درس اوّل : مجموعه ها (یادآوری و تکمیل)

قسمت اوّل : یادآوری

در پایه های قبلی با مجموعه و مفهوم آن آشنا شده اید و می دانید که مجموعه ، دسته ای از اشـیای کـاملاً معین می باشد. همچنین می دانید یک مجموعه را با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نامگذاری می کننـد. هـر یک از اشیاء تشکیل دهنده ی مجموعه را عضو آن مجموعه می نامند. اگر شیء a در مجموعه ی A باشد، می گوییم a عضو مجموعه ی A است و می نویسیم $a \in A$ و اگر شیء a در مجموعه ی A نباشد، می گوییم a عضو مجموعه ی A نیست و می نویسیم $a \notin A$.

تمرین ۱ : اگر A مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۳ باشد.

الف : مجموعه ی A را با عضوهایش بنویسید.

ب : در هر مورد جای خالی را با نماد عضویت یا عدم عضویت کامل کنید.

$۵ \square A$ $۹ \square A$

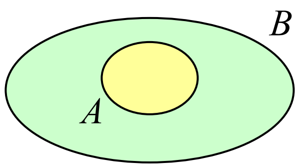
حل :

الف: $A = \{۳,۶,۹\}$ ب : $۵ \notin A$ $۹ \in A$

اگر مجموعه ای دارای عضو نباشد،آنرا تهی می نامند. مانند مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۱۱

مجموعه ی تهی را با نماد Φ یا $\{\}$ نمایش می دهند.

در سال قبل یادگرفتید که ، هرگاه تمام عضوهای مجموعه ی A متعلق به مجموعه ی B باشند مـی نویـسند $A \subseteq B$ و اگـر چـنین نباشـد مـی نویسند $A \not\subset B$



$A \subseteq B$

تمرین ۲ : مجموعه ی اعداد طبیعی و فرد کمتر از ۱۰ را با عضو های آن نوشته. سپس زیر مجموعه ای از آن بنویسید که عضوهای آن عدد اوّل باشند.

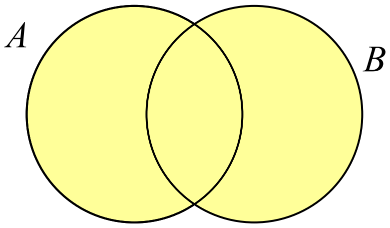
همچنین به یاد می آورید که هر مجموعه زیر مجموعه ی خودش است و مجموعه ی تهی زیر مجموعـه ی تمام مجموعه ها است.

تمرین ۳ : تمام زیر مجموعه های مجموعه ی $A = \{۵,۸,۳\}$ را بنویسید.

اعمالی که برای دو مجموعه ی A و B ، در سال گذشته ، با آنها آشنا شده اید، عبارتند از:

الف : اجتماع دو مجموعه $(A\bigcup B)$

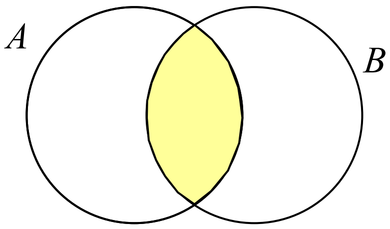
مجموعه ای است شامل عضو هایی که در A یا در B یا در هر دو می باشند.



$A\bigcup B$

ب : اشتراک دو مجموعه $(A\bigcap B)$

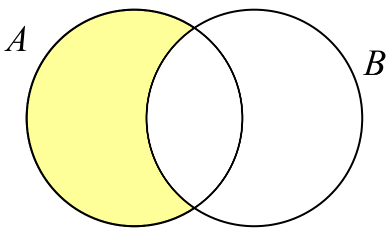
مجموعه ای است شامل عضو هایی که هم در A و هم در B (در هر دو) می باشند.



$A\bigcap B$

ج : تفاضل دو مجموعه $(A-B)$

مجموعه ای است شامل عضو هایی که در A باشند ولی در B در نباشند.



$A-B$

تمرین ۴ : اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

الف) $A\bigcup B$ ب) $A\bigcap B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

تمرین ۵ : اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{c,d,e,f,g\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

الف) $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$ ب) $(A-B)\bigcup(B-A)$

نتیجه: برای هر دو مجموعه ی دلخواه A و B تساوی زیر برقرار می باشد.

$$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(A-B)\bigcup(B-A)$$

***

قسمت دوّم : آشنایی با مجموعه های خاص

برخی از مجموعه های مهم که در سال های گذشته نیز با آنها آشنا شده اید به شرح زیر می باشند.

