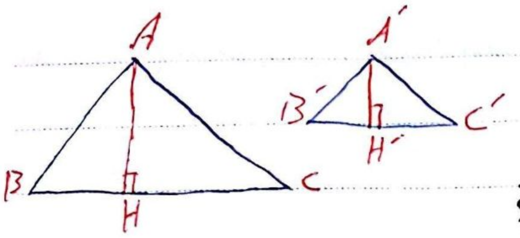
Subject :
Date



مساحت : $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K$ = حکم

(AH = ارتفاع)

اثبات : $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}BC \times AH}{\frac{1}{2}B'C' \times A'H'} = \underbrace{\frac{BC}{B'C'}}_{K} \times \underbrace{\frac{AH}{A'H'}}_{K} = K \times K = K^2$

اگر دو چند ضلعی متشابه باشند و نسبت تشابه آنها K باشد، نسبت محیط های آنها K و نسبت مساحت برابر K^2.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2$$

هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم متشابه هستند.

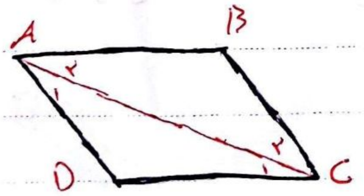
فصل ۳

چند ضلعی را مشخص کنید که تعداد قطرهای آن دو برابر تعداد اضلاع آن باشد.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \to n^2 - 3n = 4n \to n^2 - 3n - 4n = 0 \to n^2 - 7n = 0$$

$n = 0$ غق

$n(n-7) = 0 \to n = 7$ ✓



قضیه ۱) در هر متوازی الاضلاع زاویه های مقابل با هم برابرند: ۳

فرض ~ $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم ~ $A = C$ و $B = D$

$AC = AC$

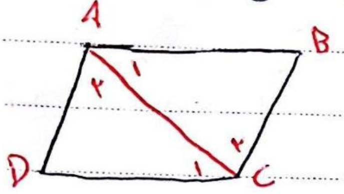
AC و مورب $AB \parallel DC \to A_2 = C_1$

AC و مورب $AB \parallel DC \to A_1 = C_2$

اثبات : قطر AC را رسم می کنیم : $ABC \cong ADC$ (ز ض ز) $\Rightarrow B = D$

$$A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \to A = C$$

عکس قضیه ۱) اگر در یک چهارضلعی زاویه های مقابل برابر باشند آنگاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟

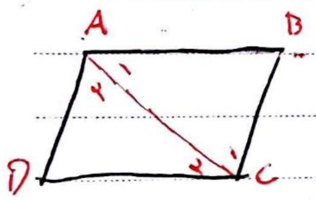


فرض: $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

ابتدا قطر AC را رسم می کنیم.

قضیه ۲) در هر متوازی الاضلاع ضلع های روبه رو مساوی اند.



فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $AB = DC$ و $AD = BC$

اثبات: قطر AC را رسم می کنیم.

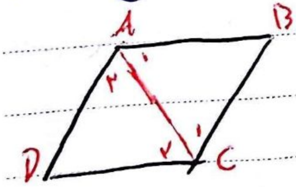
$AB \parallel DC$ و AC مورب $\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_2$

$AD \parallel BC$ و AC مورب $\rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_1$

$AC = AC$ مشترک

$\Rightarrow ABC \cong ADC$ (ز ض ز) $\Rightarrow AB = DC$ و $AD = BC$

عکس قضیه ۲) اگر در یک چهارضلعی ضلع های روبه رو برابر باشند آنگاه چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



فرض: $AB = DC$ و $BC = AD$

اثبات:

حکم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

$AB = DC$

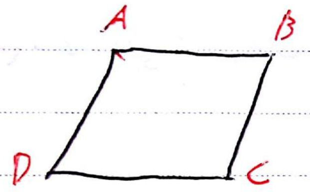
$AD = BC$

$AC = AC$

$\Rightarrow$ (ض ض ض) $\Rightarrow ABC \cong ADC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_2 \xrightarrow[\text{موازی}]{\text{عکس خطوط}} AB \parallel DC$

$\hat{A}_2 = \hat{C}_1 \xrightarrow[\text{خطوط}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$

Subject:
Date



قضیه ۲) در هر متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.

