

Subject:

Year:

Month:

Date:

• نالین - تشابه دو ضلع // فصل دوم //

نسبت و تناسب • نسبت بین دو عدد A و B یعنی کسر $\frac{A}{B}$ • $b \neq 0$

تناسب یعنی به دو نسبت مساوی هم یک تناسب داریم یعنی اگر دو نسبت $\frac{A}{b}$ و $\frac{c}{d}$

متناسب باشند آن‌ها $\frac{A}{b} = \frac{c}{d}$ است.

ویژگی های تناسب • الف) در هر تناسب حاصل ضرب جهات طرفین برابر حاصل

ضرب جهات وسطین است. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = c \cdot b$

ب) در هر تناسب می توان نسبت ما را معکوس کرد. $\frac{4}{3} = \frac{12}{9} \rightarrow \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

ج) در هر تناسب می توان جای طرفین یا وسطین را عوض کرد. $\frac{4}{5} = \frac{4}{10} \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{4}{2}$

د) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{c+d}{a+b+c+d}$ و $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به دست می آید.

ه) از تناسب های $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a-b}{a-b-c-d} = \frac{c-d}{c-d}$ و $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ به دست می آید.

و) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به دست می آید. مثال: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \rightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

Subject:

Year:

Month:

Date:

واسط هندسی اگر بین سه عدد a, b, c تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ برقرار باشد

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow b^2 = a \cdot c \rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$ به عدد b واسط هندسی گویند

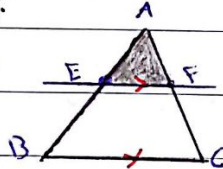
مثال واسط هندسی بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{12}$ را حساب کنید
 $b = \sqrt{\sqrt{3} \times \sqrt{12}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{1} \times \frac{12}{1}}} = \sqrt{\sqrt{36}} = \sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$

فصل دوم

قضیه تالس اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود در ضلع دیگر اقله کند آنرا نسبت

پاره قطعه های ایجاد شده روی یک ضلع با نسبت پاره قطعه های ایجاد شده روی ضلع دیگر برابر است

فرض $EF \parallel BC$ نتایج تالس اثر در مثلث ABC $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$
(1) اثبات داریم $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ نتیجه $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$



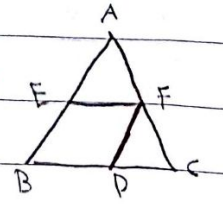
(2) نتیجه $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ تعمیم تالس

اثبات نتیجه یک تالس فرض $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

اثبات $EF \parallel BC$: $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ ترکیب درونی $\frac{AE}{AE+EB} = \frac{AF}{AF+FC}$ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

اثبات نتیجه دو تالس فرض $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

اثبات FD موازی AB رسم کنید



ALYAZ

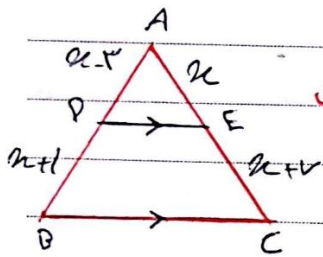
Subject :

Year. Month. Date. ()

$EF \parallel BD$ } متوازی (موازی)
 $FD \parallel EB$ } $\Rightarrow EFDB$ چهارضلعی $\Rightarrow EF = BD, FD = EB$

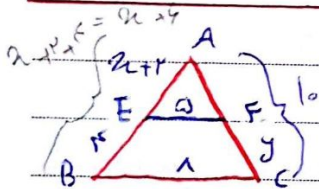
$EF \parallel BD$ $\xrightarrow{\text{نسبت 1}}$ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$
 $FD \parallel AB$ $\xrightarrow{\text{نسبت 2}}$ $\frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$



در شکل زیر $DE \parallel BC$ است k را حساب کنید.
 طرفین (مساوی) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ $\xrightarrow{\text{نسبت}}$ $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x}{x+7}$

$(x-3)(x+7) = x(x+1) \xrightarrow{\text{توسعه}} x^2 + 7x - 3x - 21 = x^2 + x$
 $\xrightarrow{\text{ساده}} 4x - 21 = x \xrightarrow{\text{حذف}} 3x = 21 \xrightarrow{\text{تقسیم}} x = \frac{21}{3} = 7$



در شکل زیر $FE \parallel BC$ است k و y را پیدا کنید.

