مجموعه ها

از این بخش معمولا ۱ الی ۲ سوال در ترم اول مطرح می شود و لازم است نکات زیر را همه دانش آموزان بدانند.

مجموعه‌ی اعداد :

مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{1,2,3,.....\}$

مجموعه اعداد حسابی: $W=\{0,1,2,3,.....\}=\mathbb{N}\bigcup\{0\}$

مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}،n\neq 0\}\rightarrow\{...,-2,-1/2,\frac{-3}{5},0,1,\frac{5}{2},8/2,....\}$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=\{$ مجموعه اعدادی که گویا نباشند $\}\rightarrow\{...,-2-\sqrt{3},...,-\sqrt{5},...,\sqrt{2},...,\pi,....,3\sqrt{5}....\}$

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\{$ همه ی اعداد موجود در جهان $\}$

- چند مورد خیلی مهم در مورد مجموعه ها رو یادت باشه اول اینکه رابطه های $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R},\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ بین مجموعه ها برقرار است و دوم اینکه ضرب عدد گویا در عدد گنگ یا گنگ است یا صفر (سایر حالات رو هم در منزل تمرین کنید) و سوم اینکه مثال های زده شده را در مورد مجموعه ها خوب مطالعه کنید و روی محور نشان دهید!

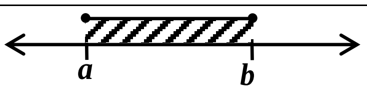
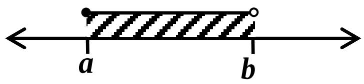
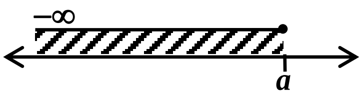
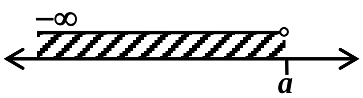
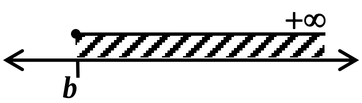
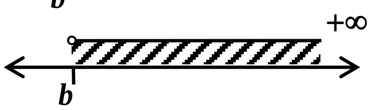
تمرین: درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.

الف) مجموع دو عدد گویا عددی گویاست. *(درست است)* **ب) مجموعه $W-\mathbb{N}$ تک عضوی است.** *(درست و فقط $\{0\}$ است)*

پ) مجموع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است. *(نادرست است زیرا اگر دو عدد گنگ و قرینه هم را با هم جمع کنید حاصل صفر می شود)*

ت) حاصل ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ همواره گنگ است. *(نادرست است اگر عدد صفر را در عدد گنگ ضرب کنیم حاصل صفر می شود)*

انواع بازه: زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی هستند و به ۳ نوع تقسیم بندی می شوند.

نام	نماد بازه	نماد مجموعه	نمایش روی محور
بازه‌ی باز	(a,b)	$\{x:a<x<b\}$	
بازه‌ی بسته	$[a,b]$	$\{x:a\le x\le b\}$	
بازه‌ی نیمه باز	$[a,b)$	$\{x:a\le x<b\}$	
	$(a,b]$	$\{x:a<x\le b\}$	
بازه ی نیمه باز	$(-\infty,a]$	$\{x:x\le a\}$	
بازه ی باز	$(-\infty,a)$	$\{x:x<a\}$	
بازه ی نیمه باز	$[b,+\infty)$	$\{x:x\ge b\}$	
بازه ی باز	$(b,+\infty)$	$\{x:x>b\}$	

نکته: برای نشان دادن وجود یک عدد در یک بازه و اجتماع و اشتراک و تفاضل بازه ها ، نمایش هندسی بازه ها را روی یک محور رسم می کنیم و به مساله پاسخ می دهیم.

روش تستی به دست آوردن اشتراک و اجتماع دو بازه : (در صورت وجود اشتراک)

اشتراک: (از سمت راست کوچکترین عدد و از سمت چپ بزرگترین عدد انتخاب می شود) باز و بسته بودن از عدد به ارث برده می شود.

