هندسه ۱

فصل ۳

چندضلعی ها

مدرس: سیدابوذر حسینی

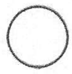
* از «خَم ساده» تا «چندضلعی»

در این قسمت، یک سری تعاریف برای رسیدن به تعریف **چندضلعی** ارائه می‌دهیم:

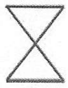
خم مسطح: مجموعه‌ای از نقاط است که بتوانیم آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کنیم.

☑ مثال: **خم‌های  و  و  مسطح‌اند، ولی خم  مسطح نیست.**

خم ساده: خم مسطحی است که خودش را قطع نمی‌کند، مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم می‌رسند.

☑ مثال: **خم‌های  و  و  ساده‌اند ولی خم  ساده نیست.**

خم بسته: اگر نقاط انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم، بسته نامیده می‌شود. خم بسته می‌تواند ساده باشد یا نباشد.

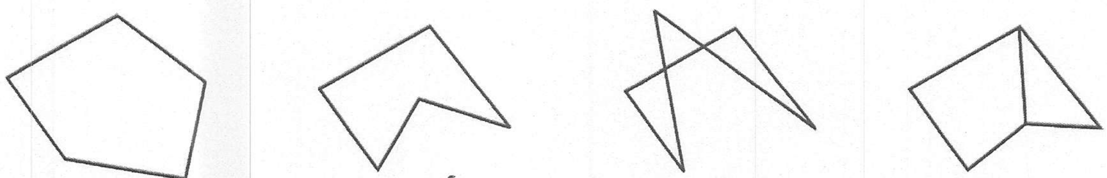
☑ مثال: **خم  ساده‌ی بسته است. خم  ساده است ولی بسته نیست. خم  بسته است ولی ساده نیست.**

تعریف: چندضلعی، شکلی است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد، به طوری که:

۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره خط متوالی که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

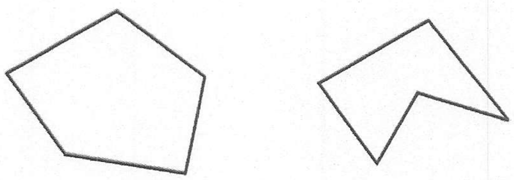
☑ مثال: **کدام یک از شکل‌های زیر چندضلعی است؟**



تعریف: چندضلعی را **محدّب** گوییم هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند. (به بیان ساده‌تر، زاویه‌ی بزرگ‌تر از 180° در چندضلعی وجود نداشته باشد.)

- هر چندضلعی را که محدب نباشد، **مقعر** می‌نامند.

☑ مثال: **کدام‌یک از چندضلعی‌های زیر محدب و کدام‌یک مقعر است؟**

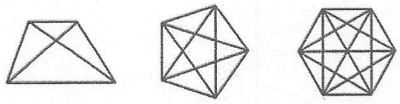


محدب　　　مقعر

* قطر در چندضلعی‌ها

تعریف: در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، **قطر** می‌نامیم.

از هر رأس یک n ضلعی محدب،   قطر می‌توان رسم کرد (خود رأس و دو رأس کناری آن که با ضلع به هم متصل‌اند، کم می‌شوند). لذا تعداد کل قطرهای هر n ضلعی محدب از رابطه‌ی $\frac{n(n-۳)}{۲}$ محاسبه می‌شود.



نکته: اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی محدب، یک ضلع اضافه شود، به تعداد اقطار، $(n-۱)$ قطر اضافه می‌شود.

یادآوری:

- مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ و مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.
- اگر n ضلعی، منتظم باشد، هر زاویه‌ی داخلی برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$ درجه و هر زاویه‌ی خارجی برابر $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه است.

☑ تست: **تعداد قطرهای یک nضلعی محدب، سه برابر تعداد اضلاع آن است. تعداد اضلاع کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۹ ✓

$$\frac{\cancel{n}(n-۳)}{۲} = ۳\cancel{n} \to \frac{n-۳}{۲} = ۳ \to n-۳ = ۶ \to n = ۹$$

☑ تست: **اگر مجموع زوایای داخلی یک nضلعی محدب برابر ۱۰۸۰° باشد، از هر رأس آن چند قطر قابل رسم است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵ ✓

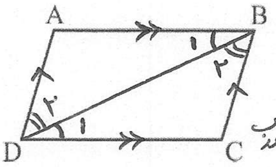
$$(n-۲)\times ۱۸۰ = ۱۰۸۰ \to n-۲ = \frac{۱۰۸۰}{۱۸۰} = ۶ \to n = ۸$$

از هر رأس $n-۳$ قطر یعنی $۸-۳$ قطر می‌گذرد

* چهارضلعی‌ها

۱- متوازی‌الاضلاع

تعریف: متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌روی آن دوبه‌دو موازی‌اند.

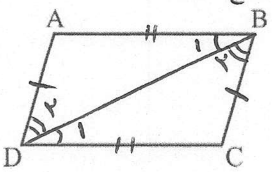


قضیه ۱: در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با هم برابرند.

ف: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$

برهان: قطر BD را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 & \text{موازی مورب} \\ BD = BD \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 & \text{موازی مورب} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \xrightarrow{\text{اجزا متناظر}} \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

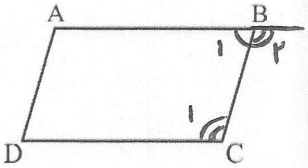


عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع روبه‌رو با هم برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

ف: $\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

برهان: قطر BD را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \\ BD = BD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \to \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی و مورب}} AB \parallel DC \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow{\text{م م ج ع}} AD \parallel BC \end{cases}$$



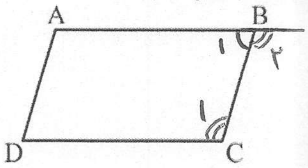
قضیه ۲: در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل‌اند. ح: $A+B=B+C=C+D=A+D=180^\circ$

$AB \parallel CD$ و BC مورب $\to \hat{C} = \hat{B}_2$

$\hat{B}$ نیم صفحه $\to B_1 + B_2 = 180$

$\to \boxed{\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180}$

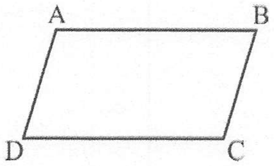
ما بقی تساوی‌ها نیز به همین ترتیب ثابت می‌شوند.



عکس قضیه ۲: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180 \end{cases} \to \hat{B}_2 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\text{م م ج ع}} AB \parallel CD$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $AD \parallel BC$

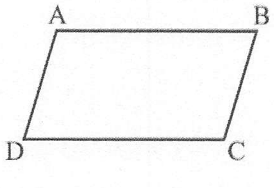


قضیه ۳: در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مقابل برابرند. ح: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$

از هم نهشتی قضیه ۱ داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{B} = \hat{D}$$

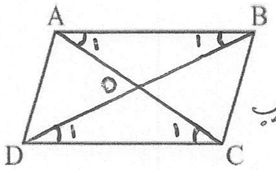
اجزای متناظر: $\hat{A} = \hat{C}$



عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه‌ی مقابل برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

$$\underbrace{\hat{A}}_{C} + \hat{B} + \hat{C} + \underbrace{\hat{D}}_{B} = 360 \to 2\hat{B} + 2\hat{C} = 360$$

$$\to \hat{B} + \hat{C} = 180 \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه ۲}} \text{ABCD متوازی الاضلاع}$$

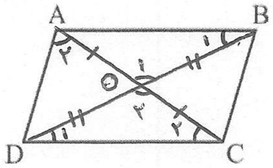


قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.

