ریاضی (۱)

سال اول دوره متوسطه دوم

فرهاد صمدی

۱۳۹۵

ریاضی ۱ دوره‌ی متوسطه‌ی دوم

فرهاد صمدی

تابستان ۹۵

فهرست مطالب

مقدمه

مجموعه حاضر تحت عنوان ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی برای دانش‌آموزان سال دهم (سال اول متوسطه دوم) نگاشته شده است. برای اولین بار از LATEX استفاده کرده‌ام و از نوع آرایش صفحه و نحوه فرمول نویسی درقیاس با سایر کتابها و حتی کتاب درسی متوجه برتری LATEX خواهید شد. در بسیاری از موارد از متن کتاب یا شکل‌های کتاب و حتی مثال های کتاب استفاده شده است چراکه هدف نوشتن کتابی بود که مطالب کتاب درسی را پوشش دهد و در عین حال شامل مطالب بیشتری برای پوشش سرفصل های کتاب درسی باشد. تعداد تمرینات بطور چشمگیری زیاد است(نسبت به کتاب درسی) و باید تاکید کنم که شرط تسلط نسبی بر ریاضی حل تمرین است. تمرین‌ها گاه یک محاسبه سرراست و تکراری از مثال های در متن هستند و گاهی هم کاملا متفاوت. وسواس زیادی برای انتخاب مثال ها و تمرین ها داشته‌ام تا بتوانم آنچه را که در ذهن به عنوان هدف آن درس دارم به تمام و کمال اجرا کنم.پس فراموش نکنید که تمرین ها ادامه درس هستند و باید تا آنجا که می توانید در جهت حل آنها اقدام کنید. چنانچه به مشکلی برخورد کردید می توانید با دوستان درکلاس درس مسئله را با هم‌فکری حل کنید و نهایتا اگر مسئله‌ای خیلی مشکل بود و با هم‌فکری هم حل نشد بنده همواره پاسخگوی شما هستم.(فکر کنم تعداد چنین مسائلی به تعداد انگشتان یک دست هم نرسد) . در پایان هر فصل سوالات آزمون سراسری را با کلید آن قرار داده‌ام تا در تست زدن نیز مهارت خود را افزایش دهید،اگرچه به باور بنده آموزش صحیح را باید بدون تست انجام داد. امیدوارم تدریس کتاب حاضر آنچنان که در ذهن پرورانده‌ام برای شما عزیزان مفید باشد.

فرهاد صمدی

تابستان ۹۵

فصل ۱

مجموعه ها و دنباله ها

۱.۱ مجموعه ها

۱.۱.۱ مجموعه های اعداد

در این بخش ابتدا مجموعه‌ی اعدادی را که تابحال شناخته‌اید و نحوه پیدایش آنها را بررسی کرده و سپس مجموعه‌ها را در حالت کلی بررسی میکنیم و عملیات‌هایی چون اجتماع , اشتراک و تفاضل را بر آنها تعریف خواهیم کرد. تاریخچه‌ی دقیقی از نحوه شکل‌گیری و تکامل اعداد در دسترس نیست . از آثار بجای مانده از گذشتگان تنها می‌توان حدس زد که چگونه از شمارش در کارهای روزمره‌ی خود استفاده می کرده‌اند. خطوط موازی کوچک بر استخوان ران یک گاو که در کنگو در قاره‌ی آفریقا یافت شده است متعلق به حدود ۸۰۰۰ سال پیش است. آنها برای شمارش به ازای هر واحد شمارش (مثلا شمارش فرزندان یا گوسفندان یا افراد قبیله و ....) یک خط بر استخوان یا چوب حک می کرده‌اند. گاهی نیز از سنگریزه برای شمارش استفاده کرده‌اند. شاید ابتدایی ترین راه شمارش استفاده از انگشتان دست باشد. در دسترس بودن انگشتان و خم کردن یک انگشت به ازای شمارش یک چیز کار ساده‌ایست و دلیل استفاده بشر از مبناهای ۵ و ۱۰ به همین علت است. حتی مبنای ۲۰ هم در میان قوم مایاها در آمریکای جنوبی رواج داشته و یادآور دورانی است که بشر پابرهنه بوده است. در این دستگاه هر مرد معادل عدد ۲۰ بوده است . (چرا؟) ابتدایی‌ترین مجموعه مورد استفاده بشر همانطور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی بوده است. مجموعه اعداد طبیعی بصورت زیر است:

$$\mathbb{N} = \{ ۱, ۲, ۳, \dots \}$$

لازم است خاصیتی جالب را در مورد مجموعه $\mathbb{N}$ معرفی کنیم. چنانچه دو عدد دلخواه از اعداد طبیعی را باهم جمع کنیم حاصل باز هم عدد طبیعی است بعنوان مثال : $\quad ۱ + ۳ = ۴ \in \mathbb{N}$ در حالت کلی اگر b, a دو عدد طبیعی باشند واضح است که $a + b$ نیز عددی طبیعی است. این خاصیت را اصطلاحا بسته بودن $\mathbb{N}$ نسبت به عمل $+$ می نامیم.

مثال ۱.۱. آیا مجموعه $\mathbb{N}$ نسبت به عمل ضرب بسته است؟ نسبت به عمل تفریق چطور؟ نسبت به عمل تقسیم چطور؟

تمرین ۱.۱. مجموعه $A = \{\, ۲^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این مجموعه نسبت به ضرب بسته است نسبت به جمع چطور؟ نسبت به تقسیم چطور؟

تمرین ۲.۱. مجموعه $B = \{-۱, ۰, ۱\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه نسبت به جمع بسته است؟ نسبت به ضرب چطور؟

تمرین ۳.۱. فرض کنید مجموعه ای چون A داریم بطوریکه می دانیم این مجموعه نسبت به اعمال جمع و تفریق بسته است و شامل عدد یک نیز هست. ثابت کنید که این مجموعه A همان مجموعه اعداد صحیح است.

حال با توجه به تعریف بسته بودن می توان متوجه ضعف مجموعه اعداد طبیعی شد. $\mathbb{N}$ نسبت به تفریق بسته نیست. این بزرگترین ضعف $\mathbb{N}$ است. زمانی که بشر برای معاملات خود متوجه شد که مقروض بودن را نمی توان با اعداد طبیعی نمایش داد خلاء اعداد صحیح را حس کرد و مجبور شد اعداد صحیح را بکار بگیرد.

تعریف ۱.۱. مجموعه اعداد صحیح را که با نماد $\mathbb{Z}$ نشان می دهیم عبارتست از :

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\}$$

اینکه اعداد صحیح را با حرف $\mathbb{Z}$ نمایش می دهند به خاطر کلمه $Zahlen$ می باشد که لغتی آلمانی است. اعداد صحیح نیز به نوبه ی خود دارای ضعف بسته نبودن نسبت به عمل تقسیم بود به عنوان مثال دقت کنید که :

$$\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵ \notin \mathbb{Z}$$

برای برطرف کردن این ضعف $\mathbb{Z}$ مجموعه ای مورد نیاز بود که شامل تمام کسرهای ممکن که می توان به کمک اعداد صحیح ساخت باشد. این مجموعه را اعداد گویا می نامیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۱. مجموعه اعداد گویا را که با نماد $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم (Q حرف اول کلمه $Quotient$ به معنای خارج قسط) بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\right\}$$

مجموعه اعداد گویا کوچکترین مجموعه ای است که نسبت به هر چهار عمل اصلی $+, -, \times, \div$ بسته است. با این حال همین مجموعه هم بی نقص نیست. در واقع پیروان مکتب فیثاغورس که به فیثاغورثیان معروف بودند اولین بار به این حقیقت نگران کننده پی بردند که قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی توان بصورت کسر نوشت. فیثاغورثیان که ایمان کامل به اعداد گویا داشتند و آنرا بی عیب و نقص می پنداشتند از این کشف نگران شدند و تا سالها آن را پنهان نگاه داشته بودند و حتی داستانی نقل کرده اند که دو تن از پیروان این مکتب در یک کشتی عازم سفر بودند و یکی از آنها دیگری را از این راز مهم آگاه کرد و گفت پس از سفر آن را با دیگران در میان خواهم گذاشت. همین امر باعث شد تا دوستش او را به دریا پرتاب کند.