۲

فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $A+B=180$ ، $D+C=180$ ، $A+D=180$ ، $B+C=180$

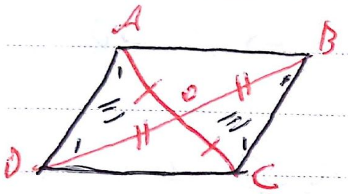
اثبات: کافیست یکی را اثبات کنیم:

$A+B+C+D=360$

$A=C$ و $B=D$ (قضیه ۱)

$$A+A+B+B=360$$

$$2A+2B=360 \xrightarrow{\div 2} A+B=180$$



قضیه ۴) در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگر اند.

فرض: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم: $BO = OD$ و $AO = OC$

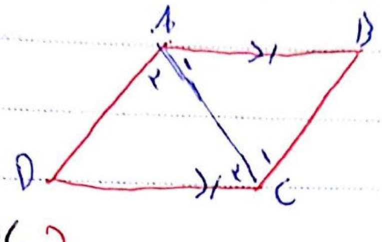
$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ و مورب } \overset{D}{A} \parallel \overset{B}{C} \Rightarrow A_1 = C_1 \\ BD \text{ و مورب } AD \parallel BC \Rightarrow D_1 = B_1 \\ \text{قضیه قبل می دانیم} \leftarrow AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow AOD \cong OBC \Rightarrow BO = OD, AO = OC$$

قضیه ۵) چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

فرض: $AB \underline{\underline{\parallel}} DC$

$(A_2 = C_1)$

حکم: $AD \parallel BC$



اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم:

فرض $AB = DC$

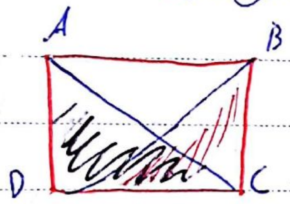
مشترک $AC = AC$

AC مورب $AB \parallel DC$ $A_1 = C_2$

$\Rightarrow ABC \cong ADC$ (ض ز ض) $\Rightarrow A_2 = C_1 \xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس}} AD \parallel BC$

در وقت حکم تساوی ضلع و تساوی زاویه بود از هم نهشتی کار و بیع.

ویژگی‌های مستطیل و لوزی: ویژگی ۱: در هر مستطیل قطرها باهم مساوی اند.



فرض: $A + B + C + D = 90$

حکم: $AC = BD$

$AD = BC$

$DC = DC$

$D = C = 90$

$\Rightarrow \hat{ACD} \cong \hat{BCD} \Rightarrow AC = BD$

سؤال: اگر دو قطر یک چهارضلعی باهم مساوی باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ چرا؟

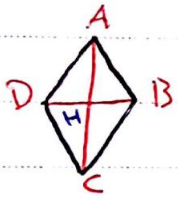
خیر. ذوزنقه متساوی‌الساقین دو قطر باهم مساوی اند ولی مستطیل نیست.

مربع نوعی مستطیل است پس قطرهای آن هم برابراند.

Subject:

Date

ویژگی 2) در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگر اند و قطرها نیمسازهای زاویه های لوزی اند.



فرض: $AB = BC = DC = AD$

حکم: $DH = HB$، $AH = HC$ (منصف) $H_1 = H_2 = 90$ (عمود) و $A_1 = A_2$ (نیمساز)

اثبات: لوزی یک متوازی الاضلاع است پس قطرهایش منصف یکدیگر اند. ①

فرض $AD = AB$

مشترک $AH = AH$

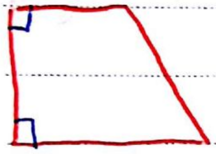
منصف $DH = HB$

$\left.\right\} ADH \cong AHB$ (ض ض ض) $\Rightarrow H_1 = H_2 = 90$ ③ ② $A_1 = A_2$

(۱ و ۲) پس قطرها عمود منصف اند. ۳) قطرها نیمسازند.

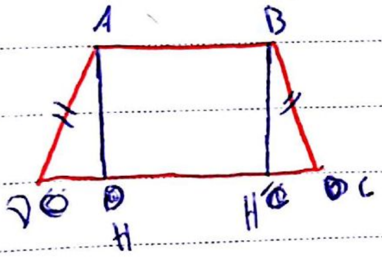
ذوزنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشد گوییم . به دو ضلع موازی قاعده‌ها و به دو ضلع غیرموازی ساق‌ها گفته می‌شود .

ذوزنقه متساوی الساقین: به ذوزنقه‌ای که ساق‌های آن با هم مساوی باشند ذوزنقه متساوی الساقین گوییم .