اجتماع: (از سمت راست بزرگترین و از سمت چپ کوچکترین عدد انتخاب می شود) باز و بسته بودن از عدد به ارث برده می شود.

تمرین: نمایش هندسی دو بازه $B=(-۱,۳), A=\{x\in\mathbb{R} \mid -۴<x\leq ۲\}$ را روی یک محور رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را به صورت بازه بنویسید. *(ابتدا مجموعه A را به صورت بازه $[-4,2]$ نشان می دهم و بعد روی یک محور مجموعه ها را می کشیم و بعد جواب را حساب می کنیم)*

الف) $A\cap B=$ *اشتراک یعنی عضو هایی که در هر دو مجموعه موجود است* **(-۱،۲]**

ب) $A\cup B=$ *اجتماع یعنی عضو هایی که در حداقل یکی از دو مجموعه هستند* **(-۴،۳)**

پ) $A-B=$ *یعنی عضو هایی که فقط در مجموعه A است* **[-۴،-۱]**

نکته : اگر A یک مجموعه باشد آنگاه تعداد عضو های آن را با n(A) نشان می دهیم و اگر n(A) عددی حسابی باشد مجموعه A را متناهی و در غیر این صورت نامتناهی می نامیم. برای به دست آوردن اشتراک و اجتماع و سایر اعمال بر روی دو مجموعه که تعداد اعضای آنها قابل شمارش است بهترین روش استفاده از نمودار ون می باشد.

تمرین: متناهی و نامتناهی بودن موارد زیر را مشخص کنید

الف) مجموعه اعداد طبیعی زیر ۱۰۰۰ .*(متناهی است)*

ب) مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰ .*(نامتناهی است)*

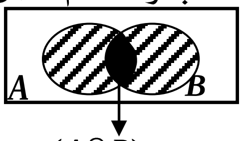
پ) مجموعه اعداد گویای بین بازه ی (۰،۱) . *(نامتناهی است)*

ت) مجموعه دایره های به مرکز مبدا مختصات.*(نامتناهی است)*

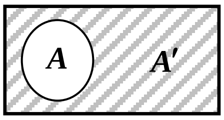
نکته: دو مجموعه متناهی A,B را در نظر بگیرید تعداد اعضای مجموعه $A\cup B$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

مرجع و متمم: مجموعه مرجع (عام،جهانی) مجموعه ای است که تمام مجموعه های مورد بحث ما زیر مجموعه ی آن هستند در واقع مجموع مرجع چارپوب بحث را نشان می دهد و معمولا آن را با نماد U نشان می دهیم. بعلاوه اگر A یک زیر مجموعه از U باشد مجموعه تمام اعضای خارج از A را با A' نشان داده و به آن ((متمم)) A گوییم.



$p(A\cap B)$



مثال: فرض کنید $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ به عنوان مجموع مرجع داده شده و $A=\{1,2,5\}$ یک زیر مجموعه از آن است آنگاه متمم مجموعه $A(A')$ برابر است با $A'=U-A=\{3,4,6\}$

تمرین: در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم والیبال هستند. اگر ۵ نفر عضو هر دو تیم باشند چند نفر حداقل در یک تیم حضور ندارند(در هیچ تیمی نیستند)؟

سوال $n(A\cup B)'$ را خواسته است چون گفته است حداقل یکی حضور ندارند پس اول $n(A\cup B)$ یعنی حداقل در یک تیم حضور دارند را می نویسیم.

$$n(U)=25, n(A)=15, n(B)=11, n(A\cap B)=5$$

$$\rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=15+11-5=21$$

$$\rightarrow n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=25-21=4$$

تمرین: اگر مجموعه مرجع به صورت U={۱،۲،۳،۴،...،۹} باشد و مجموعه A={۱،۲،۳،۴} و B={۴،۵،۶،۷} باشد حاصل $A',(A\cap B)'$ را بیابید.