اکنون می دانیم که قطر مربعی به ضلع یک عددی غیر گویا یا اصم است . این عدد عددی نیست جز $\sqrt{۲}$. می توان ثابت کرد که $\sqrt{۲}$ را نمی توان بصورت یک کسر نوشت بعبارت بهتر به ازای هر دو عدد صحیح دلخواه b, a همواره داریم : $\sqrt{۲} \neq \frac{a}{b}$

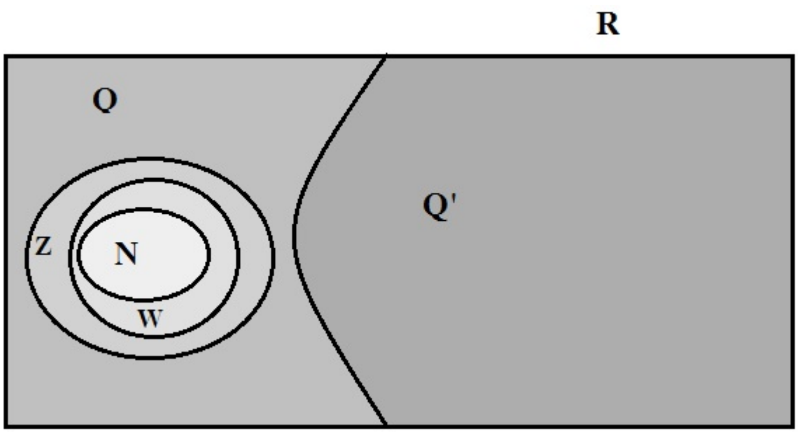
تمرین ۴.۱. اگرچه هنوز ابزار لازم برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را در اختیار ندارید اما تلاش برای اثبات آن خالی از لطف نیست. برای اینکه ثابت کنید $\sqrt{۲}$ گنگ است ثابت کنید $\sqrt{۲}$ گویا نیست. بدین منظور تصور کنید که اگر $\sqrt{۲}$ بخواهد گویا باشد پس باید داشته باشیم: $\sqrt{۲} = \frac{a}{b}$ و فرض کنید که کسر حاصل تحویل ناپذیر است (کسری که صورت و مخرج آن دیگر ساده نشود). با به توان ۲ رساندن طرفین و استفاده از خاصیت زوج بودن به عبارتی برسید که با فرض سازگار نیست. (این روش اثبات غیرمستقیم یا همان برهان خلف نام دارد).

مجموعه اعداد گنگ را با نماد $\mathbb{Q}'$ نشان می دهیم. یکی دیگر از اعداد گنگی ،که قدمت زیادی دارد عدد π است. نسبت محیط دایره به قطر آن عدد π است. داستان پیدایش عدد پی با مسأله تربیع دایره در ارتباط تنگاتنگ است. برای آشنایی با تربیع دایره می توانید همین «تربیع دایره » را در گوگل جستجو کنید. محاسبه مقدار تقریبی عدد پی نیز داستان جالبی دارد. چنانچه علاقمند هستید می توانید به کتاب تاریخ ریاضیات نوشته هاوارد ایوز صفحه ۱۱۵ مراجعه کنید.(نسخه pdf این کتاب دو جلدی در سایت کتابناک موجود و رایگان است). در اینجا بد نیست به تقریبی از عدد پی اشاره کنیم که توسط غیاث الدین جمشید کاشانی منجم و ریاضی دان دربار الغ بیگ بدست آمده است. وی توانست عدد پی را تا شانزده رقم اعشار بدرستی تقریب کند. این رکورد تا حدود دویست سال پابرجا بود تا سرانجام در سال ۱۶۱۰ میلادی توسط لودولف وان کولن ریاضی دان اهل آلمان شکسته شد. وی عدد پی را تا ۳۵ رقم تقریب کرد. الغ بیگ گورکانی نوه تیمور گورکانی و پسر شاهرخ گورکانی بود. وی بر خلاف پدربزرگش که یک خونریز تمام عیار بود ، به هنر و دانش اهتمام ویژه ای داشت. وی حتی در نجوم تبحر داشت و کمی هم اطلاعات ریاضی نزد جمشید کاشانی فرا گرفت.
تاکنون با مجموعه های $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{Q}'$ آشنا شده اید. رابطه بین سه مجموعه اول بصورت زیر است.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

در این رابطه مجموعه $\mathbb{Q}'$ چه جایگاهی دارد؟ حال می توان مجموعه اعداد حقیقی را هم تعریف کرد.

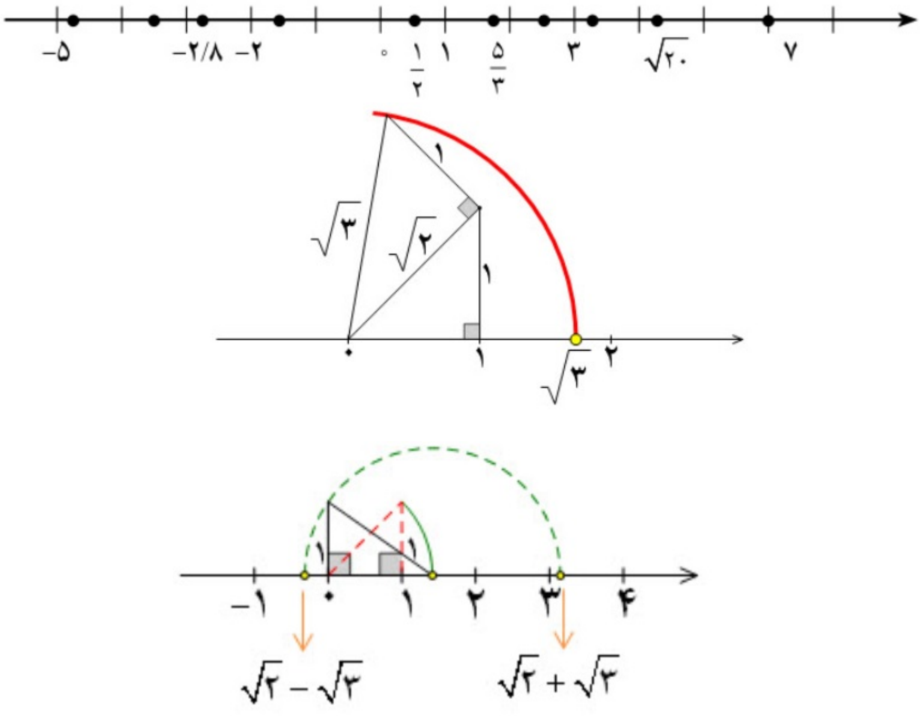
تعریف ۳.۱. مجموعه اعداد حقیقی را که با نماد $\mathbb{R}$ نشان می دهیم برابر است با : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \bigcup \mathbb{Q}'$. (علامت $\bigcup$ به معنای اجتماع است که در کلاس نهم تا حدودی با آن آشنا شده اید).



شکل ۱.۱: رابطه ی بین مجموعه اعداد

مجله ریاضی: مجموعه اعداد حقیقی نیز به شکلی دیگر (نه بسته بودن نسبت به اعمال اصلی) دارای نقصان است. معادلات درجه دوم را هنوز نخوانده اید با اینحال معادلات درجه دومی وجود دارند که جوابهای آن معادله دیگر عددی حقیقی نیست. مثل معادله $x^۲ + ۱ = ۰$ که جواب آن عدد عجیبی است. در واقع جواب این معادله عددی است بنام i با این ویژگی عجیب که $i^۲ = -۱$. بله این اعداد عجیب اعداد مختلط نام دارند و با نماد $\mathbb{C}$ نشان داده می شوند. برای مطالعه بیشتر ویکی پدیای فارسی را ملاحضه کنید.

متناظر به هر عدد حقیقی نقطه ای روی محور اعداد حقیقی وجود دارد. در اشکال زیر موقعیت برخی از اعداد روی محور نشان داده شده است.



شکل ۲.۱: نمایش اعداد گویا و گنگ روی محور اعداد

اگر به شکل ۲.۱بدقت نگاه کنید متوجه خواهید شد که این شکل راه حل بسیار زیبایی را به شما معرفی

کرده است و ارزش آن بیش از یک شکل ساده است. سرانجام آخرین مجموعه از اعداد را که بزرگتر از $\mathbb{N}$ و کوچکتر از $\mathbb{Z}$ است را معرفی می کنیم. مجموعه اعداد حسابی که با نماد $\mathbb{W}$ نشان می دهیم عبارتست از $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}$.

تمرین ۵.۱. جاهای خالی را با مجموعه مناسب کامل کنید.