ذوزنقه قائم الزاویه: به ذوزنقه‌ای که یکی از ساق‌های آن بر دو قاعده عمود باشد .

ویژگی ۱) در هر ذوزنقه‌ی متساوی الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم اندازه‌اند .



فرض: $AC = BD$ و $AB \parallel DC$

حکم: $A = B$ یا $D = C$

اثبات: دو ارتفاع AH و BH' را رسم می‌کنیم .

$AD = BC$ (فرض)

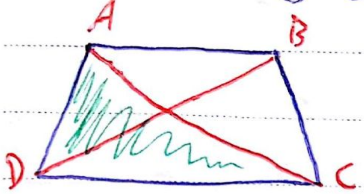
چهارضلعی $ABH'H$ مستطیل است . $AH = BH'$

$\Rightarrow ADH \cong BCH'$ (وتر ضلع) $\Rightarrow D = C$

هر وقت نیمسازهای یک متوازی الاضلاع را رسم کنیم یک مستطیل به دست می‌آید و

// // مستطیل // // مربع // // .

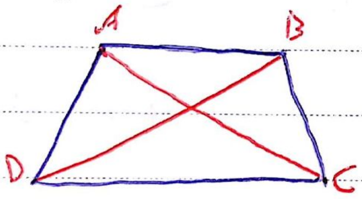
ویژگی ۲) در هر ذوزنقه متساوی الساقین اندازه قطرها باهم برابراند و برعکس.



فرض: $AD = BC$ حکم: $AC = BD$

اثبات رفت

$$\left.\begin{array}{ll} \text{فرض} & AD = BC \\ \text{مشترک} & DC = DC \\ \text{ویژگی 1} & D = C \end{array}\right\} \Rightarrow ADC \cong BCD \ (\text{ض ز ض}) \Rightarrow AC = BD$$



برگشت:

فرض: $AC = BD$

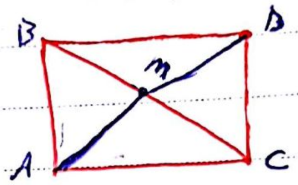
حکم: $AD = BC$

Subject:
Date

ویژگی مهم مثلث قائم الزاویه: در هر مثلث قائم الزاویه اندازه ی میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.

فرض: $A = 90^\circ$

حکم: $AM = \frac{BC}{2}$



اثبات: AM را به اندازه ی خودش از نقطه M امتداد می دهیم تا نقطه D حاصل شود و سپس D را به B و C وصل می کنیم. چون چهارضلعی $ABDC$ قطرهایش همدیگر را نصف کرده اند:

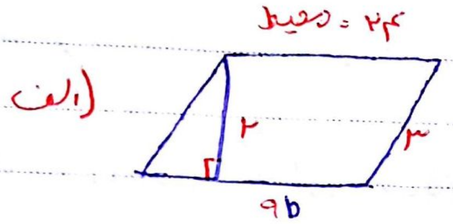
متوازی الاضلاع $ABDC \xrightarrow{A=90} $ مستطیل است $ABCD \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AD = 2AM \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2AM = BC \\ AM = \frac{BC}{2} \end{array}$$

توضیح این درس در بخش نمره

مثال ۳: مساحت شکل‌های زیر را حساب کنید.

الف)

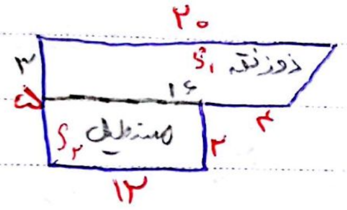


$P = 2(3) + 2b$

$24 = 6 + 2b \rightarrow$

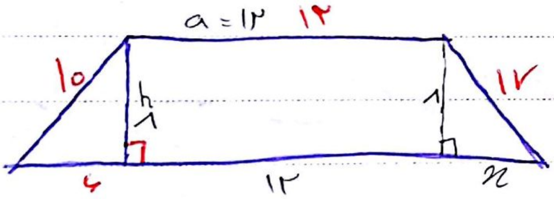
$\frac{18}{2} = 9$

$S = b \times h = 2 \times 9 = 18$



$S_1 = \frac{(20+16)3}{2} = 54$

$S = 2 \times 12 = 24 \rightarrow S = S_1 + S_2 = 54 + 24 = 78$

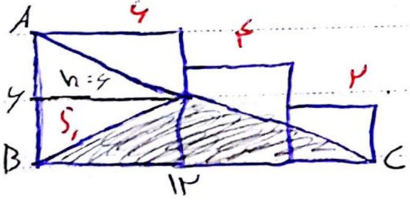


$10^2 = 6^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow h = 8$

$17^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 289 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 225$

$x = 15$ $\quad S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(12+33)8}{2} = 180$

مساحت قسمت هاشور خورده را حساب کنید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند)

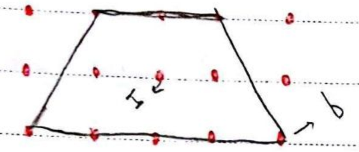


$S_{ABC} = \frac{12 \times 6}{2} = 36$

مساحت هاشور خورده $\rightarrow S_{ABC} - S_1 = 36 - 18$

$S_1 = \frac{6 \times 6}{2} = 18$ $\quad = 18$

نقاط شبکه‌ای: به نقاطی که روی خط‌های افقی و عمودی قرار دارند و فاصله‌ی هر دو نقطه متوالی یک واحد می‌باشد را نقاط شبکه‌ای گوییم.



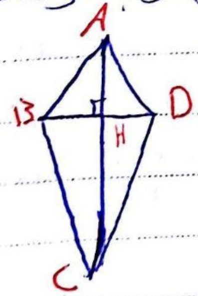
چندضلعی شبکه‌ای: به چندضلعی که تمام رأس‌های آن روی نقاط شبکه‌ای قرار داشته باشند. در هر چندضلعی شبکه‌ای به نقاطی از شبکه که روی اضلاع چندضلعی قرار دارد، نقاط مرزی گفته می‌شود و با b نام‌گذاری می‌شود و نقاطی از شبکه که درون چندضلعی قرار می‌گیرد نقاط درونی گفته می‌شود و با I نام‌گذاری می‌شود.

مثلاً در چهارضلعی شبکه‌ای ABCD داریم: $I = ۳$ $b = ۸$

فرمول پیک در محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای: اگر b نقاط مرزی یک چندضلعی باشند و I نقاط درونی آن باشد، مساحت چندضلعی از راه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} - 1 + I$$

نکته: در هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، مساحت برابر نصف حاصل‌ضرب قطرهاست.



فرض: $AC \perp BD$

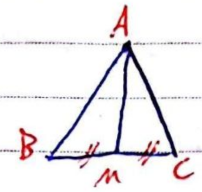
حکم: $S = \frac{AC \times BD}{2}$ (1)

$$S_{کل} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{BD \times AH}{2} + \frac{BD \times CH}{2} = \frac{BD}{2}(AH + CH) = (1)$$

کاربردها (مساحت):

سؤال (۱): نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

Subject :
Year. Month. Date. ( )



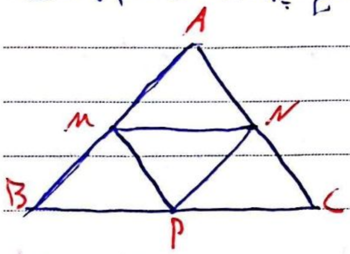
فرض: AM میانه $(BM = MC)$

حکم: $S_{ABM} = S_{ACM}$ ①

اثبات: $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{MC} \xrightarrow[BM=MC]{\text{فرض}} \frac{BM}{BM} = 1 \rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{1}{1}$ ⇐ ①

سوال ۵: نشان دهید اگر وسط های هر سه ضلع مثلث را به هم وصل کنیم ۴ چهار مثلث هم نهشت

و در نتیجه با مساحت های مساوی ایجاد می شود.



فرض: M, N, P وسط اضلاع

①

حکم: مثلث های ۴ چهارگانه $\hat{AMN} \cong \hat{MNP} \cong \hat{NPC} \cong \hat{MBP}$

②

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$ و به همین ترتیب می توان ثابت کرد ③

۳

$MN \parallel BC$, $NP \parallel AB$ ⇐ چهارضلعی MNBP متوازی الاضلاع است. $\rightarrow \hat{MNP} \cong \hat{MBP}$

و به همین ترتیب می توان ثابت کرد که چهار مثلث با هم هم نهشتند.