ح: $\begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \end{cases}$

$$\begin{cases} \hat{B}_1=\hat{D}_1 & \text{موازی و مورب} \\ AB=CD \\ \hat{A}_1=\hat{C}_1 & \text{" "} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \end{cases}$$

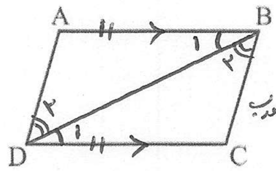
عکس قضیه ۴: اگر در یک چهارضلعی، قطرها منصف یکدیگر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.



$$\begin{cases} OA=OC \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ OB=OD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} B_1=D_1 \xrightarrow{\text{۳ ۲ ع}} AB \parallel DC$$

به همین ترتیب: $\overset{\triangle}{AOD} \cong \overset{\triangle}{BOC} \rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_2 \xrightarrow{\text{۳ ۲ ع}} AD \parallel BC$

☑ **مثال: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشد، متوازی‌الاضلاع است.**

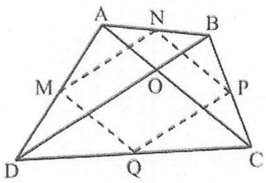


ف: $AB \overset{\parallel}{=} CD$ ح: ABCD متوازی‌الاضلاع $\rightarrow AD \parallel BC$

$$\begin{cases} AB=CD \\ \hat{B}_1=\hat{D}_1 & \text{موازی و مورب} \\ BD=BD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{B}_2=\hat{D}_2 \xrightarrow{\text{۳ ۲ ع}}$$

$\rightarrow AD \parallel BC \rightarrow$ متوازی‌الاضلاع ABCD

☑ **مثال: الف) ثابت کنید اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی محدب را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.**



ف: $AN=NB$ و $BP=PC$ و $CQ=QD$ و $AM=MD$ ح: ABCD متوازی‌الاضلاع

برهان: قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ABD}: \frac{AN}{NB}=\frac{AM}{MD}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BD$

به همین ترتیب: $\overset{\triangle}{BCD}: PQ \parallel BD$

$\rightarrow MN \parallel PQ$

$\overset{\triangle}{ABC}: \frac{BN}{NA}=\frac{BP}{PC}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NP \parallel AC$

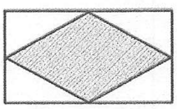
به همین ترتیب: $\overset{\triangle}{ADC}: MQ \parallel AC$

$\rightarrow NP \parallel MQ$

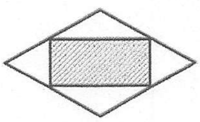
MNPQ متوازی‌الاضلاع

ب) رابطه‌ای برای محیط متوازی‌الاضلاع به دست آورید.

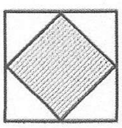
$$\begin{cases} MN=PQ=\frac{1}{2}BD \\ NP=MQ=\frac{1}{2}AC \end{cases} \rightarrow P_{MNPQ}=AC+BD$$



پ) اگر شکل اولیه مستطیل یا ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین باشد، شکل حاصل چیست؟ لوزی - چون در مستطیل دو قطر باهم برابر اند لذا هر چهارضلع متوازی الاضلاع حاصل باهم برابر می‌شوند.

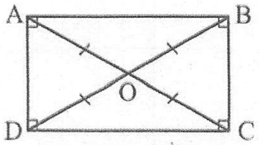


ت) اگر شکل اولیه لوزی باشد، شکل حاصل چیست؟ مستطیل - زاویه متوازی الاضلاع همان زاویه بین دو قطر است و چون در لوزی دو قطر برهم عمود شده لذا متوازی الاضلاع به مستطیل تبدیل می‌شود.



ث) اگر شکل اولیه مربع باشد، شکل حاصل چیست؟ مربع - ترکیب دو حالت (پ) و (ت)

۲- مستطیل



تعریف: مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه‌ی ۹۰ درجه دارد.

قضیه ۵: در هر مستطیل، دو قطر با هم برابر و منصف یکدیگرند.

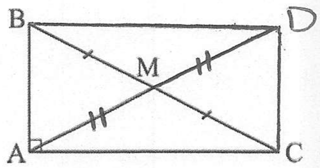
قضیه ۶: متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل است. ح: $ABCD$ مستطیل

ف: $\begin{cases} ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع} \\ AC=BD \end{cases}$

$$\begin{cases} DC=DC \\ AD=BC \\ AC=BD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{D}=\hat{C} \xrightarrow{D+C=180} \hat{D}=\hat{C}=90$$

$\rightarrow ABCD$ مستطیل

ویژگی‌های مهمی در مثلث قائم‌الزاویه



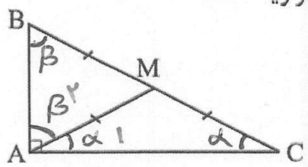
قضیه ۷: در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

برهان: میانه AM را به اندازه خودش تا D امتداد داده و از D به B و C وصل می‌کنیم:

$$\begin{cases} AM=DM \\ BM=CM \end{cases} \longrightarrow ABDC \text{ متوازی‌الاضلاع} \xrightarrow{\hat{A}=90} ABDC \text{ مستطیل}$$

$$\rightarrow \underbrace{AD}_{2AM}=BC \Rightarrow 2AM=BC \rightarrow AM=\frac{BC}{2}$$

عکس قضیه ۷: اگر در مثلثی، میانه‌ی وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است.



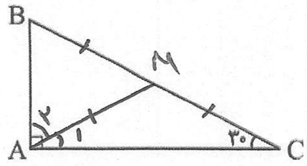
قرار می‌دهیم: $\begin{cases} \hat{C}=\alpha \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=\hat{C}=\alpha \\ \hat{B}=\beta \xrightarrow{MA=MB} \hat{A}_2=\hat{B}=\beta \end{cases}$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \underbrace{\hat{A}}_{\alpha+\beta}+\underbrace{\hat{B}}_{\beta}+\underbrace{\hat{C}}_{\alpha}=180 \rightarrow 2\alpha+2\beta=180$$

$$\rightarrow \alpha+\beta=90$$

$$\rightarrow \hat{A}=\alpha+\beta=90$$

قضیه ۸: در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه ۳۰ درجه باشد، آنگاه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.



برهان: میانه AM را رسم می‌کنیم: ف: $\hat{C}=30$ ح: $AB=\frac{BC}{2}$

$$\hat{C}=30^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=30 \Rightarrow \hat{A}_2=90-\hat{A}_1=90-30=60^\circ$$

$$\hat{B}=90-\hat{C}=90-30=60^\circ$$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABM}:\begin{cases}\hat{B}=60\\ A_2=60\end{cases} \longrightarrow \hat{M}=60 \longrightarrow$ متساوی‌الاضلاع $\overset{\triangle}{ABM}$

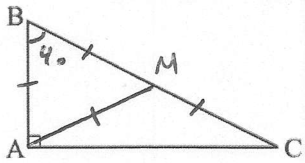
$$\longrightarrow AB=BM=\frac{BC}{2}$$

نکته: در قضیه‌ی فوق ضلع مجاور زاویه‌ی ۳۰ درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

$$\underbrace{AB^2}_{(\frac{BC}{2})^2}+AC^2=BC^2 \longrightarrow \frac{BC^2}{4}+AC^2=BC^2 \longrightarrow AC^2=BC^2-\frac{BC^2}{4}=\frac{3BC^2}{4}$$

$$\longrightarrow AC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$$

عکس قضیه ۸: در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک ضلع نصف وتر باشد، آنگاه زاویه‌ی روبه‌رو به این ضلع ۳۰ درجه است.



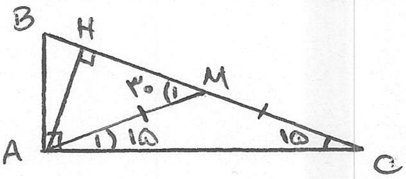
ف: $AB=\frac{BC}{2}$ ح: $\hat{C}=30$

برهان: میانه AM را رسم می‌کنیم:

$AB=AM=BM=\frac{BC}{2} \longrightarrow$ متساوی‌الاضلاع $\overset{\triangle}{ABM} \longrightarrow \hat{B}=60^\circ$

$$\longrightarrow \hat{C}=30^\circ$$

☑ **مثال:** در مثلث قائم‌الزاویه‌ی **ABC** $(\hat{C}=15^\circ , \hat{A}=90^\circ)$، ارتفاع **AH** و میانه‌ی **AM** را رسم می‌کنیم. اگر **BC=۴** باشد، طول **HM** را بیابید.