$a)\, \mathbb{R}-\mathbb{Q}=$ $b)\, \mathbb{Z}-\mathbb{W}=$

$c)\, \mathbb{N}-\mathbb{W}=$ $d)\, \mathbb{Q}'-\mathbb{Q}=$

۲.۱.۱ بازه های اعداد حقیقی

برای ورود به مطلب و آشنایی با بازه ها دو نامعادله زیر را در نظر بگیرید:

$$-۱\leq \frac{۲x+۱}{۳}<۳ \qquad (۱) \qquad , \qquad ۳x+۱<۷ \qquad (۲)$$

با حل این دو نامعادله مجموعه جواب معادله شماره ۱ عبارتست از $\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\leq x<۴\}$ و مجموعه جواب معادله شماره ۲ عبارتست از $\{x\in\mathbb{R}\mid x<۲\}$. آیا می توان مجموعه جواب را با نمادی ساده تر از مجموعه های فوق نوشت؟ جواب مثبت است. بازه ها جوابگوی ما برای این ساده نویسی هستند. مجموعه جواب نامعادله ۱ بازه ی $[-۲,۴)$ است و مجموعه جواب نامعادله شماره ۲ بازه ی بی کران $(-\infty,۲)$ است. حال به سراغ تعریف بازه ها می رویم.

تعریف ۴.۱. یک بازه ، زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است که بصورت های زیر تعریف می شود:

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$ بازه ی باز

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x<b\}$ بازه ی نیم باز

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\leq b\}$ بازه ی بسته

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$ بازه ی باز بی کران

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$ بازه ی نیم باز بی کران

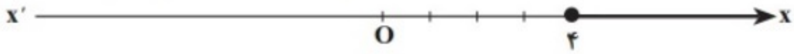
$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$ بازه ی باز بی کران

$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$ بازه ی نیم باز بی کران

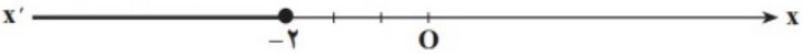
اغلب بجای اصطلاح نیم باز از اصطلاح نیم بسته هم استفاده میشود. نماد ∞ که بی نهایت خوانده می شود (مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت) یک عدد حقیقی نیست فقط نمادی است برای اینکه نشان دهیم بازه بی کران است . یعنی هر عددی خواه بسیار بزرگ یا خواه بسیار کوچک در این بازه ها می تواند وجود داشته باشد.

در اشکال زیر چند بازه را بعنوان مثال روی محور اعداد حقیقی نمایش داده ایم.

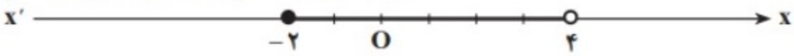
$$[۴, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq ۴\}$$



$$(-\infty, -۲] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -۲\}$$



$$[-۲, ۴) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ \leq x < ۴\}$$



مثال ۲.۱. درست و نادرست را بررسی کنید و جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(a) : $۳ \in [-۱, \sqrt{۱۰})$

(b) : $\frac{۱}{\sqrt{۲}} \in (۰, ۱]$

(c) : $\{۰, ۱\} \subseteq [۰, ۱]$

(d) : $-۱۳۹۵ \in (-\infty, -۱۳۹۶)$

(e) : $\frac{۱}{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}} \in [۳, ۴]$

(f) : $\varnothing \subseteq (-\pi, \pi)$

(g) : $(-\infty, ۳) \cap (-۲, ۰) \cap (-۱, +\infty) =$

(h) : $\bigcup_{n=۱}^{\infty} (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n}) =$

(m) : $\bigcap_{n=۱}^{\infty} (۱ - \frac{۱}{n}, ۱ + \frac{۱}{n}) =$

(n) : $\bigcup_{n=۱}^{\infty} (-n, n) =$

تمرین ۶.۱. درست و نادرست را مشخص کنید و جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

$(a) : [۰,۱) \subset \mathbb{Q}$ $\quad (b) : [-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}] \subset \mathbb{Q}'$ $\quad (c) : \sqrt{n^۲ + ۱} \in \mathbb{Q}'$

$(e) : \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ $\quad (f) : \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{W}$ $\quad (g) : \frac{۱-\pi}{۲} \in (-۱, +\infty)$

$(h) : \sqrt{-۱} \in \mathbb{R}$ $\quad (m) : \sqrt[۳]{-۲۷} \in \mathbb{Q}$ $\quad (n) : (-\infty, \sqrt{۳}) \cap (۰, \frac{\pi}{۲}) =$

$(d) : \sqrt{۸۴۱} \in \mathbb{Q}$

۳.۱.۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

در این بخش می خواهیم در مورد تعداد اعضای یک مجموعه صحبت کنیم.

تعریف ۵.۱. مجموعه ای چون A را یک مجموعه متناهی (باپایان) گوییم هرگاه تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد حسابی نمایش داد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را با نماد $|A|$ نمایش دهیم متناهی بودن یک مجموعه چون A به معنای آن است که به ازای یک عدد حسابی مثل k داریم $|A| = k$. در غیر اینصورت مجموعه را نامتناهی (بی پایان) گوییم.

مثال ۳.۱. مجموعه های زیر را بررسی کنید و متناهی یا نامتناهی بودن آنها را معین کنید.

۱ – مجموعه دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی درکشور.

۲ – تعداد اعداد ۳ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰

۳ – تعداد اعداد اول .

۴ – مجموعه اعداد طبیعی فرد .

۵– مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان بالغ.

۶ – مجموعه دایره هایی که مرکزشان مبدا مختصات است.

۷ – مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی.

۸ – مجموعه درختان جنگل آمازون.

۹ – مجموعه کسر هایی که مثبت هستند و صورتشان ۱ است.

۱۰ – بازه $(۰,۲)$.

۱۱ – مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب.

فعالیت

الف) بین ۰ و ۱ دو عدد گویای دلخواه بنویسید.

ب) دربازه (۱و۰) چهار عدد گویای دیگر بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

پ) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه (۱ و ۰) چه نتیجه‌ای می گیرید؟

ث) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می توان گفت؟

ج) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه .... خواهد بود.

نتیجه فعالیت بالا بیان می کند که اگر مجموعه ای چون A دارای زیرمجموعه ای چون B باشد ($B \subseteq A$) به طوری که B نامتناهی باشد آنگاه بناچار خود A نیز نامتناهی است. در نتیجه چون اعداد گویای واقع در بازه ی $(\circ, ۱)$ نامتناهی هستند پس $\mathbb{Q}$ هم نامتناهی است و به همین ترتیب $\mathbb{R}$ هم نامتناهی است . ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$)

پرسش: با توجه به شرایط بالا اگر A متناهی باشد در مورد B چه می توان گفت؟

یادداشت تاریخی: اعداد اول یکی از قدیمی ترین مباحث در ریاضیات می باشد. در دوره معاصر نیز یکی از جذابترین شاخه های رشته ریاضیات نظریه اعداد است که به بررسی اعداد صحیح و خواص آن می پردازد. حدود ۳۵۰ سال قبل از میلاد مسیح اقلیدس ثابت کرد که بی نهایت عدد اول وجود دارد. بعبارت بهتر ثابت کرد مجموعه اعداد اول نامتناهی است. جالب است بدانید که این اثبات به روش برهان خلف انجام می شود و هنوز در طی سالیان سال نتوانسته اند اثباتی ساده تر از اثبات اقلیدس بیایند.

تمرین ۷.۱. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را بررسی کنید.

۱ – مجموعه کلمات بکار رفته در کتاب ریاضی دهم.

۲ – مجموعه مضارب مثبت عدد ۵ .

۳ – مجموعه پلنگ های زنده در قاره آفریقا.

۴ – مجموعه تمام زیر مجموعه های $\mathbb{N}$.

۵ – مجموعه تمام اعدادی که در تقسیم بر ۵ باقیمانده ۱ دارند.

۶ – مجموعه باقی مانده ها در تقسیم اعداد طبیعی بر عدد ۷ .

۷ – مجموعه تمام موبایل های تولید شده در ۲۰ سال گذشته.