۱ : اعداد طبیعی

اعدادی که برای شمارش بکار می روند را اعداد طبیعی می نامند. مانند شمارش صندلی ها، تعداد دانش آموزان، افراد خانواده، تعداد دفعاتی که از تلفن استفاده شده است و ... . این اعداد عبارتند از :

۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ......

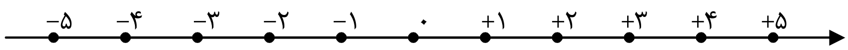
۲ : اعداد حسابی

اعداد طبیعی به همراه صفر اعداد حسابی گفته می شوند.

۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ....

۳ : اعداد صحیح

می توان اعداد طبیعی را به کمک نقاط روی یک محور[1] به شکل زیر نمایش داد. اعداد طبیعی را اعداد مثبت فرض می کنیم و در جهت مخالف محور نقاط متقارن آنها نسبت به مبدأ را معین می کنیم. در این صورت نقاط متناظر با اعداد منفی بدست می آیند. هر یک از این اعداد، قرینه ی یک عدد طبیعی می باشند. اعداد طبیعی و قرینه های آنها به همراه صفر را اعداد صحیح می نامند.



۴ : اعداد گویا (مُنطق)

واضح است که در بسیاری از اندازه گیری ها و محاسبات اعداد صحیح کافی نیستند. به عنوان مثال در اندازه گیری وزن، وزن بسیاری از اجسام را نمی توان با یک عدد صحیح نمایش داد. لذا برای رفع این مشکل می توان اعداد گویا را معرفی کرد.

---

[1] – خطی که روی آن یک مبدأ، یک جهت و یک پاره خط واحد انتخاب شده باشد را یک محور اعداد می نامند. در محور اعداد جهت سمت راست را به عنوان جهت مثبت انتخاب می کنند. بدیهی است جهت مخالف آن جهت منفی است.

هر عدد را که بتوان آن را به شکل یک کسر طوری نوشت که صورت و مخرج آن عدد صحیح و مخرج آن غیر صفر باشد، را عدد گویا می نامند. اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ باشد، در این صورت عدد $\frac{a}{b}$ یک عدد گویا است. نمایش یک عدد گویا به شکل یک کسر را **نمایش متعارفی** می نامند.

مثال: هر یک از اعداد زیر گویا هستند.

$$-۱ , ۰ , -۴ , ۱ , ۱۵ , ۵/۷ , -۳/۱۲ , ۲\frac{۳}{۵} , \frac{-۵}{۷} , \frac{۳}{۵}$$

نتیجه:

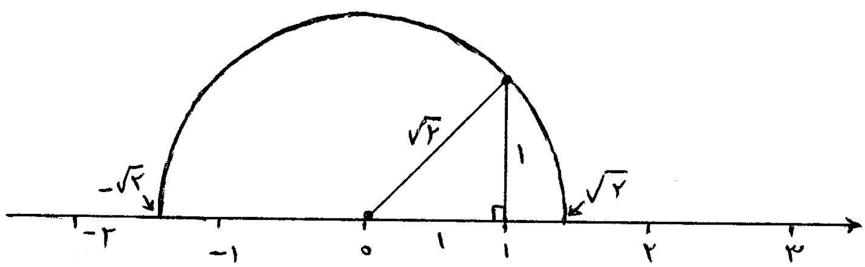
۱. تمام اعداد صحیح، گویا هستند.

۲. طبق تعریف مخرج هیچ کسری نمی تواند صفر باشد.

۵ : اعداد گنگ(اصم)

زمانی تصور می شد که طول هر پاره خط یک عدد گویا است. روزی دانشمندان متوجه شدند که اگر طول دو ضلع زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه برابر یک باشند، طبق قضیه ی فیثاغورس طول وتر برابر $\sqrt{۲}$ است. این عدد، گویا نیست ولی طول یک پاره خط است. آنها متوجه شدند که این تصور درست نیست و پاره خط هایی وجود دارند که طول آنها عدد گویا نمی باشد. بدین شکل آنها دسته ی دیگری از اعداد را کشف کردند. آنها این اعداد را اصم یا گنگ نامیدند.