توجه: اگر روی ضلع‌های موازی مقدار باشد معمولاً از نتیجه (2) تناسب استفاده

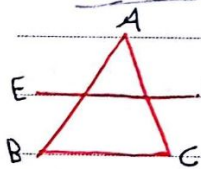
$EF \parallel BC$ $\xrightarrow{\text{نسبت 1}}$ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ $\xrightarrow{\text{نسبت 2}}$ $\frac{x+2}{x+6} = \frac{10-y}{10} = \frac{5}{1}$

$\frac{x+2}{x+6} = \frac{5}{1} \xrightarrow{\text{توسعه}} 1(x+2) = 5(x+6) \xrightarrow{\text{ساده}} x+2 = 5x+30 \xrightarrow{\text{حذف}} -4x = 28 \xrightarrow{\text{تقسیم}} x = -7$

$\frac{10-y}{10} = \frac{5}{1} \xrightarrow{\text{توسعه}} 1(10-y) = 5 \cdot 10 \xrightarrow{\text{ساده}} 10-y = 50 \xrightarrow{\text{حذف}} -y = 40 \xrightarrow{\text{تقسیم}} y = -40$

$y = \frac{20}{1} = \frac{15}{1}$

عکس قضیه تالس: اگر قطعی دو ضلع متساوی را قطع کند نسبت باره قط‌های این دو ضلع در آن قط مساوی باشد آن خط با ضلع سوم متوازی است.



$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ فرض
 $EF \parallel BC$ قطع
 متساوی باشد آن خط با ضلع سوم متوازی است.

اثبات: فرض کنیم EF موازی BC نباشد از نقطه E باره خط EF' موازی BC رسم کنیم.

$EF' \parallel BC$ $\xrightarrow{\text{نسبت 1}}$ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF'}{AC}$
 $EF \parallel BC$ $\xrightarrow{\text{نسبت 2}}$ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

$\Rightarrow \frac{AF'}{AC} = \frac{AF}{AC} \xrightarrow{\text{ساده}} AF' = AF$

GRAFIXT

Subject :

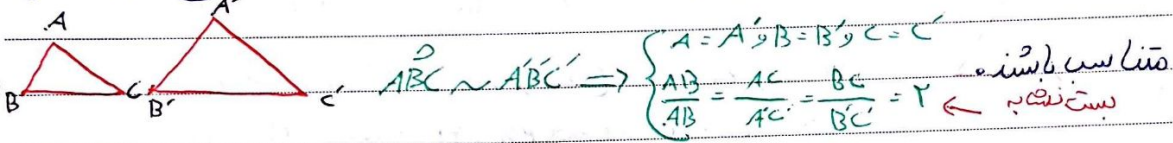
Year. Month. Date. ()

یعنی F روی هم منطبق هستند و چون EF' موازی BC است پس EF نیز موازی BC می باشد.

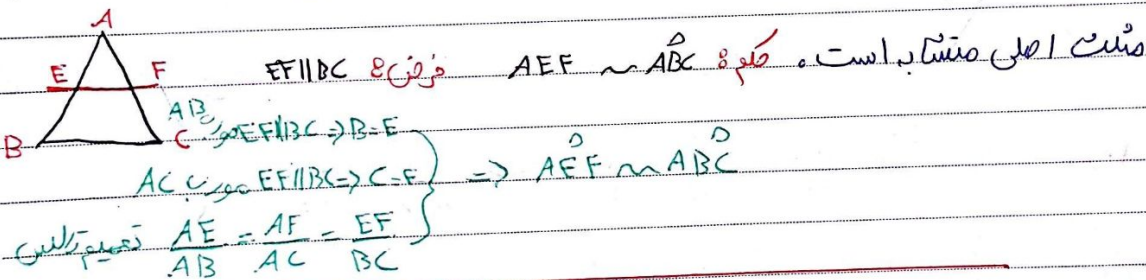
نکته: اگر در مسئله ای بتوانیم ثابت کنیم دو پاره برابر هستند یا پاره قطعی با یک ضلع مثلث موازی

است کار عکس قضیه تالس یا عکس قضیه خطوط موازی استفا دهی شود.