بیشتر بدانیم: همانطور که از کلاس نهم می دانید چنانچه دو مجموعه دارای تعداد اعضای برابر باشند آن دو مجموعه لزوما برابر نیستند. مثلا دو مجموعه

$$A = \{۱, ۲, ۳\} \qquad B = \{a, b, c\}$$

هر دو دارای سه عضو می باشند اما برابر نیستند. اما برابر بودن تعداد اعضا باعث می شود اصطلاح دیگری در مورد این دو مجموعه بکار رود. اگر بتوان بین اعضای دو مجموعه یک تناظر یک به یک برقرار کرد در این صورت گویند دو مجموعه هم ارز یا هم عدد هستند. منظور از تناظر یک به یک این‌است که به هر عضو مجموعه A یک و فقط یک عضو از مجموعه B نظیر کرد و بعکس. در مورد مثال بالا تناظر بدین صورت است که :

$$۱ \longleftrightarrow a \qquad ۲ \longleftrightarrow b \qquad ۳ \longleftrightarrow c$$

توجه داشته باشید که این تناظر باید اصطلاحا یک به یک باشد. مثل تناظر بین انسان ها و اثر انگشتشان. هر انسانی یک اثر انگشت دارد و هر اثر انگشتی فقط متعلق به یک انسان است. حال موضوع زمانی جالب تر می شود که بدانید $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ هم هم ارز یا هم عدد هستند. برای ایجاد تناظر به این صورت عمل می کنیم که اگر n عددی طبیعی باشد دو حالت رخ می دهد یا زوج است یا فرد. اگر زوج بود آن را به $\frac{n}{۲}$ نظیر می کنیم و اگر فرد بود آنرا به $\frac{۱-n}{۲}$ نظیر می‌کنیم. می توان ثابت کرد که این تناظر یک به یک است. چند مورد ابتدای این تناظر را در زیر می بینید.

$$\begin{aligned}
۱ &\longleftrightarrow \frac{۱-۱}{۲} = ۰ \\
۲ &\longleftrightarrow \frac{۲}{۲} = ۱ \\
۳ &\longleftrightarrow \frac{۱-۳}{۲} = -۱ \\
۴ &\longleftrightarrow \frac{۴}{۲} = ۲ \\
۵ &\longleftrightarrow \frac{۱-۵}{۲} = -۲
\end{aligned}$$

در فصول بعدی که مفهوم تابع را درس خواهیم داد راحت تر می توان ضابطه تناظر را بیان کرد.

۲.۱ متمم یک مجموعه

۱.۲.۱ مجموعه مرجع

جهت روشن شدن لزوم در نظرگرفتن یک مجموعه بعنوان مجموعه مرجع مجموعه $A = \{x | -۲ \leq x \leq ۳\}$ را در نظر بگیرید. اگر از شما بخواهند که اعضای مجموعه را بنویسید چه اعدادی را خواهید نوشت؟ جوابهای احتمالی شما بصورت زیر است:

(۱) اگر در ذهن خود اعداد طبیعی را در نظرگرفته باشید $\longleftarrow A = \{۱, ۲, ۳\}$

(۲) اگر در ذهن خود اعداد حسابی را در نظرگرفته باشید $\longleftarrow A = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$

(۳) اگر در ذهن خود اعداد صحیح را در نظرگرفته باشید $\longleftarrow A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

(۴) اگر در ذهن خود اعداد حقیقی را در نظرگرفته باشید $\longleftarrow A = [-۲, ۳]$

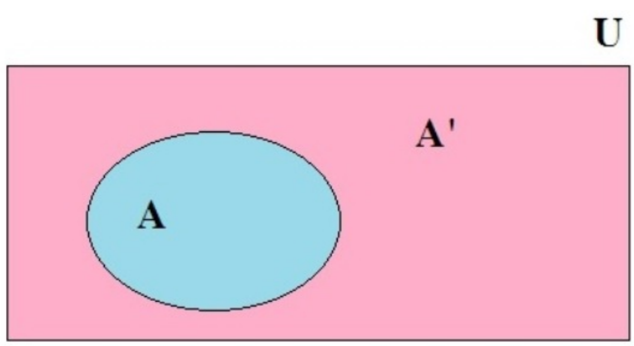
پس همانطور که مشاهده می‌کنید برای مجموعه می توان حالت های مختلف را در نظرگرفت و جواب یکتایی بدست نمی آید و این ابهام در تعریف مجموعه A چندان خوشایند نیست. چنانچه مجموعه را بصورت :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۲ \leq x \leq ۳\}$$

تعریف کنیم دیگر تکلیف روشن است و می دانیم جواب چیست. در اینجا نبود یک مجموعه مرجع باعث بروز چنین مشکلی شد. اما با در نظرگرفتن مجموعه های $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}, \mathbb{N}$ بترتیب مجموعه های ۴،۳،۲،۱بدست می آیند. پس با تغییر مجموعه بعد از علامت $\in$ اعضای مجموعه نیز تغییر می‌کنند. چنین مجموعه هایی را مجموعه مرجع گویند.

تعریف ۶.۱. در هر مبحث مجموعه ای که همه مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می نامند و با حرف U نشان می دهند. در این حالت اگر $A \subseteq U$ مجموعه ای دلخواه باشد، $U - A$ را با نماد A' نشان می دهیم و آن را متمم A می نامیم. به عبارت بهتر A' شامل اعضایی از U است که در A نیستند.

در شکل زیر رابطه بین مجموعه های A, A', U دیده می شود.



بطور معمول در هر بحثی مجموعه مرجع را معرفی می کنند. چنانچه در بحثی مجموعه مرجع را معرفی نکردیم شما می توانید بزرگترین مجموعه موجود را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید. وقتی صحبت از اعداد باشد بزرگترین مجموعه ممکن همان $\mathbb{R}$ است. در حالت کلی برای نوشتن یک مجموعه به صورت استاندارد می نویسیم $A = \{x \in U \mid$ دارای خاصیت p(x) است x$\}$ در این جا U مجموعه مرجع است و $p(x)$ خاصیتی است که x دارای آن است.

یادداشت تاریخی: آیا مجموعه مرجع به معنای مطلق وجود دارد؟ یعنی مجموعه ای چون U به طوری که شامل هر مجموعه ای که شما تصورکنید باشد. تا ابتدای قرن بیستم وجود چنین مجموعه ای فرضی مسلم بود. برتراند راسل ریاضی دان و فیلسوف نامدار انگلیسی در ابتدای قرن بیستم ثابت کرد چنین مجموعه ای وجود ندارد. پارادوکس راسل در همین ارتباط است و برای مطالعه بیشتر می توانید در گوگل عبارت پارادوکس راسل را جستجو کنید.

مثال ۴.۱. متمم هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید.

$A = \{۱, ۳, ۵, \cdots\}$ $\qquad U = \mathbb{N}$

$B = \mathbb{N}$ $\qquad U = \mathbb{Z}$

$C = \mathbb{N}$ $\qquad U = \mathbb{W}$

$D = \mathbb{Q}$ $\qquad U = \mathbb{R}$

$E = [-\infty, -۲)$ $\qquad U = \mathbb{R}$

$F = [-\infty, -۲)$ $\qquad U = (-\infty, ۰)$

$G = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳} \cdots \frac{۱}{n} \cdots\}$ $\qquad U = [۰, ۱]$

$H = \mathbb{Z}$ $\qquad U = \mathbb{R}$

مثال ۵.۱. اگر Uمجموعه مرجع دلخواهی باشد و $A \subseteq U$ باشند طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید.

$a) A \cup A' =$ $\qquad b) A \cap A' =$ $\qquad c) \emptyset' =$ $\qquad d) U' =$

مثال ۶.۱. فرض کنید $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q\}$ و $A = \{a, e, g, h, m, n, l\}$ و $B = \{a, b, c, d, f, g, l\}$ باشند. جدول زیر را کامل کنید.

$(A')'$	$\{\quad\quad\quad\}$
$A' \cap B'$	$\{\quad\quad\quad\}$
$A' \cup B'$	$\{\quad\quad\quad\}$
$(A \cap B)'$	$\{\quad\quad\quad\}$
$(A \cup B)'$	$\{\quad\quad\quad\}$
$A \cap B'$	$\{\quad\quad\quad\}$
$A - B$	$\{\quad\quad\quad\}$

۲.۲.۱ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

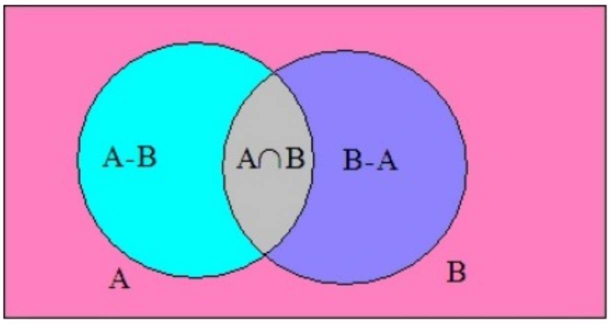
فرض کنید تعداد اعضای مجموعه های A, B معلوم باشد . می خواهیم تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را بر حسب $n(A)$ و $n(B)$ بیابیم. (تعداد اعضای یک مجموعه را هم با نماد $|A|$ و هم با نماد $n(A)$ نشان می دهند) ممکن است تصور کنید که جواب واضح است و برابر است با عدد $n(A) + n(B)$ اما این نادرست است. چرا که اگر $U = \mathbb{N}, A = \{۱, ۲, ۳\}, B = \{۲, ۳, ۴\}$ آنگاه :

$$۴ = n(A \cup B) \neq n(A) + n(B) = ۳ + ۳ = ۶$$

دلیل آن ها ساده است. هنگامی که می نویسیم $n(A) + n(B)$ در واقع اعضای مشترک دوبار شمارش شده اند. یعنی $n(A \cap B)$ یکبار در هنگام شمارش اعضای A و یک بار در شمارش اعضای B حساب شده است . لذا برای یافتن تعداد درست باید یکبار $n(A \cap B)$ را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم. پس جواب درست بصورت زیر است.

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

به شکل زیر دقت کنید. می توان درستی رابطه فوق را از روی نمودار ون زیر تحقیق کرد.



تذکر مهم: از روی شکل فوق روابط جالب دیگری بین اعضای مجموعه های $A - B$ و $A \cap B$ بدست می آید. این روابط بصورت زیر هستند که خودتان براحتی می توانید صحت آنها را تحقیق کنید.

$n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A) = n(A \cup B)$
$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$

درس را با ذکر چند مثال پی میگیریم.

مثال ۷.۱. در یک کلاس مدرسه ۳۰ دانش آموز وجود دارد. ۲۲ نفر از آنها فوتبال بازی می کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می کنند. چند نفر هم فوتبال بازی می کنند و هم والیبال؟

مثال ۸.۱. در یک جمع ۴۰ نفره ۲۰ نفر به چای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه. چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به چای علاقه ندارند.

مثال ۹.۱. از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد؟ چند عدد بر ۵ بخش پذیر است اما بر ۷ بخش پذیر نیست؟ چند عدد نه بر ۵ بخش پذیر است نه بر ۷؟

تمرین ۸.۱. در یک کلاس ۳۰ نفري، ۲۱ نفر به زبان انگلیسي، ۱۷ نفر به زبان فرانسه و ۱۰ نفر به هر دو زبان مي توانند صحبت کنند. در این کلاس چند نفر هستند که به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمي کنند؟

تمرین ۹.۱. در یک مدرسه، ۲۳ نفر در تیم فوتبال و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضو هستند. ۴ نفر نیز در هر دو تیم عضو هستند. چند نفر از دانش‌آموزان مدرسه، در دست کم یکی از ۲ تیم ورزشی مدرسه هستند؟

تمرین ۱۰.۱. در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته :

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.

ب) فقط از شرکت A خرید داشته اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.

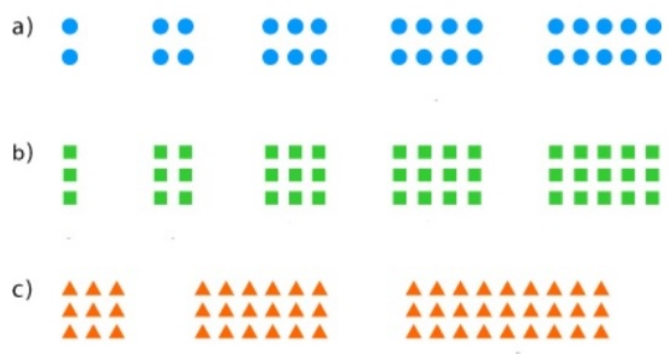
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند.

۳.۱ الگو و دنباله

۱.۳.۱ الگو

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده و یا مارپیچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشد. ریاضیات به عنوان ملکه علوم، یکی از رسالت های مهم خود را مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنها می داند. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارتست از علم مطالعه الگوها.
در این بخش برخی الگوهای هندسی و نیز الگوهای عددی متناظر با آنها مورد بررسی قرار می گیرند.

مثال ۱۰.۱. به شکل زیر دقت کنید در هر مورد c, b, a چه ارتباطی بین جملات است؟ در هرمورد چند جمله بعدی را بنویسید. آیا در حالت کلی می توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟ (رسم بر اینست که جمله اول را با نماد a_1 جمله دوم را با نماد a_2 و جمله n ام را با a_n نشان دهند. شماره های جمله که به شکل کوچک و پایین حرف انگلیسی نوشته شده اند را اندیس گویند)

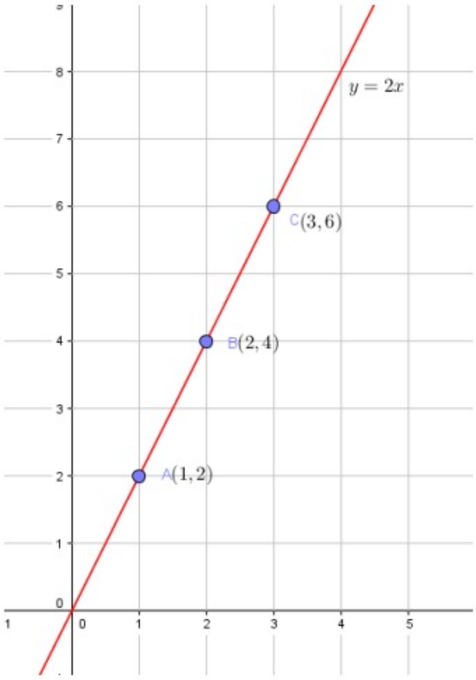


همانطور که در مثال بالا دیده شد اختلاف هر جمله از جمله قبلی مقدار ثابتی است.این نوع الگو ها را الگوی خطی می نامیم چرا که به شکل معادله درجه اول $t_n = an + b$ است. در اینجا t_n جمله n ام الگو است. در نمودار زیر مشخص کرده ایم که در قسمت a اختلاف هر جمله از جمله قبلی ۲ واحد است و لذا الگوی خطی

دارد.

$$۲ \xrightarrow[+۲]{} ۴ \xrightarrow[+۲]{} ۶ \xrightarrow[+۲]{} ۸ \xrightarrow[+۲]{} \cdots$$

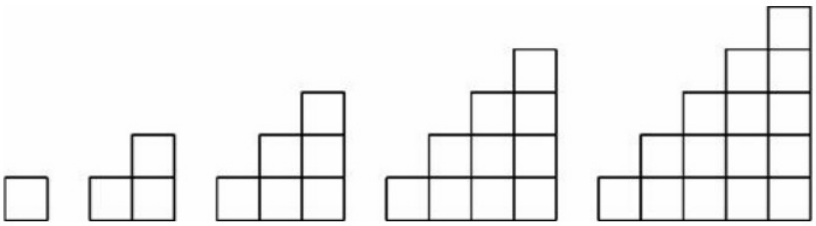
مثال ۱.۱۱. در یک اگوی خطی جمله چهارم ۱ و جمله هشتم ۱− است. جمله چندم آن برابر ۴۷− است؟



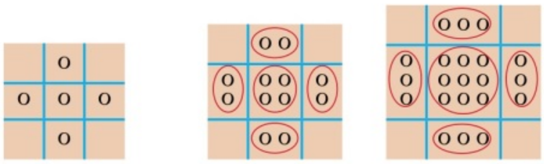
شکل ۱.۳: نمودار یک الگوی خطی

همانطور که در شکل ۱.۳ مشاهده می‌کنید اعضای دنباله ی $۲, ۴, ۶, \cdots$ در واقع عرض نقاط $A, B, C, \cdots$ روی خط $y = ۲x$ هستند. به همین علت هم به این الگوها خطی گویند. اگر خوب به معادله آن که بر حسب متغیر n نوشته شده است دقت کنید بلافاصله به یاد معادله خط ار کلاس نهم خواهید افتاد یعنی عبارت $y = ax + b$. اما همه ی الگوها لزوما خطی نیستند. به مثال زیر دقت کنید.

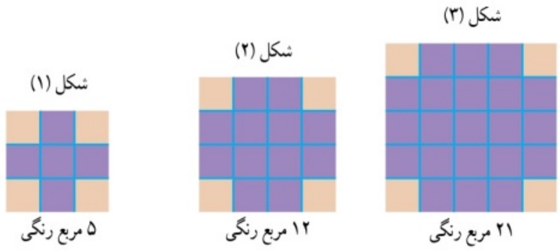
مثال ۱.۱۲. با توجه به شکل زیر تعداد مربع ها را در هر مرحله بنویسید. آیا این الگو خطی است؟ چگونه می توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟



مثال ۱۳.۱. الگوی $۵, ۱۲, ۲۱, \cdots$ را در نظر بگیرید. آیا الگو خطی می باشد؟ به کمک دو شکل زیر سعی کنید جمله n ام آن را بیابید.