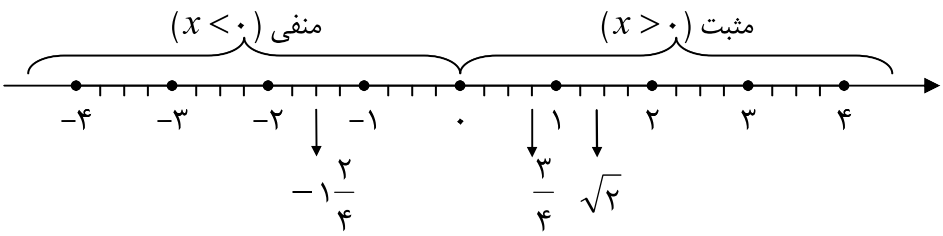
مثال: نمایش عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است.



۶ : اعداد حقیقی

واضح است که نظیر هر عدد گویا نقطه ای روی محور اعداد می توان یافت ولی نقاطی روی محور وجود دارد که نظیر اعداد گویا نیستند. این اعداد را اعداد گنگ نامیدیم. اعداد گویا و اعداد گنگ با هم را اعداد حقیقی می نامند.

لذا می توان گفت که هر نقطه روی محور نظیر یک عدد حقیقی است و هر عدد حقیقی نظیر یک نقطه روی محور است. به همین دلیل چنین محوری را محور اعداد حقیقی می نامند.



مجموعه هایی که معرفی شدند به طور اجمالی می توان به صورت زیر نیز بررسی کرد.

۱ : مجموعه ی اعداد طبیعی[۲] $N=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,....\}$

۲ : مجموعه ی اعداد حسابی $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,....\}$

۳ : مجموعه ی اعداد صحیح $Z=\{....,-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,....\}$

۴ : مجموعه ی اعداد گویا $Q=\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in Z, b\neq ۰\}$

۵ : مجموعه ی اعداد گنگ $Q'=\{x\,|\,x\notin Q\}$

۶ : مجموعه ی اعداد حقیقی $R=Q\cup Q'$

---

2 . توجه داشته باشید که مجموعه ی اعداد طبیعی دارای چند زیر مجموعه ی خاص نیز می باشد. از جمله:

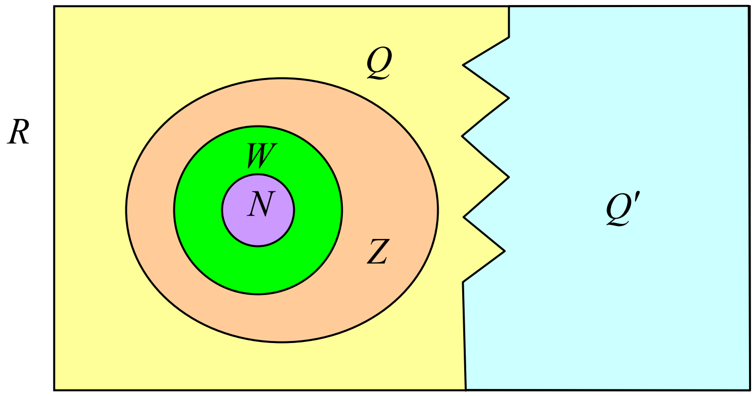
مجموعه ی اعداد طبیعی زوج $E=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,....\}=\{x\,|\,x=۲k, k\in N\}$

مجموعه ی اعداد طبیعی فرد $O=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,....\}=\{x\,|\,x=۲k-۱, k\in N\}$

مجموعه ی اعداد اوّل $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,....\}$

تذکر: با توجه به مجموعه های فوق همواره داریم:

۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ۲) $Q' \subseteq R$ ۳) $Q \cap Q' = \Phi$



تمرین ۶ : اعداد $۱\frac{۲}{۳}$ و $-۰/۳$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

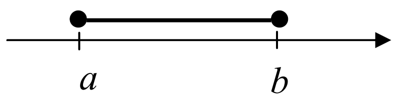
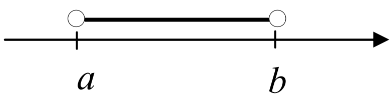
تمرین ۷ : اعداد $-\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

***

قسمت سوّم : مفهوم بازه ها

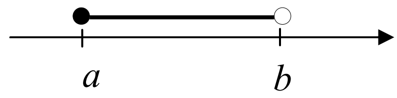
در بسیاری از مفاهیم ریاضی نیاز به زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی داریم. در این صورت می توان از مفهوم بازه ها استفاده کرد. هر قطعه از محور اعداد حقیقی را یک بازه (فاصله) می نامند. اگر b و a دو عدد حقیقی و $a < b$ بازه های زیر را می توان معرفی کرد.

الف : بازه هایی که از دو طرف محدود می باشند.

۱) بازه ی بسته	۲) بازه ی باز
 $[a,b] = \{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$	 $(a,b) = \{x \mid x \in R, a < x < b\}$

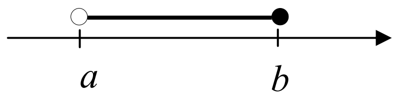
ب : بازه هایی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر باز می باشند. (بازه های نیم باز)

۳)



$[a,b)=\{x \mid x\in R, a\le x<b\}$

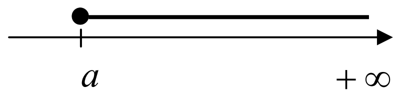
۴)



$(a,b]=\{x \mid x\in R, a<x\le b\}$

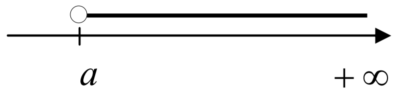
ج : بازه هایی که از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود می باشند.[۳]

۵)



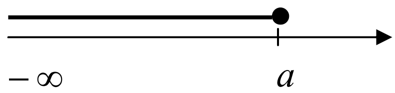
$[a,+\infty)=\{x \mid x\in R, x\ge a\}$

۶)



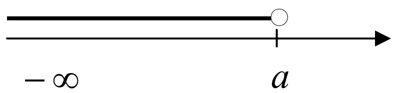
$(a,+\infty)=\{x \mid x\in R, x>a\}$

۷)



$(-\infty,a]=\{x \mid x\in R, x\le a\}$

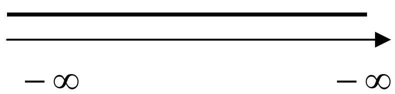
۸)



$(-\infty,a)=\{x \mid x\in R, x<a\}$

د : بازه هایی که از دو طرف نامحدود می باشند.

۹)



$(-\infty,+\infty)=R$

تمرین ۸ : هر یک از مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

۱) $A=\{x\in R \mid ۰<x<۱\}$

۲) $B=\{x\in R \mid x\ge \sqrt{۲}\}$

۳) $C=\{x\in R \mid -۲x+۶>۰\}$

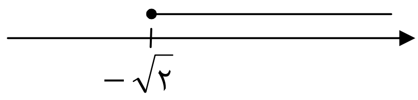
۴) $D=\{x\in R \mid x\ne ۵\}$

تمرین ۹ : هر یک از بازه های زیر را به صورت مجموعه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

الف) $A=[-۲,۵]$ ب) $B=(۳,۷]$ ج) $C=(-\infty,\sqrt{۲})$

۳. بینهایت مفهومی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات (با تعبیرات مختلف) به‌کار می‌رود و معمولاً به معنـای« فراتـر از هـر مقـدار» اسـت. معمـولاً نشانه ی بینهایت در ریاضیات ∞ است. مفهوم بی نهایت زمانی بکار می رود که می خواهند بیان کنند چیزی پایان ندارد. لذا بی نهایت یک عـدد واقعی نیست و نمی توان اعمال ریاضی را روی آن انجام داد.

تمرین ۱۰ : در جدول زیر ، خانه های خالی را با نماد خواسته شده ، پرکنید.

نمایش هندسی	نماد مجموعه	نماد فاصله
		$[-۱,۳)$
	$\{x \mid x \in R, ۲ < x < ۳\}$	
		

تمرین ۱۱ : به کمک نمایش هندسی دو بازه‌ی $A = (-۱,۴]$ و $B = (۲,+\infty)$ تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ ج) $A - B$ د) $B - A$

تمرین ۱۲ : نمایش هندسی دو مجموعه ی زیر را نوشته و سپس تعیین کنید که کدام یک بازه است؟

الف) $A = \{x \in N \mid ۳ < x \leq ۶\}$ ب) $B = \{x \in R \mid ۳ < x \leq ۶\}$

***

تمرین برای حل :

۱۳ : نامعادله های زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب آنها را به صورت فاصله بنویسید.