تساوی مثلث 8. دو مثلث را متساوی گوئیم اگر زاویه های آنها در دو مساوی باشند و ضلع های متناظر



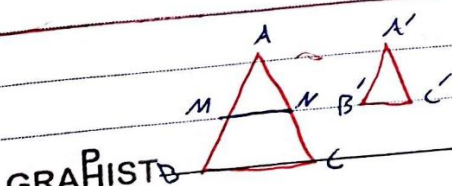
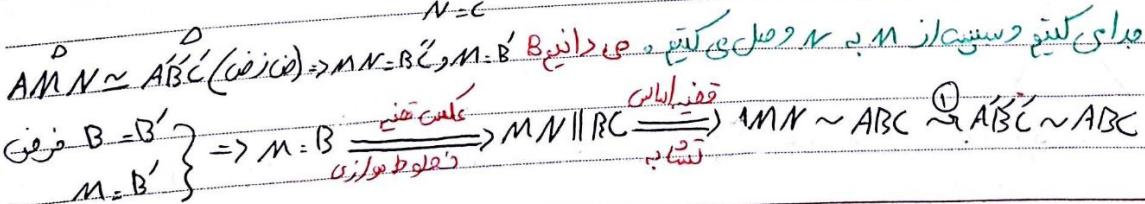
قضیه اساسی تساوی 8. اگر خطی موازی ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند مثلث ایجاد شده با



حالات تساوی دو مثلث 8. هرگاه در زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث

متساوی است. **قضیه اول (تساوی در زاویه)** فرض 8 $A = A'$ و $B = B'$ مگر $ABC \sim A'B'C'$

اثبات 8 روی ضلع AB پاره M را مساوی AM را مساوی AN را مساوی AC پاره N را مساوی AN را مساوی AC



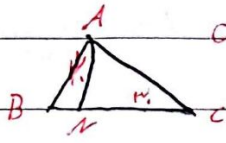
Subject:

Year:

Month:

Date:

در مثل زیر الف) ثابت کنید در مثل متساویانند ب) نسبت تشابه آنها چند است



$$A_1 = C = 90^\circ$$

$$B = B \text{ (مشترک)}$$

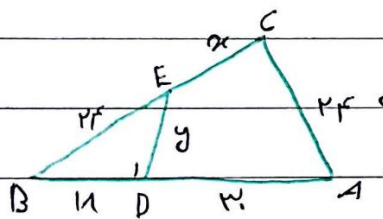
$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABN \text{ (تساوی درزاویه)}$$

ب) نسبت تشابه $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{AB}$ مع افتداد به تصمیم بگیریم نسبت کدام را با کدام را بگیریم

موضع هایی را صورت و وضع قرار می دهیم که رویی زاویه مساوی قرار دارند در نسبت هم مشترک است

خطی زنیع

در شکل زیر $C = D_1$ است مقدار x و y را پیدا کنید



$$B = B \text{ (مشترک)}$$

$$C = D_1 \text{ (مضرب)}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BDE \text{ (تساوی درزاویه)}$$

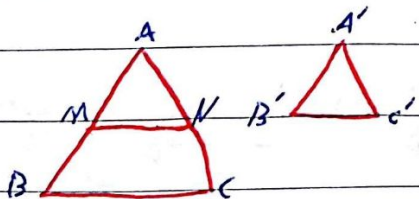
$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{CB}{DB} \quad \frac{24}{y} = \frac{41}{24} = \frac{24+x}{11}$$

$$\frac{24}{y} = \frac{41}{24} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow \frac{24}{y} = \frac{24+x}{11}$$

$$\frac{24}{y} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow 24 \cdot 11 = y(24+x) \Rightarrow 264 = 24y + xy \Rightarrow 264 - 24y = xy \Rightarrow 12 = y \Rightarrow x = 12$$

