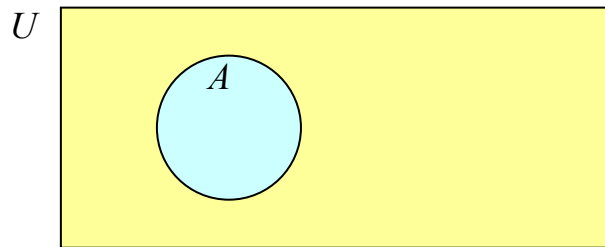


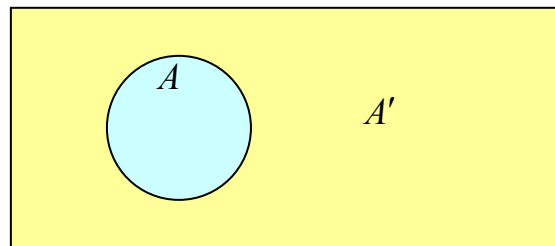
درس دوم: مجموعه ی مرجع و متمم یک مجموعه

قسمت اول: مجموعه ی مرجع و متمم یک مجموعه

در ریاضیات وقتی بحثی مطرح می شود، با توجه به عالم سخن آن بحث، می توان مجموعه ی در نظر گرفت که مجموعه های دیگر زیر مجموعه ی آن باشند. چنین مجموعه ای را مجموعه ی مرجع می نامند^۱ و آن را با U یا M نمایش می دهند. معمولاً در نمایش مجموعه ی مرجع با استفاده از نمودار ون آن را با مستطیل نمایش می دهند.



هرگاه U مجموعه ی مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه ی $U - A$ را متمم A می نامیم و آن را با نماد A' یا A^c نمایش می دهیم. به عبارتی دیگر A' شامل تمام عضوهای U است که در A نباشند.



$$A' = U - A$$

تمرین ۱: اگر $U = \{x \in Z \mid -3 < x \leq 3\}$ مجموعه ی مرجع باشد، متمم مجموعه ی $A = \{-1, 0, 1\}$ را بنویسید.

تمرین ۲: اگر $U = [1, 5]$ مجموعه ی مرجع باشد، متمم مجموعه ی $A = (2, 3]$ را بنویسید.

^۱ گاهی ممکن است در مورد خاصیتی از اعداد طبیعی بحث می کنیم، در این صورت مجموعه ی مرجع مجموعه ی تمام اعداد طبیعی است. همچنین ممکن است فقط در مورد اعداد حقیقی بحث کنیم که در اینصورت مجموعه مرجع را اعداد حقیقی در نظر می گیریم. یا ممکن است ما دانش آموزان یک مدرسه را مورد مطالعه قرار دهیم که در اینصورت مجموعه مرجع، مجموعه ی شامل تمام دانش آموزان آن مدرسه است. ممکن است صحبت از دانشجویی یک دانشگاه خاص در نظر بگیریم که در اینصورت مجموعه مرجع ما برابر دانشجویان آن دانشگاه است ولی اگر صحبت از یک دانشجو در استان بعمل آید، در اینصورت مجموعه مرجع برابر تمام دانشجویان استان است. و به همین ترتیب اگر به یک دانشجویی خاص در ایران اشاره کنیم، در اینصورت مجموعه مرجع برابر است با تمام دانشجویان ایران می باشد.

نتیجه:

۱ : متمم مجموعه ی مرجع، مجموعه ی تهی است. ($U' = \Phi$)

۲ : متمم مجموعه ی تهی، مجموعه ی مرجع است. ($\Phi' = U$)

۳ : متمم متمم هر مجموعه برابر همان مجموعه است. ($(A')' = A$)

۴ : اجتماع هر مجموعه و متمم آن برابر مجموعه ی مرجع است. ($A \cup A' = U$)

۵ : اشتراک هر مجموعه و متمم آن برابر مجموعه ی تهی است. ($A \cap A' = \Phi$)

دو مجموعه ناتهی که اشتراک آنها، تهی باشد، را جدا از هم (مجزا) می نامند. برای مثال دو مجموعه ی

زیر جدا از هم هستند.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{و} \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

تمرین ۳ : دو زیر مجموعه ی نامتناهی از اعداد طبیعی را نام ببرید که مجزا باشند.

تمرین ۴ : اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه ی مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ آنها مجموعه

های زیر را با عضوها بنویسید.

۱) A'	۴) $A \cap B'$	۷) $(A \cap B)'$
۲) B'	۵) $(A \cup B)'$	۸) $A' \cup B'$
۳) $A - B$	۶) $A' \cap B'$	۹) $(A \cup B) - (A \cap B)$

نتیجه: تساوی های زیر برای هر دو مجموعه ی دلخواه A و B برقرار می باشند.^۲

$$۱) A - B = A \cap B'$$

$$۲) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$۳) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

توجه : اگر A یک زیر مجموعه از مجموعه ی مرجع U باشد. در این صورت :

$$۱) A \cup A' = U$$

$$۳) U \cup A = U$$

$$۵) U - A = A'$$

$$۲) A \cap A' = \Phi$$

$$۴) U \cap A = A$$

^۲. نتایج دوّم و سوّم را قوانین دمورگان می نامند.