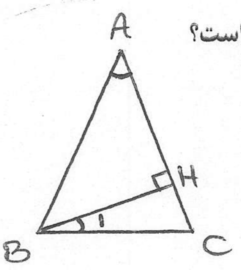


$$\hat{C}=15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=15^\circ$$

$\overset{\triangle}{AMC}$ زاویه خارجی $\hat{M}_1=\hat{A}_1+\hat{C}=15+15=30^\circ$

$\longrightarrow \overset{\triangle}{AHM}:\begin{cases}\hat{H}=90\\ \hat{M}_1=30\end{cases} \longrightarrow \underbrace{HM}_{\text{ضلع مجاور زاویه }30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{AM}_{\frac{BC}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{2}=\sqrt{3}$

☑ **تست:** در مثلث متساوی‌الساقینی، ارتفاع وارد بر ساق، نصف ساق است. زاویه‌ی بین این ارتفاع و قاعده کدام است؟



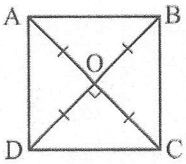
ف: $\begin{cases}AB=AC\\ BH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB\end{cases}$ ح: $\hat{B}_1=?$

$\overset{\triangle}{ABH}:\begin{cases}\hat{H}=90\\ BH=\frac{AB}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{عکس قضیه ۸}} \hat{A}=30^\circ \longrightarrow \hat{B}=\hat{C}=75^\circ$

$\longrightarrow \overset{\triangle}{BCH}:\begin{cases}\hat{H}=90\\ \hat{C}=75\end{cases} \longrightarrow \hat{B}_1=15^\circ$

۱) 15° ✓
۲) 30°
۳) 45°
۴) 60°

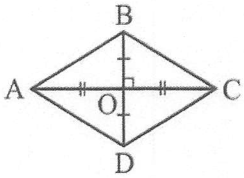
۳- مربع



تعریف: مربع، مستطیلی است که طول و عرض برابر دارد. (یا مستطیلی است که قطرهایش بر هم عمودند)

قضیه ۹: قطرهای مربع، نیمساز زوایای مربع می‌باشند و مربع را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنند.

۴- لوزی

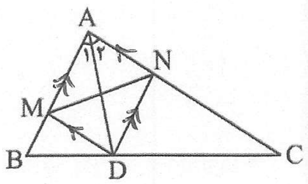


تعریف: لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که طول و عرض برابر دارد.

قضیه ۱۰: در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند و برعکس.

قضیه ۱۱: در لوزی قطرها نیمساز زوایای لوزی می‌باشند و برعکس.

☑ مثال: **در مثلث ABC، از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن‌ها را در M و N قطع کند. AD و MN نسبت به هم چه وضعی دارند؟**



$\begin{cases} DM \parallel AN \\ DN \parallel AM \end{cases} \longrightarrow$ متوازی الاضلاع AMDN

۱) فقط عمود بر هم

۲) فقط منصف هم

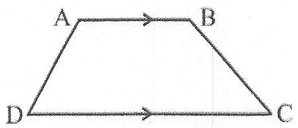
۳) زاویه‌ی بین آن‌ها مکمل زاویه‌ی A

$\xrightarrow[\text{قطر نیمساز است}]{\hat{A}_1=\hat{A}_2}$ لوزی AMDN $\longrightarrow$ AD و MN عمودمنصف هم

۴) عمودمنصف هم ✓

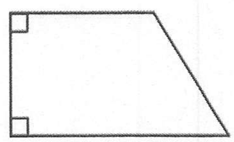
۵- ذوزنقه

تعریف: ذوزنقه، چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی‌اند.

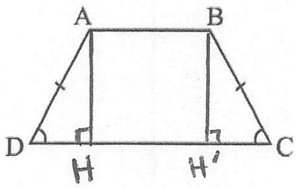


$$AB \| CD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \\ \hat{B}+\hat{C}=180^\circ \end{cases}$$

ضلع‌های غیر موازی AD و BC **ساق‌های** ذوزنقه و AB و CD **قاعده‌های** ذوزنقه نامیده می‌شوند.



نکته: هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر دیگری نیز عمود است و در این صورت ذوزنقه را **قائم‌الزاویه** می‌نامیم.



نکته: اگر $AD=BC$ باشد، ذوزنقه، **متساوی‌الساقین** نامیده می‌شود.

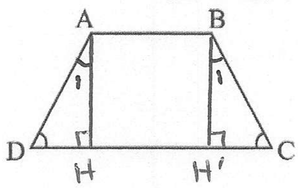
قضیه ۲: در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به یک قاعده برابرند.

ف: $AD=BC$ ح: $\hat{C}=\hat{D}$

فاصله دو خط موازی همواره برابر $\rightarrow$ $\begin{cases} AD=BC \\ AH=BH \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{ADH} \cong \overset{\triangle}{BCH'}$

$\xrightarrow{\text{اجزای تناظر}} \hat{C}=\hat{D}$

عکس قضیه ۲: اگر در یک ذوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده برابر باشند، آنگاه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

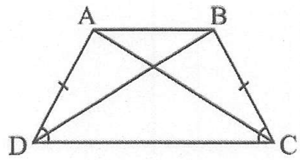


ف: $\hat{C}=\hat{D}$ ح: $AD=BC$

$\overset{\triangle}{BCH'}$ و $\overset{\triangle}{ADH}$: $\begin{cases} \hat{H}=\hat{H'}=90 \\ \hat{C}=\hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع زوایا ۱۸۰}} \hat{A}_1=\hat{B}_1$

$\begin{cases} \hat{A}_1=\hat{B}_1 \\ AH=BH' \\ \hat{H}=\hat{H'}=90 \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\triangle}{ADH} \cong \overset{\triangle}{BCH'} \xrightarrow{\text{اجزای تناظر}} AD=BC$

قضیه ۳: در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اقطار با یکدیگر برابرند و برعکس.



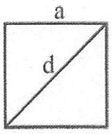
ف: $AD=BC$ ح: $AC=BD$

$\begin{cases} AD=BC \\ \hat{D}=\hat{C} \\ DC=DC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BCD} \xrightarrow{\text{اجزای تناظر}} AC=BD$

* مساحت و کاربردهای آن

- یادآوری:

۱- مربع



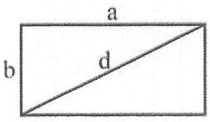
$$\begin{cases} S = a^{۲} \rightarrow \text{یک ضلع به توان ۲} \\ P = ۴a \\ d = a\sqrt{۲} \end{cases}$$

☑ **مثال:** مساحت یک مربع با محیط آن برابر است. طول قطر مربع را بیابید.

$S = P \rightarrow a^{\cancel{۲}} = ۴\cancel{a} \rightarrow a = ۴$

$\rightarrow d = a\sqrt{۲} = ٤\sqrt{۲}$

۲- مستطیل



$$\begin{cases} S = ab \rightarrow \text{طول * عرض} \\ P = ۲(a+b) \\ d = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}} \end{cases}$$

☑ **تست:** مستطیلی به طول ۴ و عرض b مفروض است. اگر نسبت قطر مستطیل به مساحت آن برابر $\frac{۵}{۱۲}$ باشد، b کدام است؟

$\frac{d}{S} = \frac{\sqrt{٤^{۲}+b^{۲}}}{\cancel{٤}b} = \frac{۵}{\cancel{۱۲}_{۳}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۱۶+b^{۲}}{b^{۲}} = \frac{۲۵}{۹} \rightarrow ۹\times۱۶+۹b^{۲} = ۲۵b^{۲}$

$\rightarrow ۹\times\cancel{۱۶} = ۲۵b^{۲} - ۹b^{۲} = \cancel{۱۶}b^{۲} \rightarrow b = ۳$

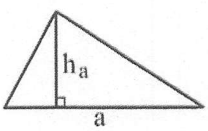
۱) ۲

۲) ۳ ✓

۳) ۴

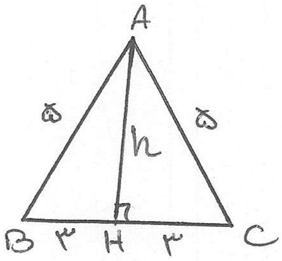
۴) ۵

۳- مثلث



$$\begin{cases} S = \frac{a \times h_a}{۲} \rightarrow \frac{\text{قاعده * ارتفاع}}{۲} \\ P = \text{مجموع طول سه ضلع} \end{cases}$$

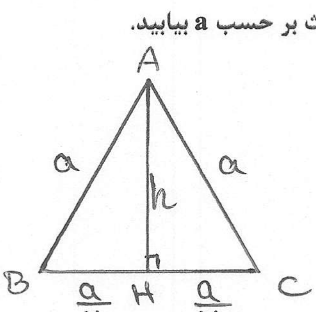
☑ **مثال:** در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AB=AC=۵ و BC=۶ است. مساحت مثلث را بیابید.



