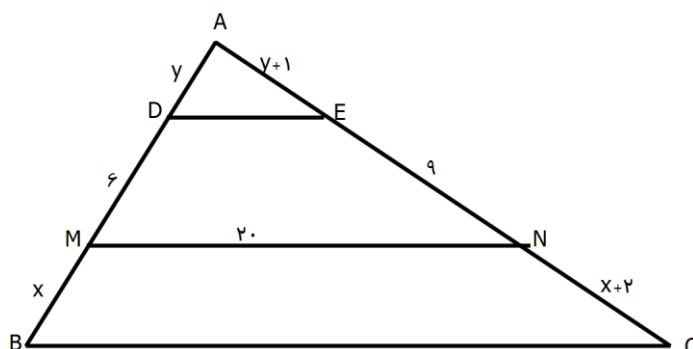
$$\frac{0.3}{x} = \frac{0.4}{8.8} \Rightarrow x = 6.6 \Rightarrow \text{ارتفاع درخت} = x + 1.6 = 8.2$$

در این نوع دو پاره خط موازی قاعده مثلث رسم می شود و معمولاً حداقل دو مجهول در مسئله وجود دارد. در این موارد یک بار مثلث AMN را در نظر می گیریم و با استفاده از موازی بودن DE و MN از تالس استفاده می کنیم و یک بار هم مثلث ABC را در نظر می گیریم و از موازی بودن MN و BC یا DE و BC استفاده می کنیم.



مثال ۱۳

در شکل زیر DE و MN موازی قاعده BC هستند. حاصل $BC-DE$ را بیابید.



$$\triangle AMN: DE \parallel MN \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{y+1}{9} \Rightarrow y = 2$$

$$\triangle ABC: MN \parallel BC \Rightarrow \frac{y+6}{x} = \frac{y+10}{x+2} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{12}{x+2} \Rightarrow x = 4$$

حال برای پیدا کردن DE از تالس جزء به کل در مثلث AMN استفاده می کنیم.

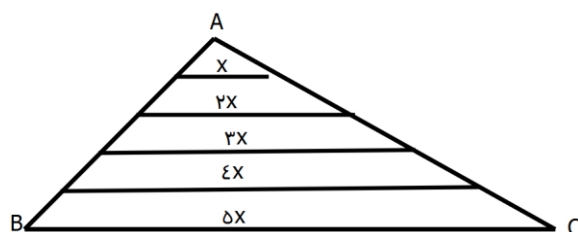
$$\frac{DE}{20} = \frac{y}{y+6} = \frac{2}{8} \Rightarrow DE = 5$$

برای پیدا کردن BC نیز از تالس جزء به کل در مثلث ABC استفاده می کنیم

$$\frac{20}{BC} = \frac{8}{12} \Rightarrow BC = 30 \Rightarrow BC - DE = 25$$

پاره خطی که وسط های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می کند، بر طبق تالس نصف ضلع سوم و بر طبق عکس تالس موازی ضلع سوم است.

نتیجه: اگر یک ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم و از هر یک خطوطی موازی قاعده رسم کنیم تا ضلع مقابل را قطع کنند، پاره خط های تولید شده تشکیل تصاعد عددی می دهند.



مثال ۱۴

در مثلث ABC به اضلاع $AB = 7$ و $AC = 4$ ، وسط های اضلاع را به هم وصل

کرده ایم. اگر محیط یکی از مثلث های بدست آمده ۸ باشد، اندازه ضلع BC را بیابید.

چون اضلاع هر یک از مثلث های بدست آمده نصف اضلاع ABC است، بنابراین:

$$\frac{4}{2} + \frac{7}{2} + \frac{BC}{2} = 8 \Rightarrow BC = 5$$

در این نوع سوال ها یک علامت شبیه W در شکل دیده می شود. ابتدا یک مسئله ثابت می

کنیم. سپس راه حل این مسائل را بیان می کنیم.