$$A'=U-A=\{1,2,3,\dots,9\}-\{1,2,3,4\}=\{5,6,..,9\}$$

$$(A\cap B)=\{4\}\rightarrow (A\cap B)'=U-(A\cap B)=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$$

یک جدول بسیار مهم برای حفظ مجموعه ها و حل سریع تست ها:

با زیر مجموعه	با مجموعه متمم	با مجموعه تهی	با مجموعه مرجع
$(A \subseteq B)$ $\Leftrightarrow A \cup B = B$ $\Leftrightarrow A \cap B = A$ $\Leftrightarrow A - B = \varnothing, B - A = B$	$A \cup A' = U$ $A \cap A' = \varnothing$ $A - A' = A$ $A' - A = A'$	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A - \varnothing = A$ $\varnothing - A = \varnothing$	$A \cup U = U$ $A \cap U = A$ $A - U = \varnothing$ $U - A = A'$
$(A \cap B)' = A' \cup B', (AUB)' = A' \cap B', A - B = A \cap B', A - B = B' - A', (A')' = A$			

الگو و دنباله (ویژه منزل)

از این بخش معمولا ۲ الی ۳ سوال در ترم اول مطرح می شود و لازم است نکات زیر را همه دانش آموزان بدانند.

الگو: یکی از بخش های ریاضیات مدل سازی پدیده ها و پیدا کردن رابطه ای بین اعداد و شماره مکان آنها می باشد مثلا اگر در مکان اول عدد ٤ ، در مکان دوم ۷ ، در مکان سوم ۱۰ و .... داشته باشیم آنگاه رابطه $t_n = 3n+1$ عدد موجود در هر مکان را نشان می دهد . مثلا برای مکان دهم باید n=۱۰ باشد و $t_{10} = 3(10)+1 = 31$ می باشد.

نکته: در برخی الگو ها جملات الگو در یک عدد ثابت اختلاف دارند (جمله عمومی به صورت $t_n = an+b$ است) مانند $1,4,7,10,....,.... \Rightarrow t_n = 3n-2$ در این گونه موارد به آن ها ((الگوی خطی)) گفته می شود.الگوهایی که خطی نیستند نظیر $2,5,10,17,..... \Rightarrow t_n = n^2+1$ را ((الگوی غیرخطی)) می گویند.

دنباله: یک ((دنباله)) رشته ای از اعداد (معمولا منظم)است که به دنبال هم نوشته می شوند، به هر عدد در رشته یک ((جمله)) از دنباله گفته ، اولین جمله را با a_1 ، دومین جمله را با a_2 و ... نشان می دهیم.در این دنباله ها جمله n را a_n نشان می دهیم و به آن جمله عمومی می گوییم و برای پیدا کردن هر جمله کافی است به جای n شماره جمله را قرار دهیم.

تمرین: جمله عمومی دنباله های زیر مشخص شده است سه جمله بعدی آن را بنویسید.

$a_n = 2n-5 \rightarrow -3,-1,1,....$ (جواب : $a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 7$ بعدا می خونیم جملات عمومی با درجه ۱ دنباله حسابی هستند)

$a_n = n^2 \rightarrow 1^2, 2^2, 3^2, ...$ (جواب : $a_4 = 4^2, a_5 = 5^2, a_6 = 6^2$ این دنباله دنباله مربعی است و جمله عمومی را حفظ باشید)

$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow 1,3,6,.....$ (جواب : $a_4 = 10, a_5 = 15, a_6 = 21$ این دنباله دنباله مثلثی است و جمله عمومی را حفظ باشید)

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow 1,1,2,3,5,8....$ (جواب : $a_7 = a_6 + a_5 = 13, a_8 = 21, a_9 = 34$ دنباله بازگشتی فیبوناتچی)

دنباله حسابی: دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول a_1) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید (اختلاف هر ۲ جمله متوالی ثابت است)، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند و با d نشان می دهیم. جمله عمومی یک دنباله حسابی به فرم $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.