$\overset{\triangle}{ABH}: ۳^{۲}+h^{۲} = ۵^{۲} \rightarrow h^{۲} = ۲۵-۹ = ۱۶ \rightarrow h = ۴$

$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲}\times۴\times۶ = ۱۲$

☑ **مثال:** در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، اگر طول هر ضلع برابر a باشد، فرمولی برای ارتفاع و مساحت مثلث بر حسب a بیابید.

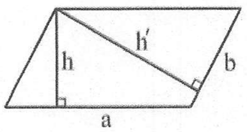


$\overset{\triangle}{ABH}: h^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲} = a^{۲} \rightarrow h^{۲}+\frac{a^{۲}}{۴} = a^{۲} \rightarrow h^{۲} = a^{۲}-\frac{a^{۲}}{٤} = \frac{۳a^{۲}}{۴}$

$\rightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

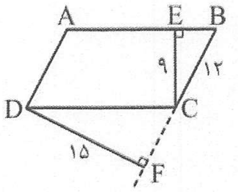
$S = \frac{۱}{۲}h\times a = \frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times a \rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$

۴- متوازی‌الاضلاع



$$\begin{cases} S = a \times h = b \times h' \rightarrow \text{ارتفاع * قاعده} \\ P = 2(a+b) \end{cases}$$

☑ تست: در شکل مقابل، **ABCD** متوازی‌الاضلاع است. با توجه به اندازه‌ها، طول **AB** کدام است؟

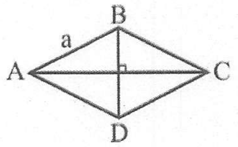


$$S = AB \times \underbrace{CE}_{9} = \underbrace{DF}_{15} \times \underbrace{BC}_{12} \rightarrow AB = \frac{15 \times 12}{9}$$

$$\rightarrow \boxed{AB = 20}$$

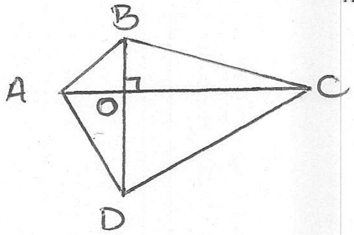
۱) ۱۵
۲) ۱۸
۳) ۲۰ ✓
۴) ۲۱

۵- لوزی



$$\begin{cases} S = \dfrac{AC \times BD}{2} \rightarrow \text{نصف حاصل‌ضرب دو قطر} \\ P = 4a \end{cases}$$

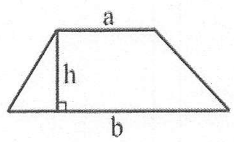
☑ مثال: در چهارضلعی **ABCD**، دو قطر **AC** و **BD** بر هم عمودند. ثابت کنید: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \times BO + \frac{1}{2} AC \times DO$$

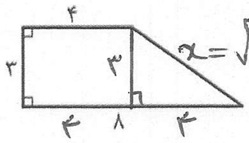
$$= \frac{1}{2} AC(\underbrace{BO + DO}_{BD}) \rightarrow \boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD}$$

۶- ذوزنقه



$$\begin{cases} S = \dfrac{(a+b) \times h}{2} \rightarrow \text{نصف مجموع دو قاعده * ارتفاع} \\ P = \text{مجموع طول چهار ضلع} \end{cases}$$

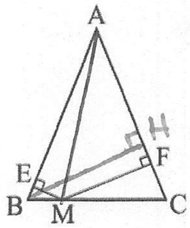
☑ تست: مساحت شکل مقابل، چند برابر محیط آن است؟



$$x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}(4+8) \times 3}{3+4+5+8} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

۱) $\frac{10}{9}$
۲) $\frac{9}{10}$ ✓
۳) $\frac{23}{18}$
۴) $\frac{18}{23}$



☑ **مثال مهم:** در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC$ است، از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی BC دو عمود ME و MF را بر دو ساق رسم کرده‌ایم. نشان دهید: $ME+MF=BH$

برهان: از M به A وصل می‌کنیم:

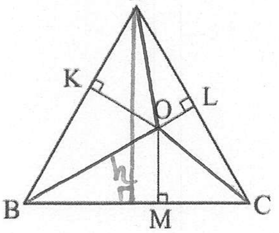
$$S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}BH\times AC=\frac{1}{2}ME\times \underset{AC}{\underline{AB}}+\frac{1}{2}MF\times AC$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}BH\times \cancel{AC}=\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AC}(ME+MF)\rightarrow \boxed{ME+MF=BH}$$

✍ **نتیجه:** در هر مثلث متساوی‌الساقین، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

☑ **مثال مهم:** در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، از نقطه‌ی دلخواه O درون مثلث سه عمود OK، OL و OM را بر سه ضلع رسم می‌کنیم. نشان دهید: $OK+OL+OM=h$



برهان: از O به A و B و C وصل می‌کنیم:

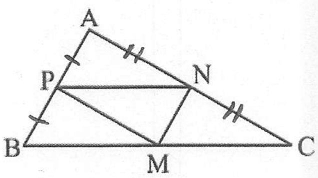
$$S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2}a}\times h=\cancel{\frac{1}{2}a}\times OK+\cancel{\frac{1}{2}a}\times OL+\cancel{\frac{1}{2}a}\times OM$$

$$\rightarrow \boxed{h=OK+OL+OM}$$

✍ **نتیجه:** در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.

☑ **مثال:** M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\overset{\triangle}{APN}\cong\overset{\triangle}{MNP}\cong\overset{\triangle}{BMP}\cong\overset{\triangle}{CMN}$



$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}=1\xrightarrow{\text{عکس تالس}}PN\parallel BC$$

به همین ترتیب: $PM\parallel AC$ ← PNCM متوازی‌الاضلاع

$$\xrightarrow[\text{متوازی‌الاضلاع}]{MN\ \text{قطر}}\overset{\triangle}{PMN}\cong\overset{\triangle}{CMN}$$

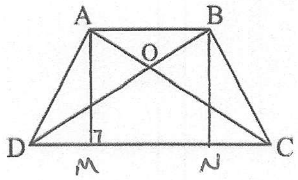
متوازی‌الاضلاع $APMN\rightarrow\overset{\triangle}{PMN}\cong\overset{\triangle}{APN}$

" " $BMNP\rightarrow\overset{\triangle}{PMN}\cong\overset{\triangle}{BMP}$

$$\rightarrow \overset{\triangle}{APN}\cong\overset{\triangle}{MNP}\cong\overset{\triangle}{BMP}\cong\overset{\triangle}{CMN}$$

✍ **نتیجه:** اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه هم‌مساحت به وجود می‌آید.

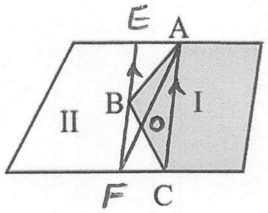
☑ مثال (قضیه شبه پروانه): در ذوزنقه‌ی **ABCD**، دو قطر **AC** و **BD** در **O** متقاطع‌اند. ثابت کنید: $S_{OAD}=S_{OBC}$



$$S_{ADC}=\frac{1}{2}DC\times AM$$
$$S_{BDC}=\frac{1}{2}DC\times BN$$
$$\xrightarrow[\text{فاصله دو خط موازی}]{AM=BN} S_{ADC}=S_{BDC}$$

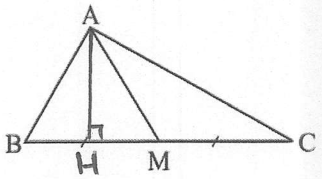
$$\longrightarrow S_{AOD}+\cancel{S_{DOC}}=S_{BOC}+\cancel{S_{DOC}} \longrightarrow S_{AOD}=S_{BOC}$$

کاربردی از مثال قبل: در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک **ABC** بین زمین‌های خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آن‌ها تغییر نکند. چگونه باید این کار را انجام دهند؟



از A به C وصل کرده و از B به موازات AC رسم می‌کنیم تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. حال اگر از A به F وصل کنیم، AF می‌تواند مرز جدید باشد (EC نیز می‌تواند باشد)، زیرا طبق قضیه شبه پروانه $S_{AOB}=S_{COF}$ است.