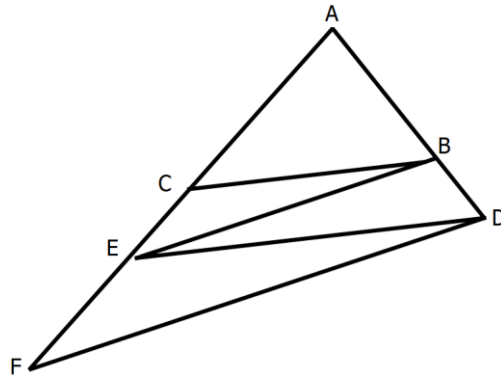
در شکل زیر $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ می باشد. ثابت کنید $AE^2 = AC \cdot AF$.

مثال ۱۵

فرض کنیم $AC = x$ و $EC = y$ باشد. چون $BC \parallel DE$ است پس $AB = kx$ و $BD = ky$ خواهد

بود. بنابراین

$$BE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{kx}{kx + ky} = \frac{x}{x + y} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AE^2 = AC \cdot AF$$

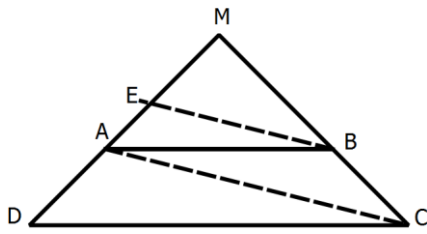


حال این رابطه را در مسایل مورد استفاده قرار می دهیم.

در ذوزنقه ABCD پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$

مثال ۱۶

باشد، اندازه MD را بیابید.



اگر فرض کنیم $ME = x$ باشد، در این صورت

$$MA^2 = ME \cdot MD \Rightarrow (x + 3)^2 = x(x + 10) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 10x$$

$$\Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2.25 \Rightarrow MD = 2.25 + 10 = 12.25$$

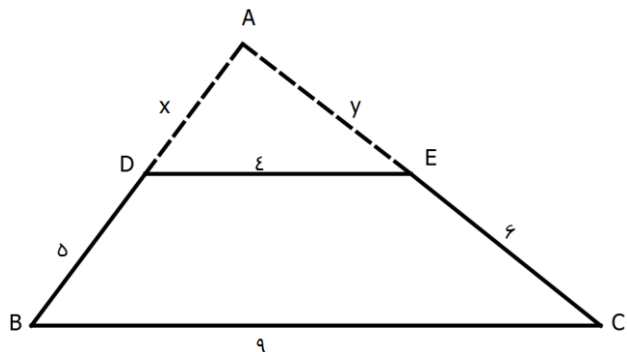
تمرین های تکمیلی



در ذوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴ و ۹ واحد و اندازه ساق ها ۵ و ۶ است. محیط مثلثی که

از امتداد ساق ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می شود را بیابید. (سراسری تجربی ۹۴)

مثال ۱۷



چون DE و BC موازی هستند، در مثلث ABC تالس جزء به کل می نویسیم.

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} = \frac{y}{y+6}$$

بنابراین

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = 4$$

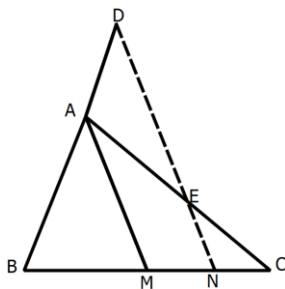
$$\frac{y}{y+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow y = 4/8$$

$$ADE \text{ محیط مثلث} = x + y + 4 = 12/8$$

در مثلث ABC، پاره خط ND موازی میانه AM و $AB = \frac{2}{3}AC$ است. نسبت $\frac{AD}{AE}$



را بیابید. (سراسری ریاضی ۹۴)



از روی شکل واضح است که AM و DN موازی هستند و می توانیم در مثلث های AMC و BDN تالس

بنویسیم.

$$\triangle BDN: AM \parallel DN \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM}$$

$$\triangle AMC: EN \parallel AM \rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{CM}$$

از تقسیم طرفین دو رابطه بالا داریم:

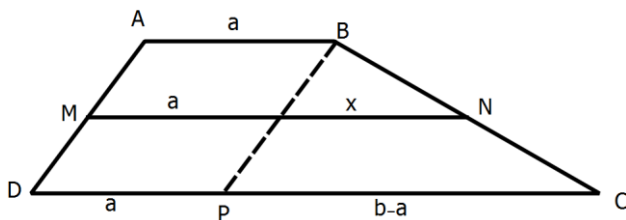
$$\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{AE}{AC}} = \frac{\frac{MN}{BM}}{\frac{MN}{MC}} \Rightarrow \frac{AD \times AC}{AB \times AE} = \frac{MN \times MC}{BM \times MN} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{2}{3} AC = 1$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$$

نشان دهید خطی که وسط های دو ساق دوزنقه ای را به هم وصل می کند میانگین

دو قاعده است.