$t_۱=(۱)^۲+۴(۱)$ $\quad t_۲=(۲)^۲+۴(۲)$ $\quad t_۳=(۳)^۲+۴(۳)$ $\quad t_۴=(۴)^۲+۴(۴) \ldots \ldots$ $\quad t_n=$



$t_۱=(۱+۲)^۲-۴$ $\quad t_۲=(۲+۲)^۲-۴$ $\quad t_۳=(۳+۲)^۲-۴$ $\quad t_۴=(۴+۲)^۲-۴ \ldots \ldots$ $\quad t_n=$

تذکر : در مثال بالا نتیجه جالب و پرکاربرد $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ را بدست آوردیم. مشابه به مجموع فوق می توان مجموع مربعات و مکعبات اعداد طبیعی را هم بدست آورد. تلاش شما برای اثبات روابط بسیار مهم زیر خالی از اجر نیست!

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۳=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

۲.۳.۱ دنباله ها

همانطور که در بخش قبل دیدیم از روی الگوهای هندسی می توان اعدادی را استخراج کرده و به دنبال هم نوشت. اعداد بدست آمده را از چپ به راست می نویسیم و ترتیب آنها را هم حفظ می‌کنیم . در واقع این نکته بسیار مهمی است که اعداد نامنظم کنار هم قرار نگرفته اند بلکه دارای نظم و ترتیب هستند.

تعریف ۷.۱. به هر تعداد از اعداد که آنها را پشت سر هم نوشته باشیم یک دنباله گوییم. هر عدد که در دنباله قرار دارد را یک عضو دنباله گوییم و جمله n ام یا جمله عمومی دنباله را با نماد a_n نمایش می دهیم. نماد رایج برای نوشتن جمله عمومی یک دنباله نماد $\{\}$ است. مثلا می نویسیم $a_n=\dfrac{n^۲+۱}{۵n}$ یا معادلا عبارت $\left\{\dfrac{n^۲+۱}{۵n}\right\}$.

تمرین ۱.۱۱. پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

$a_n = (-۱)^n\, ۲^n$ $\qquad b_n = (n+۲)^{-n}$ $\qquad c_n = n^n$

$d_n = -n^۲ + ۸n$ $\qquad e_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ $\qquad f_n = \frac{n}{n+۲}$

$g_n = (\frac{۱}{۳})^n$ $\qquad k_n = \frac{(-۱)^n}{n}$ $\qquad p_n = \sqrt[n]{n}$

مثال ۱.۱۴. الگوهای عددی زیر همگی مثال هایی برای دنباله محسوب می شوند. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید.همچنین سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

$a) -۱, -۲, -۳, -۴, \cdots$

$b)\ ۵, ۱۸, ۳۱, ۴۴, \cdots$

$c)\ ۱, \sqrt{۳}, \sqrt{۵}, \sqrt{۷}, \cdots$

$d) -۲, ۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \cdots$

$e)\ ۱, ۴, ۹, ۱۶, \cdots$

$f)\ ۱, ۲, ۴, ۷, \cdots$

$h)\ ۳, ۱, ۴, ۱, ۵, ۱, \cdots$

$k) -۱, ۸, -۲۷, ۶۴, \cdots$

$l)\ ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, \cdots$

$m)\ \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۱۵}, \frac{۱}{۳۵}, \frac{۱}{۶۳}, \cdots$

$n)\ \sqrt{۲}, \sqrt{۲+\sqrt{۲}}, \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}, \cdots$

$p)\ ۲, ۸, ۲۴, ۶۴, ۱۶۰, \cdots$

یادداشت تاریخی: لئوناردو فیبوناتچی (حدود ۱۱۷۰–حدود ۱۲۵۰) نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است. برای مطالعه بیشتر در گوگل فیبوناتچی را جستجو کنید.

در اینجا ذکر چند نکته ضرروری است. **اول** اینکه یافتن جمله عمومی از روی چند جمله اول هر دنباله ای در حالت کلی ممکن نیست. مثلا دنباله اعداد اول دارای جمله عمومی نیست. **دوم** اینکه از روی چند جمله اول یک دنباله نمی توان بصورت منحصر بفرد جمله عمومی را یافت. مثلا دنباله قسمت e مثال بالا را که جمله عمومی آن بصورت $a_n = n^۲$ بدست آمده می توانست بصورت $a_n = (n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴) + n^۲$ نیز باشد چرا که دقیقا همین اعداد $۱, ۴, ۹, ۱۶$ را تولید می کند اما مشخص است که از جمله چهارم به بعد این دو دنباله کاملا متفاوت هستند.

مثال ۱۵.۱. الف : جمله عمومی دنباله ای بصورت $a_n = n^۲ - ۱۰n + ۱۸$ است. کوچکترین جمله دنباله جمله چندم است. ب: جمله عمومی یک دنباله بجای اینکه بر حسب n بیان شود بر حسب $۳n - ۱$ بیان شده است. به عبارت بهتر داریم : $a_{۳n-۱} = \frac{۶n-۲}{۳n+۳}$ جمله بیستم دنباله چه عددی است؟ آیا می توان جمله عمومی دنباله را بدست آورد؟

بیشتر بدانیم: دو نوع خاص دنباله وجود دارد که از اهمیت ویژه ای برخوردار است. **اول دنباله های یکنوا:** دنباله ای که جملات آن مرتبا از اولین جمله افزایش یابند را دنباله صعودی گوییم. در مقابل چنانچه دنباله ای از اولین جمله شروع به کاهش کند ، دنباله را نزولی گوییم. توجه کنید که یک دنباله ممکن است نه صعودی باشد و نه نزولی. منظور از دنباله یکنوا دنباله ای است که یا صعودی باشد یا نزولی. **دوم دنباله های کراندار:** دنباله ای را کراندار گوییم که همواره جملات آن بین دو عدد حقیقی قرار گیرند.

$$a_n = \frac{n^۲}{n^۲+۱} \to \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۴}{۵}, \frac{۹}{۱۰}, \frac{۱۶}{۱۷} \cdots\right\} \longrightarrow \text{دنباله صعودی و کراندار است}$$

$$b_n = \frac{(-۱)^n}{n} \to \left\{-۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴} \cdots\right\} \longrightarrow \text{دنباله نه صعودی است و نه نزولی اما کران دار است}$$

$$c_n = \frac{۱}{n} \to \left\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \cdots\right\} \longrightarrow \text{دنباله نزولی و کران دار است}$$

$$d_n = (-۱)^n n^۲ \to \{-۱, ۴, -۹, ۱۶, -۲۵, ۳۶, \cdots\} \longrightarrow \text{نه صعودی و نه نزولی و نه کران دار}$$

۳.۳.۱ دنباله حسابی

تعریف ۸.۱. دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند.

فرض کنید جمله اول دنباله a و قدر نسبت عدد d باشد در این صورت جملات ابتدایی دنباله بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_۱} \qquad \underbrace{a+d}_{a_۲} \qquad \underbrace{a+۲d}_{a_۳} \qquad \underbrace{a+۳d}_{a_۴} \qquad \cdots \qquad \underbrace{a+(n-۱)d}_{a_n}$$

به این ترتیب جمله عمومی دنباله حسابی بصورت زیر حاصل می شود:

$$a_n = a + (n-۱)d$$

$$a_۱ = \text{جمله اول}\ , d = \text{قدر نسبت}, n = \text{تعداد جملات}$$

مثال ۱۶.۱. در دنباله حسابی $\cdots \frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۳}, ۲,$ جمله ۱۸ ام را بیابید. آیا جمله ای وجود دارد که برابر با -۲۴ شود؟

مثال ۱۷.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{۱۱} = ۴۸\ ,\ a_۵ = ۲۴$ مطلوبست محاسبه $a_{۲۰}$.

مثال ۱۸.۱. در دنباله حسابی $۲۰۸, ۲۰۴, ۲۰۰, \cdots ,$ کدام جمله صفر است؟

نکته مهم: فرض کنید سه عدد a ، b ، c تشکیل دنباله حسابی داده باشند. در این صورت باید $b-a=c-b$ در نتیجه باید $b=\frac{a+c}{۲}$. در این حالت b را **واسطه حسابی** بین a و c گوییم.

مثال ۱۹.۱. در یک دنباله حسابی غیر ثابت (یعنی $d \neq ۰$) چند جمله اول بصورت زیراست. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

$$a+۲\ ,\ a^۲+۲a+۲\ ,\ a^۳+۲\ \cdots$$

مثال ۲۰.۱. فرض کنید $b \neq ۱$ باشد . نشان دهید که سه عدد $\frac{۱}{۱-\sqrt{b}}, \frac{۱}{۱-b}, \frac{۱}{۱+\sqrt{b}}$تشکیل دنباله حسابی می دهند.

مثال ۲۱.۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بیابید که اضلاع آن تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۲.۱. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۲۷ و مجموع مربعات آنها ۲۹۳ است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

مثال ۲۳.۱. بین دو عدد ۴ و ۳۶ سه واسطه حسابی درج کنید به عبارت بهتر بین این دو عدد ۳عدد چنان قرار دهید که ۵ عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۴.۱. در یک دنباله حسابی که دارای n جمله است ،مجموع سه جمله اول برابر $۶\sqrt{۲}$ و مجموع سه جمله آخر $۶۰\sqrt{۲}$ است.همچنین می دانیم $a_{۱۵}=\frac{۳}{۲}a_{۱۰}$.این دنباله چند جمله دارد؟

مثال ۲۵.۱. فرض کنید $a_m\ ,\ a_n\ ,\ a_r\ ,\ a_s$ چهار جمله از یک دنباله حسابی باشند بطوریکه $m+n=r+s$ باشد .نشان دهید در این حالت باید داشته باشیم $a_m+a_n=a_r+a_s$. بویژه اگر $m+n$ زوج باشد آنگاه $a_m+a_n=۲a_{\frac{m+n}{۲}}$. در حالت خاص $a_{n-k}+a_{n+k}=۲a_n$

مثال ۲۶.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{۱۳}+a_{۱۸}=۱۳۰\ ,\ a_۵+a_۶+a_۷+a_۸+a_۹=۱۲۰$ است.جمله ۳۰ ام دنباله را بدست آورید.

مثال ۲۷.۱. مجموعه A شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۴ است.مجموعه B نیز شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۵ و قدرنسبت ۶ است. مطلوبست محاسبه $n(A\cap B)$.

تمرین ۱۲.۱. فرض کنید که $p^۲, q^۲, r^۲$ سه جمله متولی یک دنباله حسابی باشند. نشان دهید که سه عدد

$\frac{۱}{q+r}$, $\frac{۱}{r+p}$, $\frac{۱}{p+q}$ نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

تمرین ۱.۱۳. اعداد $۱+۲\sqrt{x}, ۲+۳\sqrt{x}, ۶-۷\sqrt{x}$ تشکیل دنباله حسابی می دهند. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱.۱۴. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲ و مجموع مربعات ۲۴۶ است.جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۱.۱۵. در یک دنباله حسابی $a_۳+a_۶+a_۹+\cdots+a_{۳n}=۰$ است. در این صورت حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\frac{a_۲+a_۵+a_۸+\cdots+a_{۳n-۱}}{a_۴+a_۷+a_{۱۰}+\cdots+a_{۳n+۱}}$$

تمرین ۱.۱۶. در دنباله حسابی $-۱۷۰, -۱۶۱, -۱۵۲, \cdots$ چند جمله منفی است؟

بیشتر بدانیم: می خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را در حالت کلی بیابیم. اگر این مجموع را با S_n نمایش دهیم هدف یافتن عبارت

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_n$$

است. بدین منظور همان روشی را که کارل فردریش گاوس معروف در دوره دبستان انجام داد را بکار میگیریم.

$$\begin{array}{l} S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_n \\ S_n=a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}+\cdots+a_۱ \\ \hline ۲S_n=(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+\cdots+(a_۱+a_n) \end{array}$$

حال اگر مقدار جملات را از روی جمله عمومی جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$۲S_n=\underbrace{[۲a+(n-۱)d]+[۲a+(n-۱)d]+\cdots+[۲a+(n-۱)d]}_{\text{n جمله}}$$

بنابر این به دستور جالب زیر می رسیم:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]}$$

الف) درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

$a)\ ۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

$b)\ ۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱=n^۲$

$c)\ ۲+۴+۶+\cdots+۲n=n(n+۱)$

$d)\ ۳+۷+۱۱+\cdots+۷۹=۸۲۰\Longrightarrow n=?$

ب) در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از دستور $S_n = ۲n^۲ + n$ حاصل می شود. مطلوبست محاسبه d , a_n.

ج)مجموع چند جمله از دنباله $۲۶, ۲۱, ۱۶, \cdots$ برابر ۷۴ است؟

۴.۳.۱ دنباله هندسی

می گویند یک هندی برای اولین بار شطرنج را اختراع نمود و به پادشاه هند تقدیم کرد. پادشاه که بازی شطرنج را بسیار پسندیده بود به مخترع قول داد هر جایزه ای درخواست کند قبول خواهد کرد. مخترع خوش ذوق و ریاضیدان ،درخواستی عجیب نمود. او گفت من تقاضا و توقع زیادی ندارم فقط پادشاه لطف نموده دستور دهند به ازای خانه اول صفحه شطرنج یک دانه گندم، خانه دوم دو دانه گندم، خانه سوم چهار دانه گندم و بدین ترتیب به ازای هر خانه دو برابر خانه قبل گندم به من اهدا نمایند. پادشاه و اطرافیان درخواست مخترع را به دیده حقارت و تمسخر نگریستند و خزانه دار مامور شد فی الفور خواسته مخترع را برآورده سازد. ساعاتی بعد خزانه دار به حضور پادشاه رسید و در کمال ناباوری همگان گفت: پادشاه به سلامت باد اگر کلیه خزائن کشور را از گندم تهی نموده به مخترع دهیم باز هم تعداد زیادی از خانه های شطرنج باقی می مانند و از برآوردن خواسته مخترع عاجزیم!

جدای از صحت و سقم داستان فوق بیاید امکان تهیه گندم را بررسی کنیم. مجموع گندم خواسته شده برابر است با :

$$۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{۶۴} = ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵$$

وزن هر دانه گندم را ۰٫۴ گرم بگیرید در این صورت حاصل برابر است با

$$۰٫۴ \times ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ = ۷۳۷۸۶۹۷۶۲۹۴۸۳۸۲۰۶۴۶\, gr = ۷۳۷۸۶۹۷۶۲۹۴۸\, ton$$

تولید این مقدار گندم تقریبا هزار سال طول می کشد! در واقع هدف از بیان این داستان معرفی دنباله های هندسی و سرعت شگفت انگیز رشد یا زوال آنهاست.

تعریف ۹.۱. دنباله هندسی، دنبالهای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست میآید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله مینامیم. جمله اول دنباله هندسی $a \neq ۰$ است. قدر نسبت را با q نشان می دهیم.در حالت های خاص اگر $q = ۰$ ویا$q = ۱$ باشد دنباله های خاصی پدید می آیند . اگر $q = ۰$ باشد دنباله بصورت $a, ۰, ۰, \cdots$ و اگر $q = ۱$باشد دنباله ثابت $a, a, a, \cdots$ حاصل می شوند.

برای یافتن جمله عمومی یک دنباله هندسی فرض می کنیم جمله اول آن a و قدرنسبت q باشد در این صورت ترتیب جملات بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_۱} \quad \underbrace{aq}_{a_۲} \quad \underbrace{aq^۲}_{a_۳} \cdots \underbrace{aq^{n-۱}}_{a_n} \cdots$$

بنابراین جمله n ام یا جمله عمومی دنباله هندسی بصورت زیر حاصل می شود:

$$a_n = aq^{n-۱}$$
$a =$ جمله اول ، $q =$ قدر نسبت ، $n =$ تعداد جملات

مثال ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. آنهایی را که هندسی هستند مشخص کرده و قدر نسبت و جمله عمومی آنها را بیابید.

$a)۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸,$

$b)\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}\cdots$

$c)۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۸}, \cdots$

$d)۵, ۵, ۵, \cdots$

$e)۲, ۶, ۱۸, ۵۴, \cdots$

$f)۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \cdots$

$g)۴, ۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \cdots$

$h)\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۹}, \cdots$

$k)۳, \sqrt{۳}, ۱. \cdots$

مثال ۲۹.۱. در دنباله $\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۴}, \frac{۱}{۴}, \cdots$ جمله چندم برابر $\frac{۱}{۱۲۸}$ است؟

مثال ۳۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_۵ = ۱۶۲$, $a_۸ = ۴۳۷۴$ است. جمله سوم را بدست آورید.