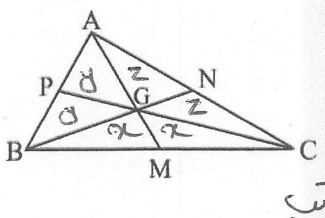
☑ مثال مهم: الف) نشان دهید در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.



ف: $BM=CM$ ح: $S_{ABM}=S_{ACM}$

$$S_{ABM}=\frac{1}{2}AH\times BM$$
$$S_{ACM}=\frac{1}{2}AH\times CM$$
$$\xrightarrow{BM=CM} S_{ABM}=S_{ACM}$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید سه میانه‌ی مثلث، آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

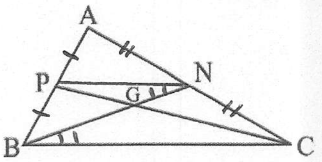


$\overset{\triangle}{GBC}$: میانه GM $\longrightarrow S_{GBM}=S_{GCM}=x$

به همین ترتیب:
$\overset{\triangle}{GAB}$: " GP $\longrightarrow S_{GAP}=S_{GBP}=y$
$\overset{\triangle}{GAC}$: " GN $\longrightarrow S_{GAN}=S_{GCN}=z$

$\overset{\triangle}{ABC}$:
میانه AM $\longrightarrow 2y+\cancel{x}=2z+\cancel{x} \longrightarrow y=z$
" BN $\longrightarrow 2y+\cancel{z}=2x+\cancel{z} \longrightarrow y=x$
$\longrightarrow x=y=z$

قضیه مهم: سه میانه هر مثلث همرس‌اند و نقطه‌ی همرسی، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.



برهان: از P به N وصل می‌کنیم:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}}$$

$$\frac{PN}{BC}=\frac{AP}{AB}^{1/2} \rightarrow \frac{PN}{BC}=\frac{1}{2}$$

$$\text{موازی مورب} \rightarrow \begin{cases}\hat{N}_1=\hat{B}_1\\ \hat{G}_1=\hat{G}_2\end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle PNG \sim \triangle GBC \xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}}$$

$$\frac{GN}{GB}=\frac{GP}{GC}=\frac{PN}{BC}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{GB}{GN}=\frac{GC}{GP}=\frac{2}{1}$$

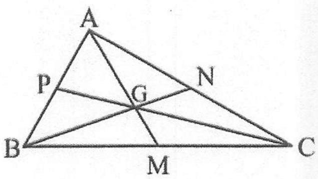
چون دو میانه‌ی BN و CP دلخواه بودند، پس این رابطه در مورد هر دو میانه‌ی دیگر نیز برقرار است، در نتیجه هر ۳ میانه‌ی مثلث هم رس اند.

نتیجه: میانه‌های هر مثلث همرس‌اند.

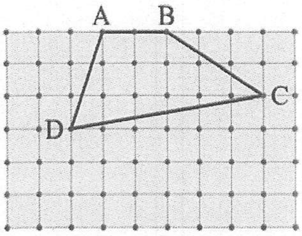
نکته‌ی ۱: محل همرسی میانه‌های هر مثلث دلخواه، همواره داخل مثلث قرار دارد.

نکته‌ی ۲: محل همرسی میانه‌های مثلث، مثلث نامیده می‌شود و معمولاً با حرف G نام‌گذاری می‌شود. **مرکز ثقل**

نکته‌ی ۳: مرکز ثقل مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



$$\frac{AG}{GM}=\frac{BG}{GN}=\frac{CG}{GP}=۲$$



* نقاط شبکه‌ای و مساحت

در شکل مقابل، نقاطی عمودی و افقی در کنار هم وجود دارند به طوری که فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی متوالی روی یک خط عمودی (یا افقی) از هم برابر یک واحد است. به این نقاط، **نقاط شبکه‌ای** و به چندضلعی ABCD، یک **چندضلعی شبکه‌ای** می‌گوییم.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را **نقاط مرزی** و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را **نقاط درونی شبکه‌ای** می‌نامیم.

به طور مثال چهارضلعی ABCD دارای ۵ نقطه‌ی مرزی و ۹ نقطه‌ی درونی شبکه‌ای است.

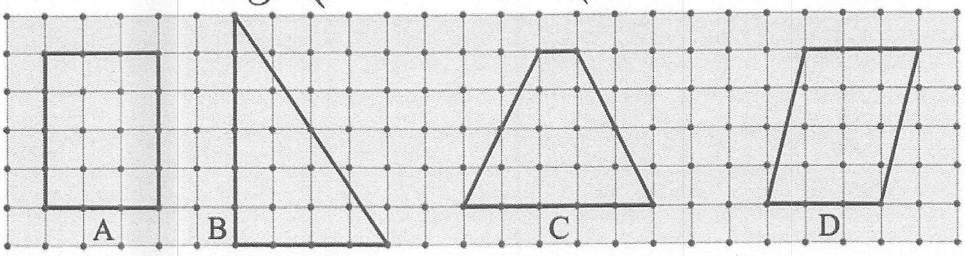
فرمول پیک: اگر تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان دهیم، مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با: $\boxed{S=\frac{b}{۲}-۱+i}$

به کمک فرمول پیک می‌توان مساحت شکل‌های نامنظم هندسی را به طور تقریبی محاسبه کرد.

☑ **مثال:** **در شکل‌های زیر، مساحت چندضلعی‌های داده شده را ابتدا به روش معمول محاسبه کنید. سپس با تعیین نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و درستی فرمول پیک را تحقیق کنید.**

$S_B=\frac{۴\times۶}{۲}=۱۲$ $S_C=\frac{(۱+۵)\times۴}{۲}=۱۲$

$S_A=۳\times۴=۱۲$



$S_D=$

چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	$\frac{۱۴}{۲}-۱+۶$ ۱۲	$\frac{۱۲}{۲}-۱+۷$ ۱۲	$\frac{۱۰}{۲}-۱+۸$ ۱۲	$\frac{۸}{۲}-۱+۹$ ۱۲

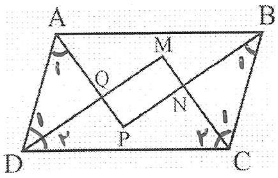
خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟ (تمرین ۱ صفحه ۶۳)

$$\frac{n(n-3)}{2}=n \rightarrow \frac{n-3}{2}=1 \rightarrow n-3=2 \rightarrow n=5$$

۲- ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل پدید می‌آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)

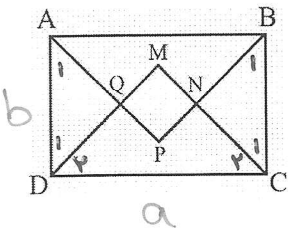


$$\hat{A}+\hat{D}=180 \rightarrow \hat{A}_1+\hat{D}_1=\frac{180}{2}=90 \rightarrow \hat{Q}=90$$
$$\hat{B}+\hat{C}=180 \rightarrow \hat{B}_1+\hat{C}_1=\frac{180}{2}=90 \rightarrow \hat{N}=90$$
$$\hat{C}+\hat{D}=180 \rightarrow \hat{C}_2+\hat{D}_2=\frac{180}{2}=90 \rightarrow \hat{M}=90$$
$$\Rightarrow \hat{P}=90$$

← MNPQ مستطیل است.

۳- الف) ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)

مانند سؤال قبل ۹۰ درجه بودن چهار زاویه‌ی MNPQ را به راحتی می‌توان ثابت کرد:



$$\hat{A}_1=\hat{D}_1=45 \rightarrow \hat{Q}=90$$
$$\hat{B}_1=\hat{C}_1=45 \rightarrow \hat{N}=90$$
$$\hat{C}_2=\hat{D}_2=45 \rightarrow \hat{M}=90 \Rightarrow \hat{P}=90$$ → تا اینجا MNPQ مستطیل است

$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{B}_1=45\\ AD=BC\\ \hat{D}_1=\hat{C}_1=45\end{cases} \xrightarrow{(ز ض ز)} \overset{\triangle}{AQD}\cong\overset{\triangle}{BNC} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} QD=NC \quad (1)$$

$$\hat{C}_2=\hat{D}_2=45 \rightarrow \overset{\triangle}{MDC}: MD=MC \quad (2)$$

(۱) و (۲) $\rightarrow \underbrace{MD-QD}_{MQ}=\underbrace{MC-NC}_{MN} \rightarrow MQ=MN \rightarrow$ MNPQ مربع است

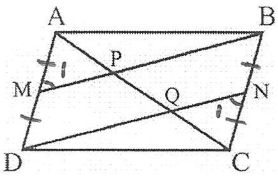
ب) اگر طول و عرض مستطیل برابر a و b باشند، اندازه‌ی ضلع مربع را برحسب a و b بیابید. (تمرین ۴ صفحه ۶۴)

$$\overset{\triangle}{MDC}: MD^2+\underbrace{MC^2}_{MD}=a^2 \rightarrow 2MD^2=a^2 \rightarrow MD^2=\frac{a^2}{2} \rightarrow MD=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{\triangle}{AQD}: \underbrace{AQ^2}_{QD}+QD^2=b^2 \rightarrow 2QD^2=b^2 \rightarrow QD^2=\frac{b^2}{2} \rightarrow QD=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

ضلع مربع $MD=\underbrace{MD}_{\frac{a}{\sqrt{2}}}-\underbrace{QD}_{\frac{b}{\sqrt{2}}}=\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{b}{\sqrt{2}} \rightarrow MD=\frac{a-b}{\sqrt{2}}$

۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC می‌باشند، (تمرین ۷ صفحه ۶۴)



الف) ثابت کنید MB موازی DN است.

$AD=BC \to \frac{AD}{2}=\frac{BC}{2} \to AM=CN$

$\begin{cases} AB=CD \\ \hat{A}=\hat{C} \\ AM=CN \end{cases} \xrightarrow{(ض ز ض)} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{CDN} \xrightarrow{اجزا تقابل} \hat{M}_1=\hat{N}_1$

$AD \parallel BC$ و DN مورب $\to \hat{D}_1=\hat{N}_1$

$\to \hat{M}_1=\hat{D}_1 \xrightarrow{مرجع} MB \parallel DN$

ب) ثابت کنید: $AP=PQ=QC$

$\overset{\triangle}{ADQ}: MP \parallel DQ \xrightarrow{جزء به جزء} \frac{AM}{MD}=\frac{AP}{PQ} \to AP=PQ$

$\overset{\triangle}{CBP}: QN \parallel PB \xrightarrow{جزء به جزء} \frac{CN}{NB}=\frac{CQ}{QP} \to CQ=QP$

$\to AP=PQ=QC$

سؤالات تستی:

۱- در کدام چندضلعی، تعداد قطرها، سه واحد بیشتر از تعداد ضلع‌ها است؟

۱) ۵ضلعی ۲) ۶ضلعی ✓

۳) ۸ضلعی ۴) ۱۰ضلعی

۲- شکل حاصل از به هم وصل کردن اوساط اضلاع یک ....، یک .... است.

۱) ذوزنقه ـ لوزی ۲) لوزی ـ مستطیل ✓ ۳) مستطیل ـ مربع ۴) مربع ـ لوزی

۳- شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی ....، یک .... است.

۱) متوازی‌الاضلاع ـ مربع ۲) لوزی ـ مربع ۳) مربع ـ مستطیل ۴) مستطیل ـ مربع ✓

۴- از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۱۶، یک مربع پدید می‌آید که مساحتش برابر است با:

$x=\frac{a-b}{\sqrt{2}}=\frac{16-12}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$

$S=x^2=\frac{16}{2}=8$

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۴

۳) ۸ ✓ ۴) $8\sqrt{2}$

۵- در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۴ و ۱۲، طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است. اوساط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم، محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

۱) $4\sqrt{5}$

۲) $8\sqrt{5}$ ✓

۳) $4\sqrt{10}$

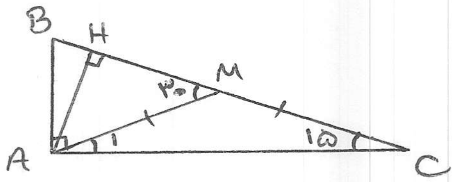
۴) $8\sqrt{10}$

خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه ۱۵ درجه باشد، آنگاه ثابت کنید ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است. (تمرین ۶ صفحه ۶۴)

$C: AH=\frac{1}{4}BC$



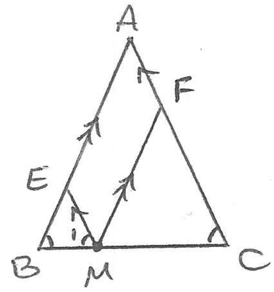
برهان: میانه وارد بر وتر AM را رسم می‌کنیم:

$\hat{C}=15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=\hat{C}=15^\circ$

$\overset{\triangle}{AMC}$ زاویه خارجی $\hat{M}=\hat{A}_1+\hat{C}=15+15=30^\circ$

$\overset{\triangle}{AHM}:\begin{cases}\hat{H}=90\\ \hat{M}=30\end{cases} \longrightarrow AH=\frac{1}{2}AM \xrightarrow{\frac{1}{2}BC} AH=\frac{1}{4}BC$

۲- از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC)، دو خط به موازات دو ساق رسم می‌کنیم تا آنها را در E و F قطع کند. ثابت کنید: $ME+MF=AB=AC$



$\begin{cases}AF \parallel ME\\ AE \parallel MF\end{cases} \longrightarrow$ متوازی‌الاضلاع $AEMF \longrightarrow MF=AE$ (۱)

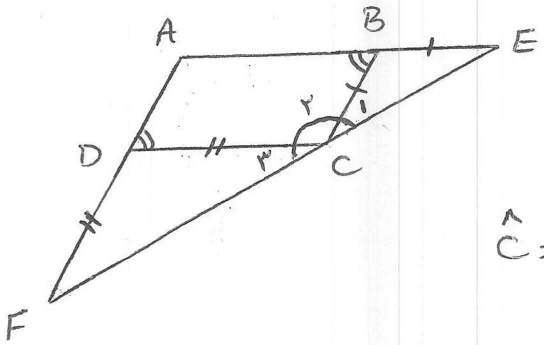
$AB=AC \longrightarrow \hat{B}=\hat{C}$

$EM \parallel AC$ و مورب $BC \rightarrow \hat{M}_1=\hat{C}$

$\longrightarrow \hat{B}=\hat{M}_1 \rightarrow ME=EB$ (۲)

(۱) و (۲) $\Longrightarrow ME+MF=\underbrace{AE+EB}_{AB}$

۳- در متوازی‌الاضلاع ABCD، روی امتداد AB به اندازه‌ی BE=BC و روی امتداد AD به اندازه‌ی DF=DC جدا می‌کنیم. ثابت کنید نقاط C، E و F بر یک امتدادند.



$\overset{\triangle}{BCE}: BC=BE \longrightarrow \hat{C}_1=\hat{E} \longrightarrow$ زاویه خارجی $\hat{B}=2\hat{C}_1 \rightarrow C_1=\frac{\hat{B}}{2}$

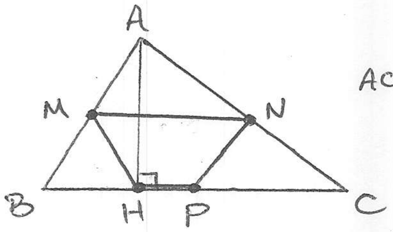
$\overset{\triangle}{CDF}: DF=DC \longrightarrow \hat{C}_3=\hat{F} \longrightarrow$ زاویه خارجی $\hat{D}=2\hat{C}_3 \rightarrow C_3=\frac{\hat{D}}{2}$

$\hat{C}=\hat{C}_1+\hat{C}_2+\hat{C}_3=\frac{\hat{B}}{2}+C_2+\frac{\hat{D}}{2}=\hat{D}+\hat{C}_2=180$

$B=D$

E و C و F بر یک امتدادند

۴- در یک مثلث غیرمشخص، وسطهای سه ضلع و پای یک ارتفاع را به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید چهارضلعی حاصل ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.