مثال دنباله زیر یک دنباله حسابی است که جمله اول آن ۱۰ می باشد و دارای قدر نسبت ۳ می باشد.

$$10,13,16,.......... \rightarrow (a_{20} = a_1 + 19d = 10 + 19(3) = 67, ...a_{25} = a_1 + 24d = 10 + 24(3) = 82)$$

۱: **واسطه حسابی:** اگر سه جمله a,b,c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند آنگاه $b = \frac{a+c}{2} \rightarrow 2b = a+c$

۲: اگر دو جمله a_n, a_m از یک دنباله حسابی را داشته باشیم آنگاه قدر نسبت از رابطه $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ به دست می آید.

۳: اگر بخواهیم بین دو عدد a,b تعداد m عدد قرار دهیم به طوری همه این اعداد با هم تشکیل دنباله حسابی دهند آنگاه قدر نسبت از رابطه $d = \frac{b-a}{m+1}$ به دست می آید.

تمرین: جمله بیستم دنباله حسابی $-3,2,7,....$ را بیابید. (می دانیم که جمله اول ۳- می باشد و قدر نسبت (اختلاف دو جمله) ۵ است)

$$a_1=-3, d=5 \to (a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_{20}=a_1+19d=-3+19(5)=92)$$

تمرین: مقدار x را در دنباله حسابی $2, x, 12$ بیابید. (طبق نکته واسطه حسابی مقدار x را به دست می آوریم.)

$$b=\frac{a+c}{2} \to x=\frac{2+12}{2}=7$$

تمرین: در یک دنباله حسابی جمله سوم ۱۰ ($a_3=10$) و جمله هفتم ۳۰ ($a_7=30$) می باشد . قدر نسبت و جملات دنباله را مشخص کنید. (طبق نکات و با کمک فرمول قدر نسبت را می یابیم و بعد جملات را پشت سر هم می نویسیم)

$$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{30-10}{7-3}=\frac{20}{4}=5 \xrightarrow{\text{جملات}} 10,14,18,22,26,30,....$$

تمرین: بین دو عدد ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان درج کنید که پنج عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند. (طبق نکات بین دو عدد سه واسطه حسابی درج می کنیم و بعد جملات را مشخص می کنیم)

$$d=\frac{b-a}{m+1}=\frac{62-18}{3+1}=\frac{44}{4}=11 \xrightarrow{\text{جملات}} 18,29,40,51,62$$

دنباله هندسی: دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول a_1) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید (حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی ثابت است)، دنباله هندسی نامیده می شود و این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می گویند و با r نشان می دهیم. جمله عمومی یک دنباله حسابی به فرم $a_n=a_1\times r^{n-1}$ است.

مثال دنباله زیر یک دنباله هندسی است که جمله اول آن ۳ می باشد و دارای قدر نسبت ۲ می باشد.

$$3,6,12,24,.... \to (a_7=a_1\times r^6=3\times 2^6=192,...,a_{10}=a_1\times r^9=3\times 2^9=1536)$$

۱: واسطه هندسی: اگر سه جمله a,b,c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند آنگاه $b^2=ac, b=\pm\sqrt{ac}$

۲: اگر دو جمله a_n, a_m از یک دنباله هندسی را داشته باشیم آنگاه قدر نسبت از رابطه $r^{n-m}=\frac{a_n}{a_m}$ به دست می آید.

۳: اگر بخواهیم بین دو عدد a,b تعداد m عدد قرار دهیم به طوری همه این اعداد با هم تشکیل دنباله هندسی دهند آنگاه قدر نسبت از رابطه $r^{m+1}=\frac{b}{a}$ به دست می آید.

٤: هر گاه مقدار قدر نسبت مثبت دنباله صعودی(افزایشی) و هر گاه منفی باشد غیر صعودی است.

۵: دنباله ثابت ،یک دنباله هندسی با قدر نسبت یک است.

تمرین: جمله ششم دنباله هندسی $2,6,18,....$ را بیابید. (می دانیم که جمله اول ۲ می باشد و قدر نسبت (تقسیم دو جمله متوالی) ۳ است)

$$a_1=2, r=3, \to (a_n=a_1\times r^5 \Rightarrow a_6=a_1\times r^5=2\times 3^5=486)$$

تمرین: مقدار x را در دنباله هندسی غیر صعودی $4, x, 100$ بیابید. (طبق نکته واسطه هندسی مقدار x را به دست می آوریم و چون غیر صعودی است پس مقدار منفی را قبول می کنیم.)

$$b=-\sqrt{ac} \to x=-\sqrt{4\times 100}=-20$$

تمرین: در یک دنباله هندسی افزایشی جمله سوم ۱۲ $(a_3=12)$ و جمله ششم ۹۶ $(a_6=96)$ است .قدر نسبت و دنباله را مشخص کنید. (طبق نکات و با کمک فرمول قدر نسبت را می یابیم و بعد جملات را پشت سر هم می نویسیم)

$$r^{n-m}=\frac{a_n}{a_m} \to r^{6-3}=\frac{a_6}{a_3}=\frac{96}{12}=8=2^3 \to r=2 \xrightarrow{\text{جملات}} 12,24,48,96,...$$

تمرین: بین دو عدد $\frac{1}{3}$ و 27 سه عدد چنان درج کنید که پنج عدد تشکیل دنباله هندسی غیر صعودی بدهند. (طبق نکات بین دو عدد سه واسطه هندسی درج می کنیم و بعد جملات را مشخص می کنیم و چون سوال گفته غیر صعودی باید قدر نسبت منفی باشد تا دنباله نوسانی شود)

$$r^{m+1}=\frac{b}{a} \to r^4=\frac{27}{\frac{1}{3}}=81 \to r=-3 \xrightarrow{\text{جملات}} \frac{1}{3},-1,3,-9,27,....$$

نمونه سوال فصل اول

۱- اگر $A=[۱\ ,\ +\infty)$ و $B=(-\infty\ ,\ ۲]$ و $C=(-۱\ ,\ ۳)$ آنگاه مجموعه ی $(A\bigcap B)-C$ رابه صورت بازه بنویسید.

۲- اگر مجموعه N ، مجموعه مرجع باشد، دو زیر مجموعه ی مجزا از اعداد طبیعی مشخص کنید که نامتناهی باشند.

۳- اگر $A=\{x\in\Re|\ x\geq ۲\}$ و $B=\{x\in\Re|\ x\leq ۵\ \}$ و $C=(-۲\ ,\ +\infty)$ آن گاه مجموعه ی $(A\bigcap B)\bigcup C$ را به صورت بازه بنویسید.

۴- در یک کلاس ۵۵نفری ۲۷نفر در رشته فوتبال و ۳۸نفر در رشته والیبال شرکت کرده اندو ۶ نفر در هیچ رشته ای شرکت نکرده اند.چند نفر فقط در یک رشته شرکت کرده اند.

۵- اگر $n(A)=10, n(B)=7, n(A\cap B)=3, n(U)=22$ باشد مطلوبست: $n(A'\cap B')=$

۶- جمله ی $(۲n+۱)$ ام یک دنباله به صورت $\dfrac{۴n^۲+۱}{۲n-۱}$ است .جمله ی سوم این دنباله رابنویسید.

۷- جمله یازدهم یک دنباله حسابی ۷۹ و جمله بیستم آن ۱۵۱ است، جمله اول و قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۸- اگر در یک دنباله حسابی جمله پنجم و دوازدهم به ترتیب برابر ۲۴و۵۲ باشند قدرنسبت دنباله را بیابید.

۹- چندمین جمله از دنباله حسابی ....و۲۱و۱۷و۱۳ برابر ۹۳ است.

۱۰- در یک دنباله هندسی جمله سوم ۱ و جمله هفتم۱۶ است . این دنباله را مشخص کنید.

۱۱-در یک دنباله هندسی جمله اول ۱۲ و جمله ششم ۳۴۸ است جمله چهارم دنباله را بنویسید.