مثال ۳۱.۱. سه عدد a , b , cسه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. ثابت کنید: $b^۲ = ac$.(در این حالت b را واسطه هندسی بین aو c گویند.)

مثال ۳۲.۱. سه عدد $a + ۵, a + ۲, ۴a - ۴, ۱۰a$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. قدر نسبت را بیابید.

مثال ۳۳.۱. پنج واسطه هندسی بین دو عدد ۱ و ۶۴ درج کنید.

مثال ۳۴.۱. سه عدد $۸۱^{\frac{۱۵}{۴}}$, $۳^{b^۲}$, ۳^b تشکیل دنباله هندسی داده اند. b را بیابید.

مثال ۱.۳۵. در دنباله $\cdots ,\frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ جمله سیزدهم را بیابید.

مثال ۱.۳۶. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{130}{3} \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{260}{9} \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

مثال ۱.۳۷. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 108 \\ a_4 \times a_6 = 162 \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

تذکر مهم: در یک دنباله هندسی که جمله اول آن مثبت است چنانچه $q > 1$ باشد دنباله افزایشی است و اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله کاهشی است.اگر $q = -1$باشد دنباله متناوب است و اگر $q < 0$ باشد دنباله نوسانی است.

مثال ۱.۳۸. در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی غیرثابت افزایشی اند.قدر نسبت دنباله هندسی را بیابید.

مثال ۱.۳۹. چهار عدد مثبت جملات متوالی یک دنباله هندسی اند.مجموع دو عدد کوچکتر برابر ۲۰ و مجموع دو عدد بزرگتر برابر ۴۵ است.بزرگترین این اعداد کدامست؟

تمرین ۱.۱۷. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی $3\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$ و جمله وسطی $3\sqrt{2}$ است.قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱.۱۸. در یک دنباله هندسی حاصلضرب سه جمله اول -8 و حاصلجمع جملات اول و سوم برابر -5 است. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱.۱۹. در یک دنباله هندسی $a_{20} - a_{19} = 1024$, $a_{10} - a_9 = 1$ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۱.۲۰. در یک دنباله هندسی $a_3 + a_5 + a_7 = 1638$, $a_2 + a_4 + a_6 = 546$ است. حاصلضرب چند جمله دنباله برابر ۱۱۶۶۴ می شود؟

تمرین ۱.۲۱. عدد ۳۲۵ را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند و اختلاف دو عدد بزرگتر برابر ۱۵۰ باشد.

تمرین ۲۲.۱. جمله اول یک دنباله هندسی $\sqrt{2}-1$ است. جمله دوم دنباله چه عدد صحیحی باشد تا جمله ششم برابر $17+12\sqrt{2}$ شود؟

تمرین ۲۳.۱. در یک دنباله حسابی و غیرثابت، جملات سوم ، هفتم و نهم می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟

بیشتر بدانیم: در این قسمت می خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را بدست آوریم. اگر جمله اول را با a و قدر نسبت را با q نشان دهیم هدف محاسبه عبارت $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ است . بدین منظور داریم:

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$
$$qS_n=aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^n$$
$$\xrightarrow{\text{کم کردن طرفین ۲ رابطه بالا}}\quad qS_n-S_n=aq^n-a$$
$$S_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{S_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1}\qquad a=\text{جمله اول}\quad q=\text{قدر نسبت}\quad n=\text{تعداد جملات}}$$

بویژه در یک حالت خاص که $|q|<1$ است مشاهده می کنیم که چنانچه n به قدر کافی بزرگ باشد آنگاه $q^n\approx 0$ است و لذا رابطه بصورت زیر بدست می آید:

$$\boxed{S_\infty=\frac{a}{1-q}}$$

۱ – در یک دنباله هندسی $S_3=9$, $S_6=-63$ است مطلوبست محاسبه S_{10}.

۲ – مجموع $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ را بیابید.

۳ – اگر $|q|<1$ باشد حاصل $(1+q+q^2+q^3+\cdots)(1-q+q^2-q^3+\cdots)$ را بدست آورید.

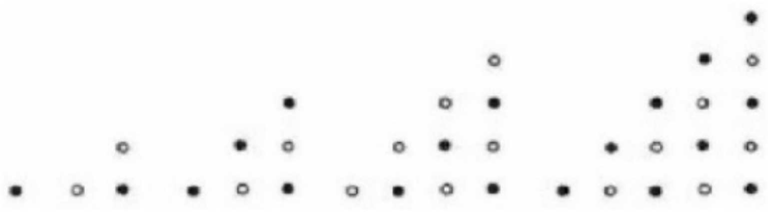
۴ – در یک دنباله هندسی داریم $S_{2n}=17S_n$. مطلوبست محاسبه q.

۵ – حاصل عبارت $S_n=9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{n}$ را بیابید.

۶ – توپی از ارتفاع ۵ متری پرتاب می شود و پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می رود تا ساکن شود. کل مسافتی که توپ طی می کند را محاسبه کنید.

تمرین الگو،دنباله های حسابی و هندسی

تمرین ۲۴.۱. با توجه به شکل زیر و الگوی آن در شکل پانزدهم چند دایره سیاه رنگ دیده می شود؟



تمرین ۲۵.۱. کوچکترین جمله ی دنباله های زیر را بیابید.

$a) a_n = n^{۲} - ۲۰n$

$b) a_n = n + \frac{۱۶}{n}$

تمرین ۲۶.۱. بزرگترین جمله دنباله های زیر را بیابید.

$a) a_n = -۲n^{۲} + ۲۰n - ۱۵$

$b) a_n = \frac{۱}{n^{۲} + ۱۰n + ۵}$

تمرین ۲۷.۱. دنباله $a_n = n + ۳ + \frac{۸}{n+۱}$ چند جمله صحیح دارد؟

تمرین ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. کدام هندسی یا حسابی اند؟

$a) \sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}, ۴\sqrt{۲}, \cdots$

$b) ۲, ۵, ۹, ۱۴, \cdots$

$c) \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, \frac{۷}{۴}, \frac{۱۵}{۱۶}, \cdots$

$d) \sqrt{۲} - ۱, ۲ - \sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲} - ۲, ۴ - ۲\sqrt{۲}, \cdots$

تمرین ۲۹.۱. دنباله $۱, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۶۴}, \cdots$ مفروض است. جمله عمومی آن را بنویسید.

تمرین ۳۰.۱. فرض کنید c, b, a سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. ثابت کنید $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{2b}$ و $\frac{1}{b+c}$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

تمرین ۳۱.۱. اعداد فرد را بصورت $(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \cdots$ دسته بندی کرده ایم. در دسته سی ام مجموع دو جمله اول و آخر را بیابید.

تمرین ۳۲.۱. تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع جملات دنباله سه برابر مجموع جملات ردیف فرد دنباله باشد قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۳۳.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول ، نهم و چهل و نهم بترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۳۴.۱. اعداد a, b, c تشکیل دنباله حسابی و اعداد a, c, b تشکیل دنباله هندسی می دهند. قدرنسبت دنباله هندسی را بدست آورید.

تمرین ۳۵.۱. دستوری برای جمله عمومی دنباله $\cdots \frac{14}{18}, \frac{11}{11}, \frac{8}{6}, \frac{5}{3}$ بیابید.

تمرین ۳۶.۱. در دنباله زیر چند جمله مشترک کمتر از ۱۹۰ وجود دارد؟

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \cdots \\ \\ 2, 7, 12, 17, \cdots \end{cases}$$

تمرین ۳۷.۱. بین دو عدد a و $a+8$ سه واسطه هندسی درج کرده ایم.اگر مجموع اولین و آخرین واسطه برابر $8\sqrt{2}$ باشد ، a را بدست آورید.

تمرین ۳۸.۱. در دنباله هندسی که جمله اول آن ۱۰ و قدر نسبت آن ۵ است چند جمله کمتر از ۱۰۰۰۰ داریم؟

تمرین ۳۹.۱. مجموع جملات یک دنباله هندسی $(|q| < 1)$ برابر ۸ و مجموع مربعات جملات همان دنباله برابر $\frac{64}{3}$ است. جمله اول را بیابید.

تمرین ۴۰.۱. حاصل عبارت $(1 + x + x^2 + \cdots + x^8)(1 - x + x^2 - \cdots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را بیابید.