مثال ۱۹



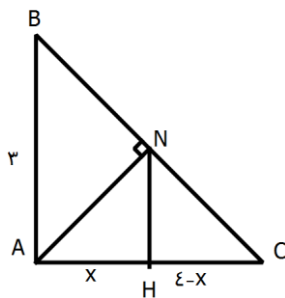
فرض کنیم قاعده های دوزنقه a و b باشند. از راس B خطی به موازات ساق AD رسم می کنیم و در مثلث

BPC تالس را می نویسیم.

$$\frac{x}{b-a} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{b-a}{2} \rightarrow MN = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

مطابق شکل ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. x را بیابید. (سراسری ریاضی ۸۹)

مثال ۲۰



دو ضلع مثلث قائم الزاویه ABC معلوم است: $AB = 3$ و $AC = x + 4 - x = 4$ بنابراین اندازه وتر نیز مشخص می شود: $BC = 5$. از طرفی قطعه های ایجاد شده توسط ارتفاع روی وتر مثلث قائم الزاویه، متناسب با مربع اضلاع کناری هستند. بنابراین $BN = 9k$ و $CN = 16k$ خواهد بود. حال داریم:

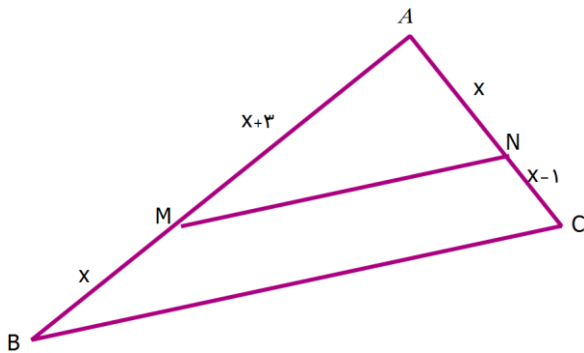
$$NH \parallel AB \rightarrow \frac{9k}{25k} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 1/44$$

تمرینات تکمیلی

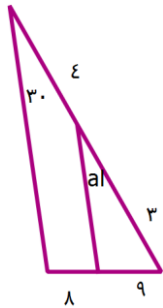
درست یا نادرست؟



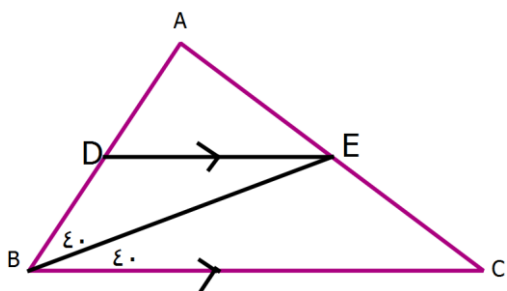
۱- در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. مقدار x برابر $\frac{3}{4}$ است.



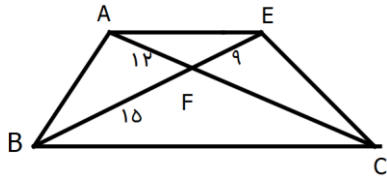
۲- در شکل زیر مقدار α برابر 30° درجه است.



۳- در شکل رو به رو، تناسب $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AB}$ برقرار است.



۴- در ذوزنقه مقابل طول پاره خط CF برابر ۱۸ است.