وسطهای AC و AB ، M و N $\rightarrow$ MN || HP $\rightarrow$ تا اینجا ذوزنقه

میان خط NP $\parallel \frac{1}{2}$ AB

$\triangle$ABH: HM $= \frac{1}{2}$ AB

میانه وارد بر وتر

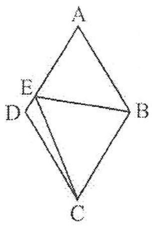
$\rightarrow$ NP=HM $\rightarrow$ ذوزنقه متساوی الساقین

سؤالات تستی:

۱- کدام‌یک از تعاریف زیر، تعریف لوزی است؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که اضلاعش با هم برابرند. ۲) چهارضلعی که اقطارش بر هم عمودند.

۳) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگرند. ۴) مربعی که اقطارش بر هم عمودند.



۲- در لوزی ABCD شکل مقابل، AB = BE می‌باشد. اگر $B\hat{E}C = ۵۵^\circ$ باشد، زاویه‌ی DEC چند درجه است؟

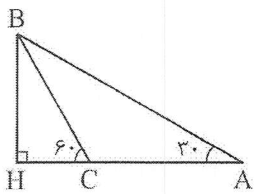
۱) ۳۵ ۲) ۵۵

۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۳- در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قاعده‌ی کوچک برابر هر ساق و قاعده‌ی بزرگ دو برابر قاعده‌ی کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی ذوزنقه چقدر است؟

۱) ۷۵° ۲) ۶۰°

۳) ۴۵° ۴) ۷۲°



۴- در شکل مقابل، اگر طول AC برابر ۵۰ متر باشد، طول AH چند متر است؟

۱) ۷۵

۲) ۸۰

۳) ۸۵

۴) ۹۰

۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده و از H به نقاط E و F اوساط اضلاع AB و AC وصل می‌کنیم. زاویه‌ی EHF برابر است با:

۱) ۷۵°

۲) ۸۰°

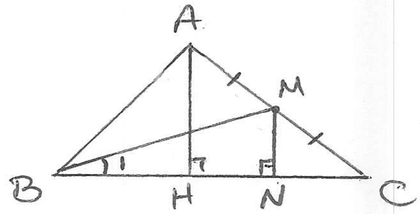
۳) ۹۰°

۴) ۱۰۵°

هندسه ۱ (پایه دهم) — **کاربرگ شماره ۳** — **مدرس: سیدابوذر حسینی**

سؤالات تشریحی:

۱- در مثلث ABC، ارتفاع AH با میانه‌ی BM برابر است. اندازه‌ی زاویه‌ی $C\hat{B}M$ را بیابید. (راهنمایی: از M بر BC عمود کنید)

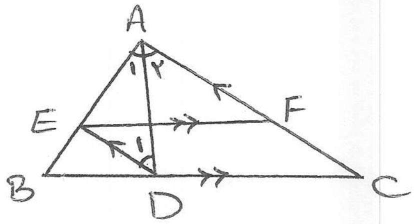


ف: $AH = BM$ ح: $\hat{B}_1 = ?$

$\left.\begin{array}{l} MN \perp BC \\ AH \perp BC \end{array}\right\} \to MN \parallel AH \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{MN}{AH} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{2} \to MN = \frac{1}{2} AH$

$\xrightarrow{AH=BM} MN = \frac{1}{2} BM \to BMN : \hat{B}_1 = 30^\circ$

۲- نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و از نقطه‌ی D خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. سپس از E خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. ثابت کنید: $AE = FC$



ف: $\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ DE \parallel AC \\ EF \parallel BC \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} EF \parallel DC \\ ED \parallel FC \end{array}\right\} \to$ متوازی الاضلاع $EFCD \to FC = ED$ (۱)

$ED \parallel AF$ و مورب $AD \to \hat{A}_2 = \hat{D}_1 \xrightarrow{A_1 = A_2} \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \to AE = ED$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow AE = FC$

سؤالات تستی:

۱- مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای رسم شده از هر رأس یک nضلعی، کدام است؟

۱) $n-2$ ۲) $n-1$ ✓   ۳) n ۴) $n-3$

۲- اگر در یک nضلعی، نسبت تعداد اقطار به تعداد اضلاع ۱۰ باشد، تعداد رئوس این چندضلعی برابر است با:

۱) ۲۰   ۲) ۲۱

۳) ۲۲   ۴) ۲۳ ✓

$\frac{\frac{n(n-3)}{2}}{n} = 10 \to \frac{n-3}{2} = 10 \to n = 23$

۳- قطرهای کدام چهارضلعی منصف یکدیگر نمی‌باشند؟

۱) متوازی‌الاضلاع   ۲) مستطیل   ۳) مربع   ۴) ذوزنقه ✓

۴- کدام‌یک از تعاریف زیر، تعریف مربع نیست؟

۱) مستطیلی که دو ضلع مجاورش برابرند.   ۲) لوزی که قطرهایش برابرند.

۳) لوزی که دو ضلع مجاورش بر هم عمودند.   ۴) مستطیلی که قطرهایش برابرند. ✓

۵- در چهارضلعی ABCD داریم: $AB \parallel CD$ و $AD=BC=CD$. اگر زاویه‌ی $B\hat{A}C=۳۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $C\hat{A}D$ چقدر است؟

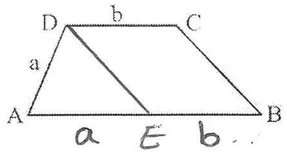
۱) ۲۰°

۲) ۳۰°

۳) ۴۰°

۴) ۱۵°

۶- در ذوزنقه‌ی ABCD شکل مقابل داریم: $\hat{D}=۲\hat{B}$ ، با توجه به اندازه‌ها، طول AB کدام است؟



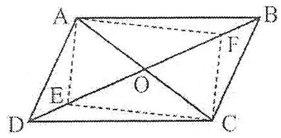
۱) $a+b$

۲) $۲(a+b)$

۳) $b-a$

۴) $۲(b-a)$

۷- در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل، نقاط E و F را روی قطر BD طوری انتخاب می‌کنیم که $OE=OF=AO$ باشد. نوع چهارضلعی AECF کدام است؟



۱) متوازی‌الاضلاع

۲) ذوزنقه

۳) مربع

۴) مستطیل

۸- از برخورد نیمسازهای داخلی شکل A، شکل B و از برخورد نیمسازهای داخلی شکل B، یک مربع ایجاد شده است. شکل A کدام بوده است؟

۱) مستطیل ۲) مربع

۳) لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع

۹- اگر a و b اضلاع یک مستطیل باشند، آنگاه مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{a^۲+b^۲}{۲}$ ۲) $\frac{a^۲-b^۲}{۲}$

۳) $\frac{(a-b)^۲}{۲}$ ۴) $\frac{(a+b)^۲}{۲}$

۱۰- اگر اقطار یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) مستطیل

۳) لوزی ۴) مربع

۱۱- اگر اقطار یک چهارضلعی با هم مساوی باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) مستطیل

۳) لوزی ۴) مربع

۱۲- اگر اوساط اضلاع یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۳ را به هم وصل کنیم، محیط شکل حاصل چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ✓

۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۱۳- در تست قبل، مساحت شکل حاصل چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸

۳) ۶ ✓ ۴) ۱۶

۱۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، زاویه‌ی قائمه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر $\sqrt{۳}$ باشد، اندازه‌ی وتر کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) ۴ ✓

۳) ۳

۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، دو برابر ارتفاع وارد بر وتر است. تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث کدام است؟

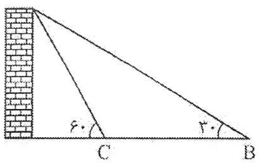
۱) ۱۵°

۲) ۷۵°

۳) ۳۰°

۴) ۶۰° ✓

۱۶- در شکل مقابل، $\hat{B}=۳۰^\circ$، $\hat{C}=۶۰^\circ$ و $BC=۱۱۲$ متر است. ارتفاع دیوار چند متر است؟



۱) $۵۶\sqrt{۳}$ ✓

۲) $۵۶\sqrt{۲}$

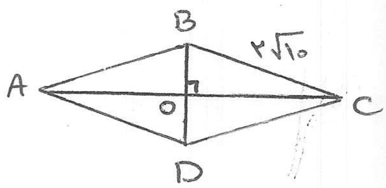
۳) $۶۰\sqrt{۳}$

۴) $۶۰\sqrt{۲}$

خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را بیابید. (تمرین ۱ صفحه ۷۲)