قسمت دوم : تعداد عضو های اجتماع و تفاضل دو مجموعه ی متناهی

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه ی متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را به صورت $n(A)$ نمایش می دهند.

برای مثال اگر $A = \{x, y, z, t, u\}$ در این صورت $n(A) = 5$ می باشد.

اگر A و B دو مجموعه ی متناهی باشند، در این صورت دو رابطه ی زیر همواره برقرار هستند.

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ب) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

تمرین ۵ : اگر مجموعه ی شمارنده های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B تساوی های فوق را برای این دو مجموعه بررسی کنید.

تمرین ۶ : برای دو مجموعه ی A و B اگر $n(A) = 15$ و $n(A \cup B) = 30$ و $n(A \cap B) = 5$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

توجه : اگر دو مجموعه ی A و B جدا از هم هستند، در این صورت $A \cap B = \Phi$ و لذا $n(A \cap B) = n(\Phi) = 0$ پس می توان نتیجه گرفت که :

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ب) $n(A - B) = n(A)$

تمرین ۷ : اگر U مجموعه ی مرجع و متناهی و A یک مجموعه ی زیر مجموعه ی آن باشد. در این صورت ثابت کنید.

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

حل :

$$n(A') = n(U - A) = n(U) - n(U \cap A) = n(U) - n(A)$$

تمرین ۸ : با توجه به روابط فوق ، روابطی مشابه برای هر یک از موارد زیر بنویسید.

الف) $n(A \cap B')$

ب) $n(A' \cup B')$

ج) $n(A' \cap B')$

توجه : با استفاده از نمودار ون می توان مسائل مربوط به تعداد عضو های اجتماع و تقاضل دو مجموعه ی متناهی را به راحتی حل نمود.

تمرین ۹: در یک کلاس ۲۵ نفری ، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، تعیین کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

تمرین ۱۰: در یک هتل، ۴۲ نفر وجود دارد. ۲۰ نفر آنان تاجر و ۱۷ نفر جهانگرد هستند. اگر ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد باشند. تعیین کنید که

الف: در این هتل چند نفر هم تاجر و هم جهانگرد هستند.

ب : چند نفر فقط تاجر هستند.

ج : چند نفر فقط جهانگرد هستند.

تمرین برای حل :

۱۱: فرض کنیم برای دو مجموعه ی A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه ی مرجع U باشند. بطوری که $n(U) = 100$ و $n(A) = 60$ و $n(B) = 50$ و $n(A \cap B) = 15$. مطلوب است محاسبه ی :

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B')$

ج) $n(A' \cap B)$

د) $n(A' \cap B')$

هـ) $n(A' \cup B')$

۱۲: اگر A یک زیر مجموعه از مجموعه ی مرجع و متناهی U باشد و $n(A) = 12$ و $n(A') = 8$ باشد. $n(U)$ را تعیین کنید.

۱۳: در یک کلاس ۳۱ نفره ، ۲۰ نفر در درس ریاضی و ۱۳ نفر در درس فیزیک قبول شده اند. اگر ۷ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، تعیین کنید که چند نفر در هر دو درس قبول شده اند.

۱۴ : در یک کلاس ۳۷ نفری ۱۷ نفر عضو کتابخانه و ۲۵ نفر عضو بسیج دانش آموزی هستند. اگر ۳ نفر عضو هیچ یک از این گروه ها نباشند، تعیین کنید چند نفر هم عضو کتابخانه و هم عضو بسیج هستند.

۱۵ : در یک کلاس ۳۱ نفری ، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان عضو این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است؟

الف: تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

ب : تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرود باشند.

ج : تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه تئاتر باشند.

۱۶ : دانش آموزان رشته ی ریاضی یک دبیرستان ۳۲ نفر هستند. اگر ۱۲ نفر عضو برای المپیاد ریاضی و ۴ نفر عضو برای هر دو المپیاد ثبت نام کردند. اگر ۹ نفر داوطلب ثبت نام در هیچ المپیادی نشده باشند، حساب کنید که چند نفر فقط برای المپیاد کامپیوتر ثبت نام کرده اند؟

توجه: برای تعیین تعداد اعداد طبیعی بخش پذیر بر عدد طبیعی k ابتدا اولین و آخرین عدد بخش پذیر بر k را تعیین نموده و آنها را به ترتیب a و b می نامیم ، سپس فرمول زیر را به کار می گیریم.

$$n = \frac{b - a}{k} + 1$$

۱۷ : تعداد اعداد طبیعی سه رقمی بخش پذیر بر ۷ را تعیین کنید.

۱۸ : مجموعه ی $S = \{11, 12, 13, \dots, 99\}$ را در نظر بگیرید.

الف : تعداد اعضای مجموعه ی S که بر ۴ یا ۶ بخش پذیر باشند، را بیابید.

ب : تعداد اعضای مجموعه ی S که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۶ نباشند، را تعیین کنید.

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri