ریاضی دهم با طعم گلابی

فصل ۱ درس اول و دوم : مجموعه ها

تالیف : مهندس حسین کاویانی

مجموعه اعداد : تاکنون در سال های گذشته با مجموعه های مختلف اعداد آشنا شده اید که در زیر یادآوری می شوند .

$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$ مجموعه اعداد طبیعی

$W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z}=\{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,...\}$ مجموعه اعداد گویا

- ✓ مجموعه مرجع در اعداد را مجموعه اعداد حقیقی می گوییم و با $\mathbb{R}$ نشان می دهیم .
- ✓ مجموعه اعدادی که صحیح نباشند را غیر صحیح یا اعشاری می گوییم و با $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ نشان می دهیم . سه نوع عدد اعشاری وجود دارد که نوع اول و دوم آن به کسری با صورت و مخرج صحیح تبدیل می شوند ، پس گویا هستند ولی توع سوم غیر گویا است .

نوع اول : اعشاری مختوم $\overset{\text{گویا}}{\Leftarrow}$ $۱.۷۵=\dfrac{۱۷۵}{۱۰۰}$

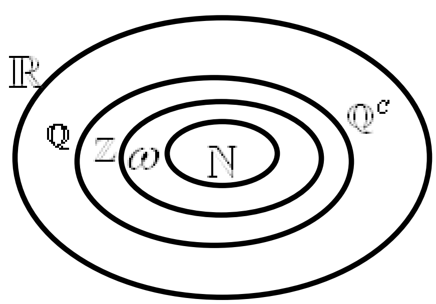
نوع دوم : اعشاری گردشی یا متناوب $\overset{\text{گویا}}{\Leftarrow}$ $۱.۸۳۳۳...=۱.۸\overline{۳}=\dfrac{۱۱}{۶}$

نوع سوم : اعشاری غیر مختوم و غیر گردشی $\Leftarrow$ غیر گویا (اصم یا گنگ)

$\pi\simeq ۳.۱۴$ $\qquad e=۲.۷۱...$ $\qquad \sqrt{۲}=۱.۴۱...$

- ✓ به اعدادی که گویا نباشند گنگ یا اصم می گوییم (همان اعشاری نوع سوم) و مجموعه آن را با $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}^c$ نشان می دهیم .

نکته) $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}\subseteq \mathbb{Q}\subseteq \mathbb{R}$



- ✓ بین هر دو عدد صحیح ، بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ دیگر وجود دارد .

مهندس کاویانی

تذکر : $\in$ نماد عضویت (متعلق بودن) است و باید آن عضو دقیقاً در آن مجموعه دیده شود .

اما $\subseteq$ نماد زیر مجموعه است و $A \subseteq B$ یعنی تمام اعضای مجموعه A در مجموعه B دیده می شود و وجود دارد . دقت کنید زیرمجموعه خود یک مجموعه است .

✓ ϕ (فی) مجموعه تهی است که زیر مجموعه هر مجموعه ای است و آن را با $\{\ \}$ نیز نشان می دهند .

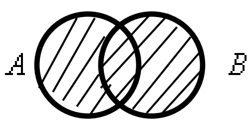
مثال ۱: اگر $A=\{a,\{a\},b,\phi\}$ مشخص کنید کدام یک از موارد زیر درست هستند .

۱) $b \in A$ ۲) $b \subset A$ ۳) $\{b\} \in A$ ۴) $\{b\} \subset A$

۵) $a \in A$ ۶) $\{a\} \subset A$ ۷) $\{a\} \in A$ ۸) $\{\{a\}\} \subset A$

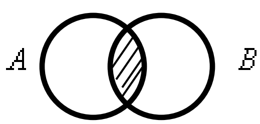
۹) $\{\{a\}\} \in A$ ۱۰) $\phi \subset A$ ۱۱) $\phi \in A$ ۱۲) $\phi \in A$

۱۳) $\{\phi\} \subset A$ ۱۴) $\{\ \} \subset A$ ۱۵) $\{\ \} \in A$

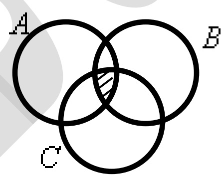


❋ **اجتماع دو مجموعه :** $A \cup B$ یعنی مجموعه ای که اعضای آن متعلق به A یا B یا هر دو باشند .

❋ **اشتراک دو مجموعه :** $A \cap B$ یعنی مجموعه ای که اعضای آن متعلق به هر دو مجموعه A و B باشند .

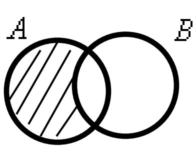


$A \cap B$

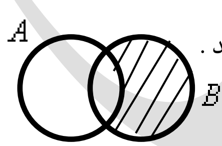


$A \cap B \cap C$

❋ **تفاضل دو مجموعه :** $A - B$ یعنی اعضایی از مجموعه A که در مجموعه B نیستند .

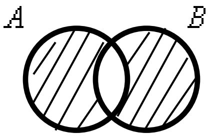


$A - B$



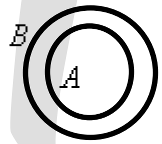
$B - A$

✵ **تفاضل متقارن A و B :** $A\Delta B$ یعنی اعضایی که فقط در A یا فقط در B هستند .



$$(A-B)\bigcup(B-A)=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$$

نکته : اگر $A\subseteq B$ باشد آنگاه :



$$A\bigcap B=A \qquad A\bigcup B=B \qquad A-B=\phi \qquad B-A\neq\phi$$

نکته : می دانیم که $(A\bigcap B)\subset(A\bigcup B),(A\bigcap B)\subset B,(A\bigcap B)\subset A,B\subset(A\bigcup B),A\subset(A\bigcup B)$ سپس :

$$A\bigcup(A\bigcap B)=A \qquad A\bigcap(A\bigcup B)=A$$

نکته : خاصیت توزیع پذیری اجتماع و اشتراک و بر عکس آن فاکتورگیری !!!

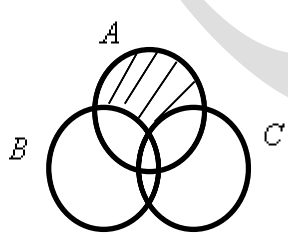
$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$
$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

تذکر : خاصیت توزیع پذیری برای تفاضل کلیت ندارد . در مباحث بعدی به آن اشاره خواهد شد .

تذکر : خاصیت پخشی برای چند اجتماع یا چند اشتراک وجود دارد اما برای اشتراک و اجتماع با هم در حالت کلی خاصیت پخشی نداریم :

$$\begin{cases} A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap B\bigcap C \\ A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup B\bigcup C \\ A\bigcup(B\bigcap C)\neq(A\bigcup B)\bigcap C \end{cases}$$

مثال ۲ : کدام مجموعه زیر قسمت سایه خورده را نشان می دهد ؟



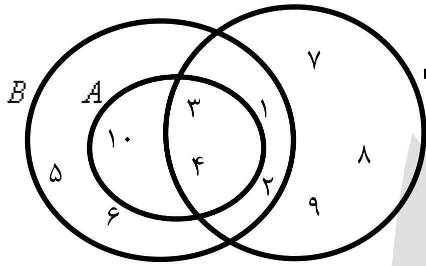
۱) $(A\bigcup B)-(A\bigcup C)$ ۲) $(A-C)\bigcup(A-B)$

۳) $(A-C)\bigcap(A-B)$ ۴) $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

مهندس کاویانی

مثال ۳: با توجه به شکل مقابل ، $(A-B)\cup(C-A)$ چند عضو دارد ؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶



مثال ۴: اگر $A\cup B=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$, $A\cup C=\left\{x\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{۲۴}{x}\in\mathbb{Z}\right\}$ آنگاه $A\cup(B\cap C)$ چند عضو دارد ؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

مثال ۵ : کدام مجموعه زیر برابر مجموعه A نیست ؟

۱) $A\cap(A\cup B)$ ۲) $A\cup(A\cap B)$ ۳) $(A\cup B)-B$ ۴) $(A\cup B)-(B-A)$

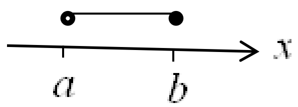
مثال ۶ : اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$ و $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ کدام رابطه زیر درست است؟

۱) $A-B=C$ ۲) $C\subseteq A$ ۳) $B-C=\{۱,۲\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

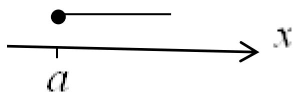
مثال ۷ : اگر $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$ باشد آنگاه کدام گزینه درست است ؟

۱) $B\subseteq A$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $C\subseteq A$ ۴) $A\subseteq C$

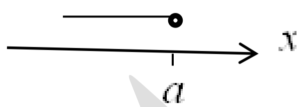
بازه : به زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی که محدوده ای از اعداد حقیقی را به طور پیوسته شامل می شود یک بازه می گوییم .



$$\Rightarrow a < x \leq b \Rightarrow x \in (a,b]$$



$$\Rightarrow x \geq a \Rightarrow x \in [a,+\infty)$$



$$\Rightarrow x < a \Rightarrow x \in (-\infty,a)$$

✵ **اجتماع ، اشتراک و تفاضل بازه ها :**

مثال ۸ : اگر $B=\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq ۲\}, A=\{x : x \in \mathbb{R}, ۲x-۱<۵\}, C=[-۱,۴)$ حاصل هر یک از مجموعه های زیر را بدست آورید ؟

۱) $A=$

۲) $B=$

۳) $A \cap C=$

۴) $A \cup C=$

۵) $(A \cap C) \cup B=$

۶) $A \cap (C \cup B)=$

۷) $A-C=$

۸) $C-A=$