چهار گزینه ای



۵- در ذوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴ و ۹ و اندازه ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق

ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می شود کدام است؟

الف) $11/4$ ب) $11/6$ پ) $12/2$ ت) $12/8$

۶- در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل قطر دیگر مستطیل را در M و N

قطع می کنند. اندازه MN چقدر است؟

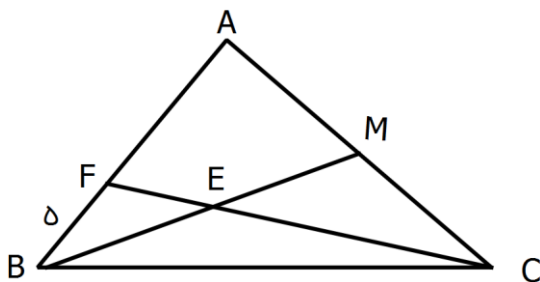
الف) $2/3$ ب) $5/7$ پ) $5/6$ ت) $5/3$

۷- در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$ خط واصل از راس به وسط ضلع مقابل آن، قطر مربع را در M قطع می

کند. فاصله نقطه M از مرکز مربع کدام است؟

الف) $5/3$ ب) $4/3$ پ) $3/4$ ت) ۱

۸- در شکل رو به رو BM میانه و $BE=EM$ است. اگر $BF=5$ باشد، AB کدام است؟



ب) ۱۲

الف) ۱۰

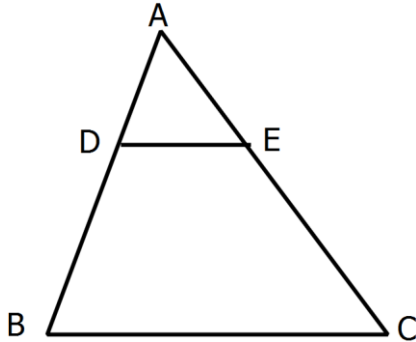
ت) ۲۰

پ) ۱۵



۹- در شکل زیر $DE \parallel BC$ و مساحت ذوزنقه $DEBC$ پنج برابر مساحت مثلث ADE است. نسبت

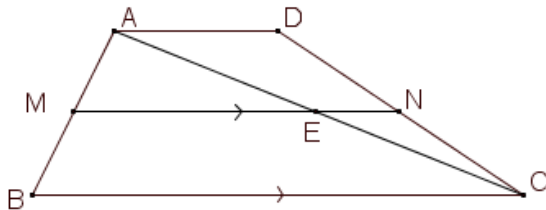
$$\frac{DB}{DA} \text{ را بیابید.}$$



۱۰- در ذوزنقه $ABCD$ نقاط M و N به ترتیب روی ساقهای AB و DC طوری قرار دارند که MN با

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$$

قاعده ها موازی است. ثابت کنید.



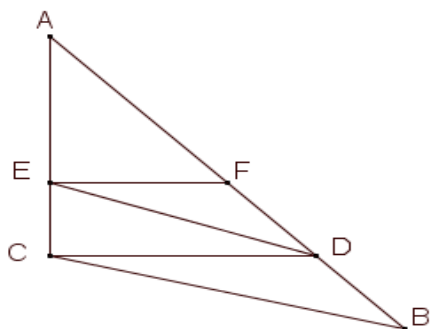
$$\Delta ABC: ME \parallel BC \rightarrow \dots \dots \dots$$

$$\Delta ADC: NE \parallel AD \rightarrow \dots \dots \dots$$

۱۱- برای به دست آوردن طول یک درخت، طول سایه درخت را اندازه گرفته ایم این طول ۳۰ متر می باشد. طول شاخصی که در زمین در راستای سایه درخت زده ایم، ۵۰ سانتیمتر و طول سایه آن ۲ متر است. با رسم شکل مناسب طول درخت را محاسبه کنید.

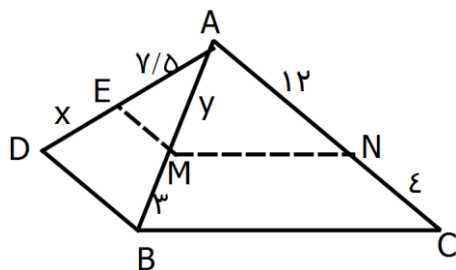
۱۲- در مثلث ABC ، DE با BC موازی است و EF با CD .

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB} \text{ ثابت کنید}$$

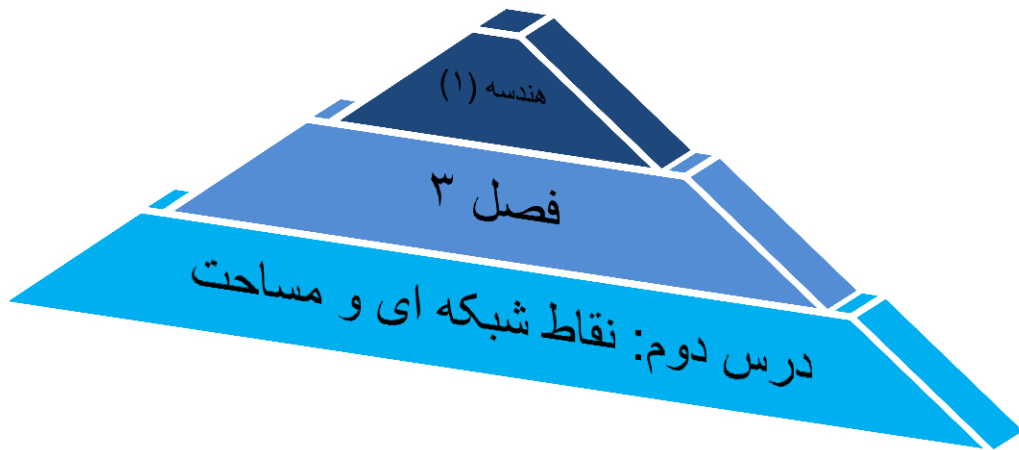


۱۳- روی ضلع BC از مثلث ABC نقطه دلخواه M را اختیار می کنیم و از آن خطی موازی میانه AD رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آنها را در E و F قطع کند. ME+MF را حساب کنید.

۱۴- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $ME \parallel BD$ می باشد. $X+y$ را بیابید.



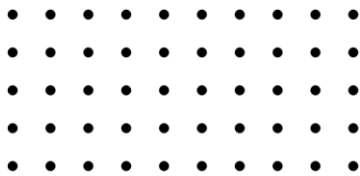
۱۵- در دوزنقه ای قاعده بزرگ دو برابر قاعده کوچک است. خطی موازی قاعده ها رسم شده است. اگر بر اثر برخورد آن با قطرها و ساق های دوزنقه ، سه پاره خط مساوی روی آن ایجاد شده باشد، آن گاه این خط ساق های دوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می کند؟



تعریف

مطابق شکل نقطه هایی که روی خط های افقی و عمودی واقعند بطوریکه فاصله هر دو

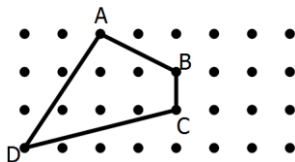
نقطه متوالی روی یک خط افقی یا عمودی برابر واحد است را نقاط شبکه ای می نامند.



چند ضلعی های شبکه ای

اگر تمام راس های یک چندضلعی روی نقاط شبکه ای باشد، چندضلعی

شبکه ای نامیده می شود.



نقاط شبکه ای واقع بر راس ها و ضلع های چند ضلعی شبکه ای را نقاط مرزی می نامند و

نقاط مرزی

تعداد آنها را با b نشان می دهند.

نقاط واقع در درون چند ضلعی شبکه ای را نقاط درونی می نامند و تعداد آنها را با i نشان

نقاط درونی

مثلا چندضلعی فوق ۵ نقطه درونی و چهار نقطه مرزی دارد.

هر چند ضلعی شبکه ای حداقل سه نقطه مرزی دارد ولی می تواند هیچ نقطه درونی نداشته باشد.

اگر تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه ای b و تعداد نقاط درونی آن i باشد، مساحت آن

فرمول پیک

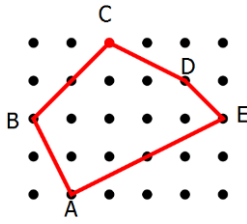
$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

برابر است با:

این رابطه توسط جورج الکساندر پیک در سال ۱۸۹۹ ارائه شد.

مساحت چند ضلعی شبکه ای ABCDE را حساب کنید.

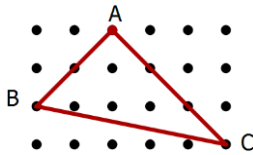
مثال ۱



$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{7}{2} + 8 - 1 = 10/5$$

اندازه بزرگترین ارتفاع مثلث شبکه ای زیر را بدست آورید.

مثال ۲



بزرگترین ارتفاع بر کوچکترین ضلع وارد می شود و کوچکترین ضلع AB است

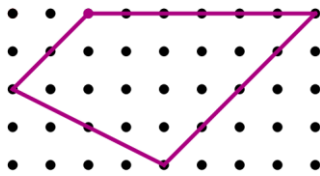
که اندازه آن با فیثاغورث روی شبکه $2\sqrt{2}$ بدست می آید.

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{6}{2} + 4 - 1 = 6$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times CH \rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times CH \rightarrow CH = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

ارتفاع دوزنقه شبکه ای در شکل زیر را بیابید.

مثال ۳



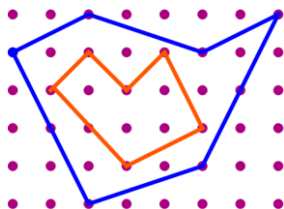
$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{14}{2} + 12 - 1 = 18$$

حال قاعده های دوزنقه نیز $2\sqrt{2}$ و $4\sqrt{2}$ بدست می آیند و لذا ارتفاع برابر است با:

$$18 = \frac{1}{2} (4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times h \rightarrow h = 3\sqrt{2}$$

با توجه به مساحت چند ضلعی های شبکه ای، مساحت ناحیه بین دو چند ضلعی را محاسبه کنید.

مثال ۴



$$S_1 = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{17}{2} + 17 - 1 = 20$$

$$S_2 = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{7}{2} + 4 - 1 = 4/5$$

$$S = 20 - 6.5 = 13/5$$

مساحت یک چند ضلعی شبکه ای ۳ واحد است.



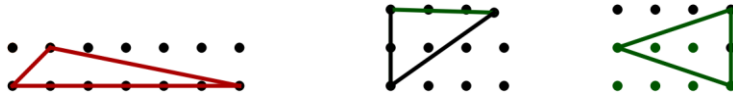
الف) جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و درونی را در حالت هایی که امکان دارد،

مشخص کنید.

باید $3 = i - 1 + \frac{b}{2}$ باشد، در نتیجه $b + 2i = 8$ می باشد. از طرفی می دانیم $i \geq 0$ و $b \geq 3$. پس داریم

i	۰	۱	۲
b	۸	۶	۴

ب) اگر این چند ضلعی شبکه ای مثلث باشد در هر کدام از حالت ها شکلی برای آن رسم کنید.



اگر مساحت یک چند ضلعی شبکه ای S باشد، تعداد مقادیر متمایز ممکن برای نقاط

درونی i همواره با تعداد مقادیر متمایز ممکن برای نقاط مرزی b برابر است و از رابطه زیر بدست می آید:

$$[S + 0.5] = \text{تعداد } i \text{ ها} = \text{تعداد } b \text{ ها}$$



مساحت یک مثلث شبکه ای $5/5$ واحد است. تعداد نقاط مرزی این مثلث چند عدد متفاوت می

$$\text{تعداد } b \text{ ها} = [S + 0.5] = [6] = 6$$

تواند داشته باشد؟

اگر برای نقاط مرزی یا درونی شرایطی داده شود b را از تساوی $S = \frac{b}{2} + i - 1$ بر حسب i

پیدا می کنیم و یک جدول رسم کرده و به i عدد می دهیم و مقادیر b را زیر آن می نویسیم.



مساحت یک چهار ضلعی شبکه ای با حداقل ۲ نقطه درونی ۷ واحد است. تعداد نقاط مرزی این

چهار ضلعی چند مقدار مختلف می پذیرد؟



$$\frac{b}{2} + i - 1 = 7 \rightarrow b + 2i = 16 \rightarrow b = 16 - 2i \xrightarrow{i \geq 2, b \geq 3}$$

پس پنج حالت مختلف را در بر میگیرد.

i	۲	۳	۴	۵	۶
b	۱۲	۱۰	۸	۶	۳

در شکل فاصله افقی و عمودی نقاط متوالی برابر یک واحد است. اگر مساحت شکل برابر ۶



باشد، تعداد نقاط درونی شکل را بیابید.

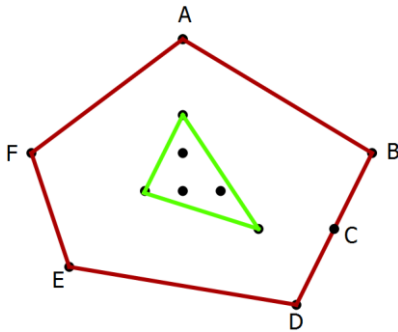


$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \rightarrow 6 = \frac{12}{2} + i - 1 \rightarrow i = 1$$

در شکل زیر اگر مساحت ناحیه بین مثلث و چند ضلعی برابر $36/5$ باشد، تعداد نقاط درونی



شکل $ABCDEF$ را بیابید.



$$S_{ABCDEF} = \frac{6}{2} + i - 1 = 2 + i$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{3}{2} + 3 - 1 = 3/5$$

بنابراین: مساحت مثلث - مساحت $ABCDEF$ = مساحت داده شده

$$36.5 = 2 + i - 3.5 \rightarrow i = 38$$

در یک چند ضلعی شبکه ای، تعداد نقاط درونی سه برابر تعداد نقاط مرزی است. اگر



مساحت این چند ضلعی برابر ۱۳ باشد، تعداد نقاط درونی را بیابید.

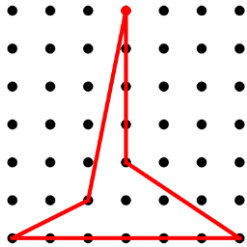
$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \rightarrow 13 = \frac{b}{2} + 3b - 1 \rightarrow b = 4 \rightarrow i = 12$$

تمرینات تکمیلی

۱- کامل کنید.

الف) یک چند ضلعی شبکه ای حداقل نقطه مرزی می تواند داشته باشد.

ب) یک چند ضلعی شبکه ای حداقل نقطه درونی می تواند داشته باشد.

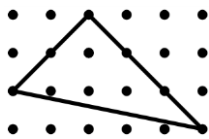


۲- در شکل زیر مساحت شکل را بیابید.

۳- در یک چندضلعی شبکه ای اگر یک واحد از تعداد نقاط درونی کم و ۴ واحد به تعداد نقاط مرزی افزوده

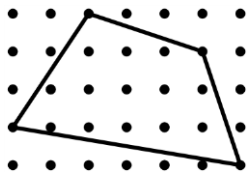
شود، مساحت آن دو برابر می شود. تعداد نقاط درونی این چند ضلعی چقدر است؟

۴- اندازه بزرگترین ارتفاع مثلث شبکه ای شکل زیر را بیابید.



۵- اگر وسط های اضلاع چهار ضلعی شبکه ای زیر را متوالیا به هم وصل کنیم، مساحت چهارضلعی به وجود

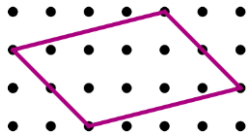
آمده را بیابید.



۶- مساحت یک چهار ضلعی شبکه ای $\frac{17}{4}$ است. تعداد نقاط درونی این چهار ضلعی چند مقدار متفاوت می تواند بپذیرد؟

۷- مساحت یک چهار ضلعی شبکه ای ۹ می باشد. برای تعداد نقاط مرزی این چهار ضلعی چند مقدار دورقمی مختلف می توان در نظر گرفت؟

۸- اندازه بزرگترین ارتفاع متوازی الاضلاع شبکه ای شکل زیر کدام است؟



ب) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

الف) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

ت) $\frac{9}{\sqrt{2}}$

پ) $\frac{7}{\sqrt{2}}$

۹- کم ترین مساحت ممکن برای مثلث های شبکه ای که مجموع تعداد نقاط درونی و نقاط مرزی آن ها ۶ باشد، کدام است؟

ت) $\frac{3}{5}$

پ) $\frac{2}{5}$

ب) ۲

الف) $\frac{1}{5}$

۱۰- کم ترین محیط از بین تمام مثلث های شبکه ای که در آن ها $3 = b + 2i$ می باشد، کدام است؟

ت) $2 + \sqrt{2}$

پ) $1 + \sqrt{2}$

ب) ۳

الف) $2\sqrt{2}$



رحیمه قربانیان / سرگروه ریاضی ناحیه ۵ تبریز