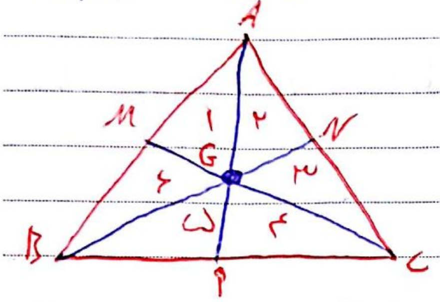
و داریم که اگر دو مثلث هم نهشت باشند مساحت های آنها برابر است

$S_{AMN} = S_{NPC} = S_{MNP} = S_{MBP}$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

سؤال ۳- نشان دهید سه میانه هر مثلث آن را به شش مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می کنند.



حکم: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$ ☆

اثبات:

$\overset{\triangle}{AGC}$ ۱: میانه $GN \Rightarrow S_2 = S_3$ (۲)

BGC: میانه $GP \Rightarrow S_5 = S_4$ (۳)

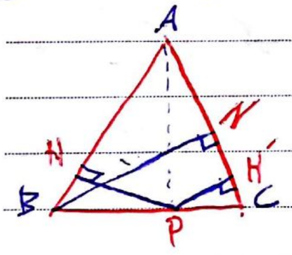
AGB ۲: میانه $GM \Rightarrow S_1 = S_6$ (۱)

$S_1 + S_6 + \cancel{S_5} = S_2 + S_3 + \cancel{S_4}$

$\cancel{2}S_1 = \cancel{2}S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$ (۴)

(۱)(۲)(۳)(۴) ⇒ ☆

سؤال ۴) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین مجموع فاصله ی هر نقطه روی قاعده از ساق های برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است.



فرض: $AB = AC$

حکم: $PH + PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می کنیم.

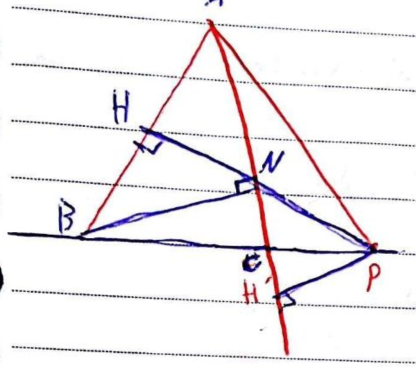
$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{AB} \times PH}{2} + \frac{AC \times PH'}{2} \xrightarrow{AB=AC\ \text{فرض}} \frac{\cancel{AC} \times BN}{\cancel{2}}$

$\frac{\cancel{AC}}{\cancel{2}}(PH + PH') \rightarrow PH + PH' = BN$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

سوال ۵) ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین قدر مطلق تفاضل فاصله‌ی هر نقطه روی امتدادهای هر قاعده از دو ساق برابر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق است.



فرض: $AB = AC$

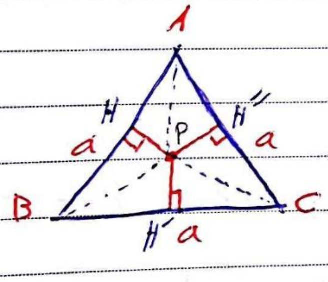
حکم: $PH - PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{ABP} - S_{ACP} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{\overset{AC}{AB} \times PH}{2} - \frac{AC \times PH'}{2}$$

$$AC = AB \rightarrow \frac{\cancel{AC} \times BN}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{AC}}{\cancel{2}}(PH - PH') \rightarrow PH - PH' = BN$$

سوال ۶) ثابت کنید مجموع فاصله‌ی هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.



فرض: $AB = AC = BC = a$

حکم: $PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

اثبات: از P به A و B و C وصل می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{APC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{a \times PH}{2} + \frac{a \times PH'}{2} + \frac{a \times PH''}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{a}{2}(PH + PH' + PH'') \rightarrow PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

مثال ۵: اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌ی نقطه M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲ و ۴ و ۶ باشند

اندازه‌ی ضلع مثلث و مساحت مثلث است.

$PH = ۲$ و $PH' = ۴$ و $PH'' = ۶$

$a = ?$ و $S = ?$

$$PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \rightarrow ۲ + ۴ + ۶ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \Rightarrow ۱۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a$$

$$\rightarrow \sqrt{۳} a = ۲۴ \Rightarrow a = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \rightarrow a = ۸\sqrt{۳}$$ ضلع مثلث

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ \rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} (۸\sqrt{۳})^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} (۶۴(۳)) = ۴۸\sqrt{۳}$$