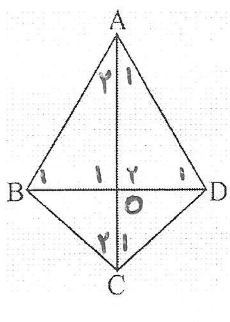
$\frac{BD}{AC}=\frac{1}{3} \to \frac{BO}{OC}=\frac{1}{3}$

$\overset{\triangle}{BOC}: BO^2+\underbrace{OC^2}_{(3BO)^2}=2\sqrt{10} \to 10BO^2=40 \to BO=2 \to BD=4$

$\to OC=3BO=6 \to AC=12$

$\to S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times 4\times 12=24$

۲- در چهارضلعی ABCD شکل مقابل، $AB=AD$ و $BC=CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی **کایت** نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است. (تمرین ۲ صفحه ۷۲)



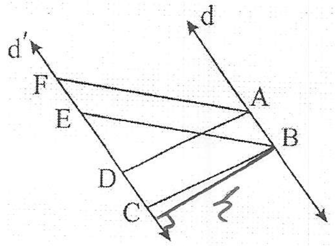
$\begin{cases}AB=AD\\ BC=DC\\ AC=AC\end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC} \to \begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2\end{cases} \to$ AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است

$\begin{cases}AB=AD\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AO=AO\end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{AOD} \to \begin{cases}OB=OD \quad (1)\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \xrightarrow{O_1+O_2=180} \hat{O}_1=\hat{O}_2=90 \quad (2)\end{cases}$

(۱) و (۲) $\Rightarrow$ BD عمودمنصف AC

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$

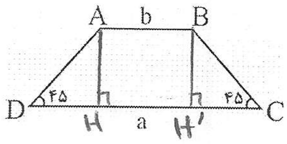
۳- در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S کدام است. (تمرین ۳ صفحه ۷۲)



$$S_{ABCD} = \frac{1}{۲} AB \times h$$

$$S_{ABEF} = \frac{1}{۲} AB \times h \rightarrow S_{ABCD} = S_{ABEF} = S$$

۴- در ذوزنقه‌ی شکل مقابل، اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده ۴۵° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. (تمرین ۴ صفحه ۷۲)

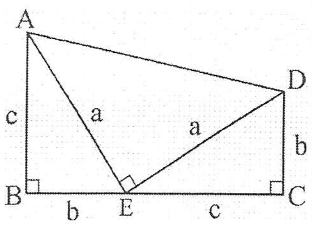


مثلث های ADH و BCH′ قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین اند:

$$AH = BH' = DH = CH' = \frac{a-b}{۲}$$

$$S = \frac{(CD+AB)\times AH}{۲} = \frac{(a+b)\left(\frac{a-b}{۲}\right)}{۲} = \frac{1}{۴}(a^۲ - b^۲)$$

۵- مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



$$۱: S = \frac{(AB+CD)\times BC}{۲} = \frac{(b+c)\times(b+c)}{۲} = \frac{(b+c)^۲}{۲}$$

$$۲: S = S_{ABE} + S_{CDE} + S_{ADE} = \frac{bc}{۲} + \frac{bc}{۲} + \frac{a^۲}{۲}$$

$$\rightarrow ۱ = ۲ \rightarrow \frac{(b+c)^۲}{\cancel{۲}} = \frac{۲bc + a^۲}{\cancel{۲}} \rightarrow b^۲ + c^۲ + \cancel{۲bc} = \cancel{۲bc} + a^۲$$

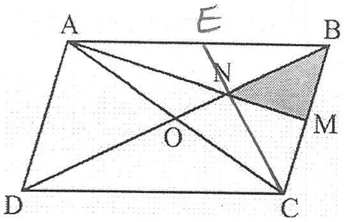
$$\rightarrow b^۲ + c^۲ = a^۲$$

اثبات قضیه‌ی فیثاغورس

هندسه ۱ (پایه دهم) | کاربرگ شماره ۵ | مدرس: سیدابوذر حسینی

سؤالات تشریحی:

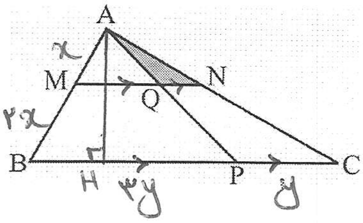
۱- در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطه‌ی M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM، قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید: $S_{BMN}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$ (تمرین ۶ صفحه ۷۲)



C را به N وصل کرده، امتداد میدهیم تا AB را در E قطع کند، N محل همرسی میانه‌ها است، پس:

$$S_{BMN}=\frac{1}{6}\underbrace{S_{ABC}}_{\frac{1}{2}S_{ABCD}}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$$

۲- در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC و $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$ است. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟ (تمرین ۷ صفحه ۷۳)



موازی مورب $\begin{cases}\hat{N}=\hat{C}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \triangle AQN \sim \triangle APC \to$ نسبت تشابه $k=\frac{AN}{AC}\overset{\text{تالس}}{=}\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$

$$\to \frac{S_{AQN}}{S_{APC}}=k^2=\frac{1}{9}\to S_{AQN}=\frac{1}{9}S_{APC}$$

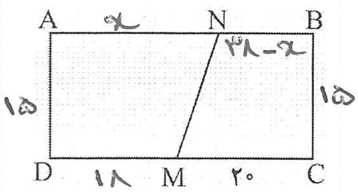
$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AH}\times \overset{y}{PC}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AH}\times \underset{4y}{BC}}=\frac{1}{4}\to S_{APC}=\frac{1}{4}S_{ABC}$$

$$S_{AQN}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}S_{ABC}\right)\to S_{AQN}=\frac{1}{36}S_{ABC}$$

$$S_{MQPB}=S_{ABC}-\underbrace{S_{AMQ}}_{(S_{AMN}-S_{AQN})}-S_{APC}=S_{ABC}-S_{AMN}+S_{AQN}-S_{APC}$$

$$=S-\frac{1}{9}S+\frac{1}{36}S-\frac{1}{4}S=\frac{2}{3}S$$

۳- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه‌ی M که MC=۲۰ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه‌ی با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود. (تمرین ۸ صفحه ۷۳)



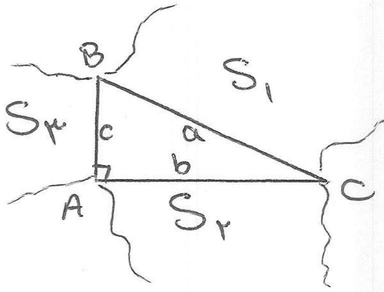
$$S_{ANMD}=S_{NBCM}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}(18+x)\times\cancel{15}=\cancel{\frac{1}{2}}\times(38-x+20)\times\cancel{15}\to 18+x=58-x$$

$$\to 2x=40\to x=20$$

هندسه ۱ (پایه دهم)   **کاربرگ شماره ۵**   **مدرس: سیدابوذر حسینی**

۴- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع های زاویه‌ی قائمه است. (تمرین ۹ صفحه ۷۳)



رابطه فیثاغورس: $a^2=b^2+c^2$

نسبت مساحت‌های دو چندضلعی متشابه برابر k^2 (مجذور نسبت تشابه) است:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{b^2}{a^2}$$

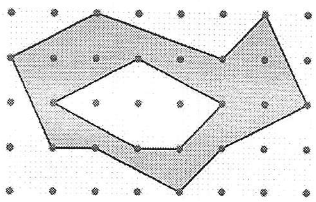
$$\frac{S_3}{S_1}=\frac{c^2}{a^2}$$

$$\xrightarrow{+}\ \frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\ \longrightarrow\ \frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{\overbrace{b^2+c^2}^{a^2}}{a^2}$$

$$\longrightarrow\ \frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

$$\longrightarrow\ S_2+S_3=S_1$$

۵- با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (تمرین ۱۰ صفحه‌ی ۷۳)



چندضلعی بزرگ‌تر: $S_1=\frac{b_1}{2}-1+i_1=\frac{9}{2}-1+13=\frac{33}{2}$

" کوچک‌تر: $S_2=\frac{b_2}{2}-1+i_2=\frac{5}{2}-1+3=\frac{9}{2}$

$$\longrightarrow\ S_{\text{هاشور}}=S_1-S_2=\frac{33}{2}-\frac{9}{2}=12$$