تعیین دوم تشابه در مثلث با دو وضع مثلثی با دو وضع مثلثی دیگر متناسب باشند زاویه بین

این دو وضع در دو وضع مساوی باشند آنها دو وضع متناسب اند (تساوی در وضع و تساوی زاویه بین)



$$A = A' \text{ و } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ و فرقی}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ و مکرر}$$

اثبات: روی ضلع AB باره خط AM را مساوی A'D' روی ضلع AC باره خط AN را مساوی A'C' قرار

ALYAZ

Subject: _____

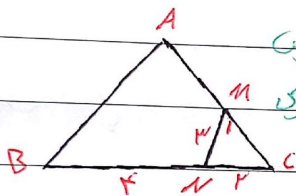
Year: _____ Month: _____ Date: _____

① $AMN \sim A'B'C'$ (فرضی) $\Rightarrow MN \parallel BC$ یہ نتیجہ و سیدہ از M بہ N وصل کی گئی ہے۔

نیا بہ فرضی $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ \rightarrow $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ نیا بہ کتبہ $\rightarrow MN \parallel BC$ ناتک

نیا بہ قضیہ اساسی $AMN \sim ABC$ $\xrightarrow{\text{نیا بہ ①}}$ $ABC \sim A'B'C'$

در شکل زیر M و $M_1 = B$ وسط AC است. طول اضلاع AB و AC را حساب کنید.



$M_1 = B$ و M وسط AC است.
 $\left. \begin{array}{l} \text{موازی} \\ \text{و} \\ \text{موازی} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC$ (ثباتی درونزاویه)

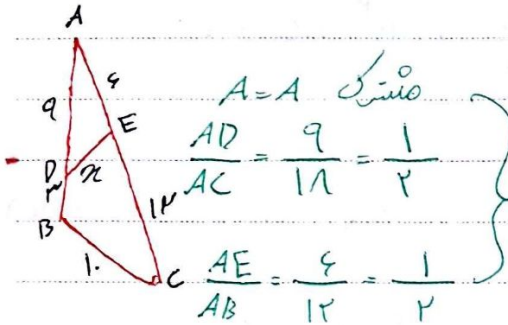
$$\frac{NC}{AC} = \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{3}{AB} = \frac{CM}{4}$$

$$\frac{2}{AC} = \frac{3}{\frac{AC}{2}} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC^2 = 24 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$

ALYAZ

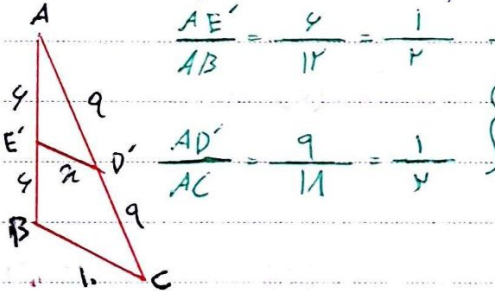
$$\frac{2}{AC} = \frac{3}{AB} \rightarrow \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{AB} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{AB} \rightarrow AB = 3\sqrt{4}$$

در شکل زیر را حساب کنید.



تساوی دو ضلع (تساوی زوای بین و) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (الف)

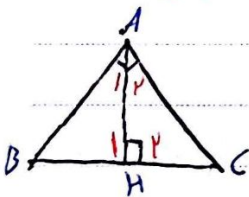
ب) روی AC و AD از A جدا کنید و اندازه AE' و AB و AD و AC را اندازه بگیرید



$\frac{AE'}{AB} = \frac{AD'}{AC} \Rightarrow DE' \parallel BC$

$$k = \frac{1}{2} \quad \frac{BC}{2} = 5 \leftarrow ED'$$

قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه... 8. اثر ABC مثلث قائم الزاویه ای باشد که



در رأس A قائم باشد که AH ارتفاع دارد بر وتر آن باشد روابط زیر را داریم:

① $AB^2 = BC \cdot BH$ ② $AC^2 = BC \cdot CH$

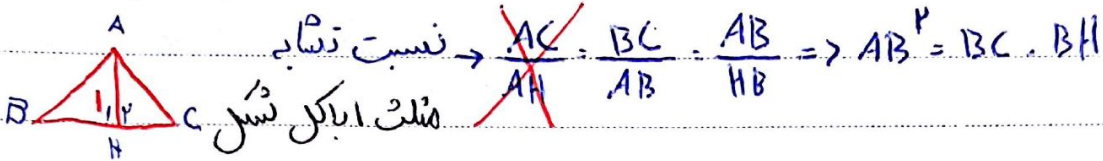
③ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ④ $AH^2 = BH \cdot HC$

⑤ $AB \cdot AC = BC \cdot AH$

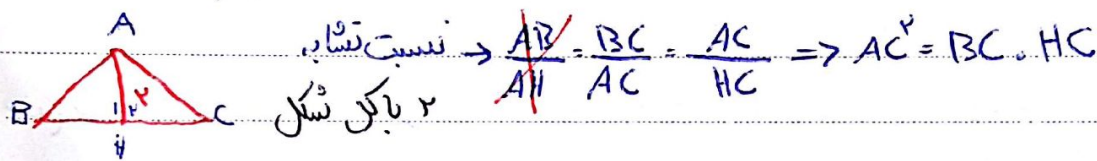
Subject :

Date

اثبات رابطه شماره (۱) §
(تساوی درزاویه) $\Rightarrow ABC \sim ABH$
 $\left. \begin{array}{l} B = B \text{ مشترک} \\ 90^\circ H_1 = \hat{A} \end{array} \right\}$



اثبات رابطه شماره (۲) §
(تساوی درزاویه) $\Rightarrow ABC \sim ACH$
 $\left. \begin{array}{l} C = C \text{ مشترک} \\ 90^\circ A = H_2 \end{array} \right\}$

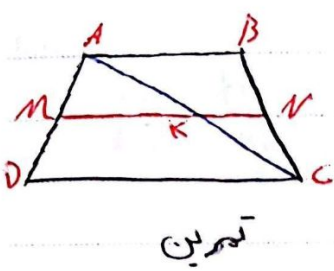


اثبات رابطه شماره (۳) § (قضیه فیثاغورس)
 $AB^2 + AC^2 = BC \cdot BH + BC \cdot HC = BC(BH + HC)$
 $BC \cdot BC = BC^2$

$\left. \begin{array}{l} ABC \sim ABH \\ ABC \sim ACH \end{array} \right\} \Rightarrow ABH \sim ACH$

اثبات رابطه شماره (۴) §

$\left. \begin{array}{l} A_1 + B = 90^\circ \\ C + B = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = C$
نسبت تناسب $\rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$



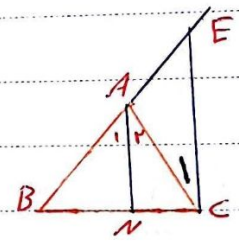
ثبات ۳۷۰ $MN \parallel AB \parallel CD$ فرض کنیم $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ حکم

اثبات ۸ قطر AC را رسم کنید.
 $\triangle ADC \text{ و } MK \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC}$
 $\triangle ABC \text{ و } NK \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

درس ۴ کاربرد های قضیه تالس و تشابه دو مثلث

قضیه ۱) در هر مثلث هر نیم سازه زاویه داخلی ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می کند.

فرض: $A_1 = A_2$ حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$



اثبات: ابتدا CE را موازی AN بر امتداد AB رسم می کنیم.

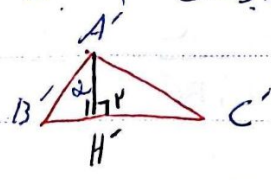
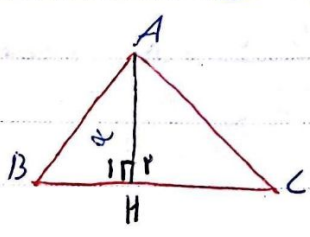
$AN \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BN}{NC}$ (۱)

BE مورب $NA \parallel CE$ و $A_1 = E$ } فرض $E = C_1 \Rightarrow$ متناهی الیافی $AEC \Rightarrow AE = AC$ (۲)
 AC مورب $AN \parallel CE$ و $A_2 = C_1$ } $A_1 = A_2$

$1 \text{ و } 2 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$

قضیه دوم) در هر دو مثلث متشابه نسبت اجزای متناظر و نسبت

محیط ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.



$ABC \sim A'B'C'$ فرض
 (یعنی ضلع ها متناسب و زاویه ها برابر است)
 الف) ارتفاع ها

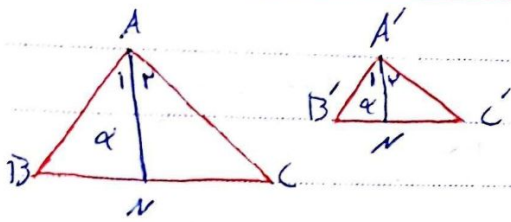
حکم: $\frac{AH}{A'H'} = k$

اثبات ۸

فرض $B = B'$
۹. $H_1 = H'_1$

فرض K

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{BH}{B'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = K$$



همان فرض قبلی = فرض

نیم سازها ۸

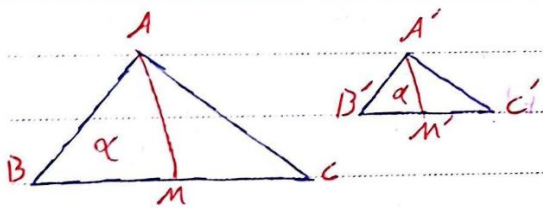
حکم ۸ $\frac{AN}{A'N'} = k$

فرض K

اثبات ۸ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AN}{A'N'} = \frac{BN}{B'N'} = k$

فرض $A_1 = A'_1$ بنا بر فرض $B = B'$ بنا بر فرض $A_1 = A'_1$

$\Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle A'B'N'$ (تساوی در زوایا) $\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AN}{A'N'} = \frac{BN}{B'N'} = k$



قبلی = فرض

صیانه دعا ۸

حکم ۸ $\frac{AM}{A'M'} = k$

اثبات ۸

بنا بر فرض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{\frac{BC}{2}}{\frac{B'C'}{2}} \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'}$

$B = B'$

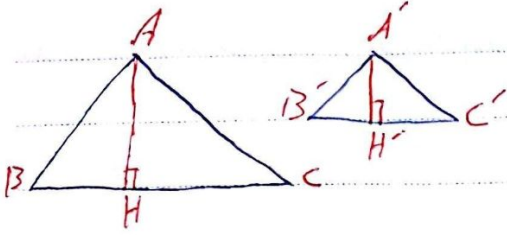
$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle A'B'M'$

تناسب در ضلع و زاویه بین

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$

صیانه دعا ۸ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k$

فرض $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$



(ارتفاع = AH) $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k$ اثبات 8

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'} = k \times k = k^2$$

اثبات 8

اگر دو ضلعی متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد، نسبت محیط‌های آن‌ها k و نسبت مساحت برابر k^2 .

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2$$

هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم متشابه هستند.

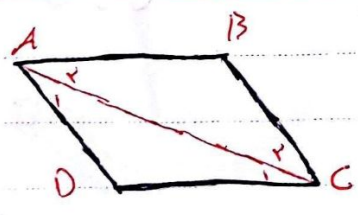
فصل ۳

ضلعی را مشخص کنیم که تعداد قطرهای آن در برابر تعداد اضلاع آن باشد.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \rightarrow n^2 - 3n = 4n \rightarrow n^2 - 7n = 0 \rightarrow n^2 - 7n = 0$$

$n=0$ قوی

$n(n-7) = 0 \rightarrow n=7$ ✓



قضیه ۱) در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل با هم برابرند.
 $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$ به فرقی
 $A = C$ و $B = D$ به کلی

$AC = AC$

اثبات 8. قطر AC را رسم می‌کنیم. (زفا ز) $\left. \begin{matrix} AB \parallel DC \text{ و } AC \text{ مورب} \rightarrow A_2 = C_1 \\ AD \parallel BC \text{ و } AC \text{ مورب} \rightarrow A_1 = C_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B = D$

$A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \rightarrow A = C$