الف) $۳x - ۵ \geq ۲x + ۲$ ب) $۵ < -۳x - ۱ \leq ۸$

۱۴ : به کمک نمایش هندسی دو بازه ی $A = (-۴,۲]$ و $B = [-۱,۳)$ تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ ج) $A - B$ د) $B - A$

۱۵ : تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $A = (-۵,۲] \cup [۱,۷] =$ ۴) $D = (۰,۱) \cap [۳,۴) =$

۲) $B = (-۳,۱) \cap (۰,۳) =$ ۵) $E = [۰,+\infty) - (۴,+\infty) =$

۳) $C = [-۲,۵) \cap [۰,+\infty) =$ ۶) $F = [۲,۷) - [۳,۷) =$

۱۶ : مجموعه ی $R - \{۳\}$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماعی از دو بازه بنویسید.

قسمت چهارم : مجموعه های متناهی و نامتناهی

هر مجموعه که تعداد عضوهای آن یک عدد حسابی است را مجموعه ی متناهی می نامند و در غیر این صورت نامتناهی نامیده می شود.

مثال : مجموعه ی اعداد طبیعی کمتر از ۸ یک مجموعه ی متناهی است و مجموعه ی اعداد صحیح کمتر از ۵ یک مجموعه ی نامتناهی است. (چرا؟)

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

$B=\{۴,۳,۲,۱,۰,-۱,-۲,-۳,...\}$

توجه : طبق تعریف مجموعه‌ی تهی یک مجموعه ی متناهی محسوب می شود.

تمرین ۱۷ : یک مجموعه ی متناهی و یک مجموعه ی نامتناهی مثال بزنید.

تمرین۱۸ : مجموعه ی مضرب ها و مجموعه ی مقسوم علیه های(شمارنده های) عدد ۱۲ را نوشته و سپس تعیین کنید که کدام یک متناهی و کدام یک نامتناهی است.[4]

توجه : اگر مجموعه ای دارای یک زیر مجموعه ی نامتناهی باشد، آن مجموعه نامتناهی است.

مثال : پس بازه ی $A=(۰,۱)$ یک مجموعه‌ی نامتناهی است. زیرا مجموعه ی $B=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},....\}$ نامتناهی است و زیر مجموعه‌ی بازه‌ی $A=(۰,۱)$ می باشد.

تمرین ۱۹ : متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید.

۱ : مجموعه ی اعداد طبیعی

۲ : مجموعه ی شمارنده های طبیعی عدد ۳۶

۳ : بازه ی $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$

۴ : $\{x\in N \mid ۱<x<۲\}$

۵ : مجموعه ی اعداد طبیعی ده رقمی

۶ : مجموعه ی مضرب های طبیعی عدد ۵

۷ : مجموعه‌ی تمام دایره هایی که به مرکز مبدأ مختصات رسم می شوند.

۸ : مجموعه ی اعداد اوّل

***

[4] . اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش پذیر باشد ، در این صورت b را مقسوم علیه (شمارنده) عدد a و همچنین a را مضرب b می نامند. برای مثال چون۱۲ بر۴ بخش پذیر است، پس۱۲ مضرب عدد ۴ و عدد ۴ مقسوم علیه ۱۲ است.

تمرین برای حل :

۲۰ : دو مجموعه ی نامتناهی نام ببرید.

۲۱ : دو مجموعه ی نامتناهی بنویسید که یکی از آنها زیر مجموعه ی دیگری باشد.

۲۲ : دو مجموعه ی نامتناهی مانند A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B-A$ تک عضوی باشد.

۲۳ : دو مجموعه ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد.

۲۴ : اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه در مورد متناهی بودن یا نبودن A بحث کنید.

۲۵ : درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید

الف : اجتماع دو مجموعه ی متناهی ، متناهی است.

ب : اشتراک دو مجموعه ی نامتناهی ، نامتناهی است.

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri