

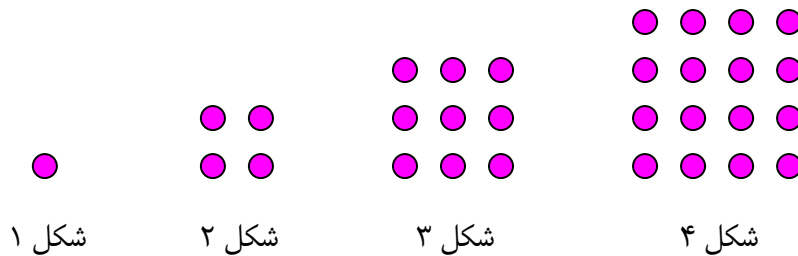
درس سوم : الگو و دنباله

قسمت اول : الگو و دنباله

هر ساختار منظم از اعداد ، اشکال یا تصاویر و را الگو می نامند. اگر تعدادی عدد بر اساس نظم خاصی پشت سرهم قرار گیرند، الگوی بدست آمده را الگوی عددی می نامند. هر یک از اعداد موجود در الگو را جمله می نامیم. جمله ها را با توجه به شماره ی آنها با استفاده از یک حرف اندیس دار نمایش می دهند. برای مثال جمله ی سوم را به صورت a_3 نمایش می دهند.

برای الگوهای عددی می توان یک رابطه ی ریاضی (که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله با شماره ی آن، یا ارتباط هر جمله با جمله ی دیگر می باشد. ^۱) بیان نمود. هر رابطه ی ریاضی دنباله که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله با شماره ی آن باشد را **جمله ی عمومی** الگو می نامند.

مثال : با توجه به شکل های زیر الگویی برای تعداد دایره های بکار رفته در هر شکل بنویسید.

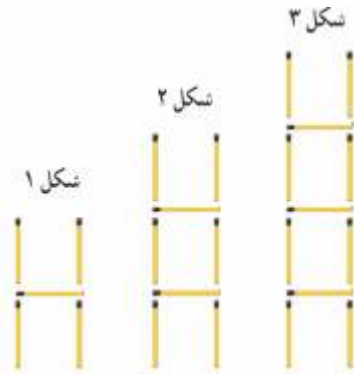


شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	n
تعداد دایره ها						

تمرین ۱ : با توجه به پاسخ شما برای مثال فوق، اگر شکل ها را ادامه دهیم، تعداد دایره ها را در شکل دهم را تعیین کنید.

تمرین ۲ : با توجه به شکل های زیر الگویی برای تعداد چوب کبریت های بکار رفته در هر شکل بنویسید.

^۱ هر رابطه ی ریاضی که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله ی الگو با شماره ی آن جمله باشد را جمله ی عمومی و هر رابطه ریاضی که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله ی الگو با جمله ی دیگر آن الگو باشد را رابطه ی بازگشتی می نامند.



شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد چوب کبریت ها						

در دو تمرین قبل برای هر یک از موارد یک الگوی عددی به دست آوردیم. اگر این الگوهای عددی را به

ترتیب شماره ، پشت سر هم بنویسیم گویند یک **دنباله** تشکیل شده است. مثلاً دنباله ی زیر

$$6 \text{ و } 9 \text{ و } 12 \text{ و } \dots$$

اگر جمله ی عمومی یک الگو معلوم باشد، با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n در آن ، می توان یک جمله از آن را بدست آورد.

مثال : جمله ی عمومی یک الگو به صورت $a_n = 2^n - 3n$ می باشد. جمله ی پنجم این دنباله را به دست آورید.

حل :

$$a_5 = 2^5 - 3(5) = 32 - 15 = 17$$

تمرین ۳ : جمله ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = 3n + 2$ می باشد. جملات این الگو را بنویسید.

تمرین ۴ : جمله ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = \frac{n(n-1)}{2}$ می باشد. جملات این الگو را بنویسید.

قسمت دوم : الگوهای خطی

هر الگو که در آن ، اختلاف بین هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی باشد را الگوی خطی می نامند.

مانند الگوی زیر :

$$4 \text{ و } 7 \text{ و } 10 \text{ و } 13 \text{ و } \dots$$

که اختلاف هر دو جمله ی متوالی آن عدد ۴ می باشد.

تمرین ۵ : آیا الگوی زیر، خطی است؟ چرا؟

... و ۱۶ و ۱۱ و ۷ و ۴

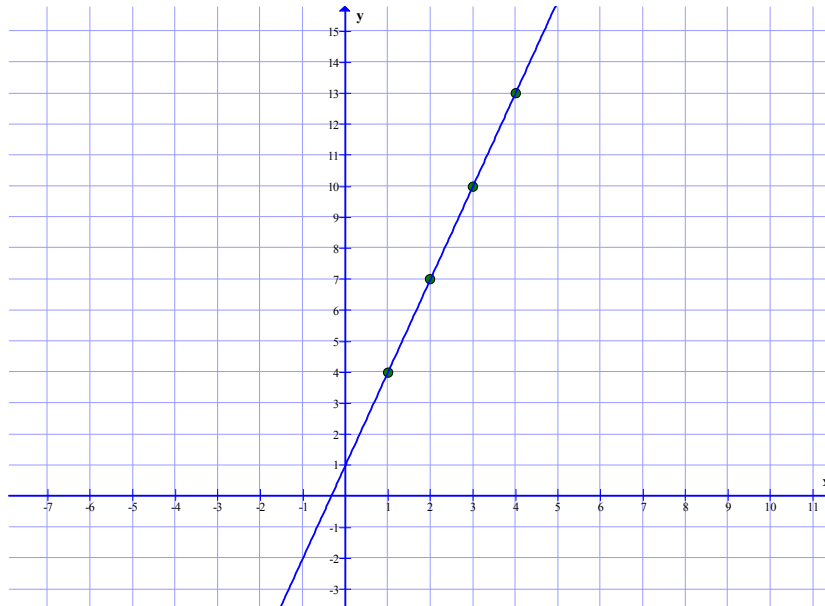
دلیل نامگذاری الگوهایی که اختلاف هر دو جمله ی متوالی آنها عدد ثابت باشد، این است که اگر متناظر با هر جمله ی دنباله ی مربوط به الگوی خطی ، یک نقطه در نظر بگیریم. نقاط به دست آمده در دستگاه مختصات در یک راستا قرار می گیرند. توجه کنید که در این حالت مختصات هر نقطه را به صورت (n, t_n) در نظر بگیرید.

برای مثال در الگوی خطی فوق مختصات نقاط به صورت زیر می باشند.

.... و $(4, 13)$ و $(3, 10)$ و $(2, 7)$ و $(1, 4)$

تمرین ۶ : نقاط متناظر با جملات دنباله ی مربوط به الگوی فوق را در دستگاه مختصات مشخص کرده و راستای آنها را معلوم کنید.

حل : به راحتی می توان نقاط متناظر را منطبق بر یک خط راست^۲ مشاهده کرد.



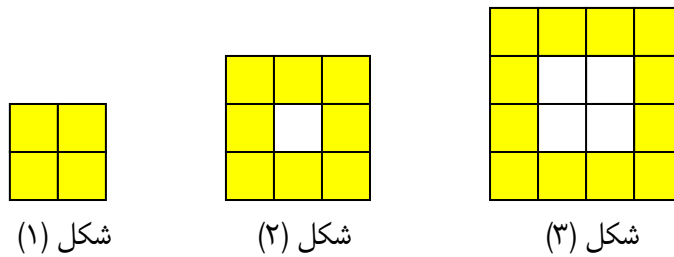
نتیجه : جمله ی عمومی هر الگوی خطی به صورت زیر می باشد که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

$$t_n = an + b$$

^۲ . معادله ی این خط $y = 3x + 1$ است.



تمرین ۷: الگوی مربوط به شکل زیر را با توجه به تعداد مربع های رنگی در هر شکل بنویسید.



شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع های رنگی						

تمرین ۸: توضیح دهید که چرا الگوی مربوط به تمرین قبل، خطی است؟

تمرین ۹: جمله ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = -3n + 5$ جمله ی دهم این الگو را تعیین کنید.

تمرین ۱۰: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشند.

الف: جمله ی عمومی این الگو را بنویسید.

ب: پنج جمله ی اول این الگو را به دست آورید.

قسمت سوم: الگوهای غیر خطی

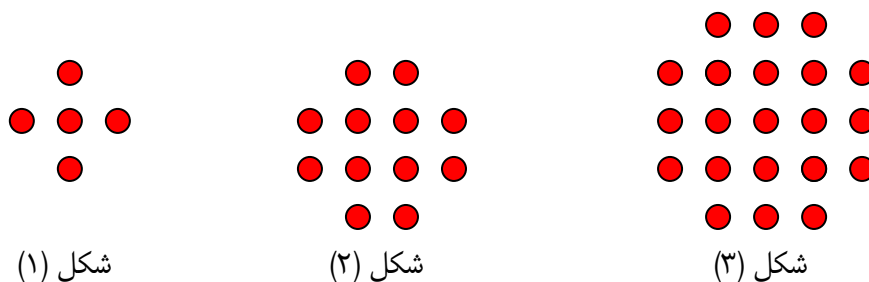
برخی از الگوهای عددی خطی نمی باشند، چنین الگوهایی را الگوهای غیر خطی می نامند. برای مثال الگوی

مربوط به دنباله ی زیر غیر خطی است. (چرا؟)

۵ و ۱۲ و ۲۱ و ۳۲ و ...

با رسم نمودار تصویری، به راحتی الگوی مربوط به چنین الگوهایی را می توان به دست آورد. برای مثال تعداد

دایره های شکل زیر در هر مورد، نشان دهنده ی الگوی فوق است.

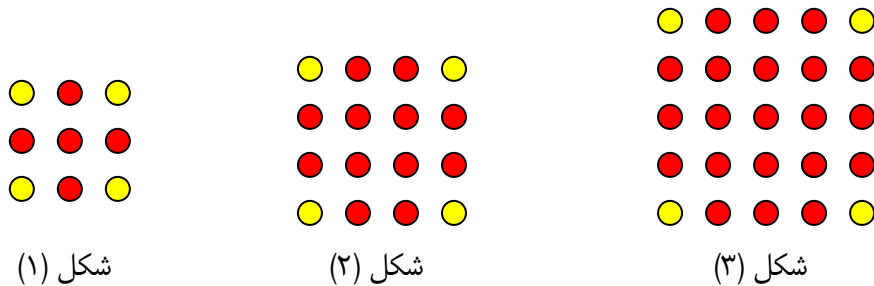


که جمله ی عمومی ، دنباله ی این الگو به صورت زیر است.

$$t_n = n^2 + 4n$$

تمرین ۱۱ : با نگاه مربعی به هر شکل ، الگوی فوق را به دست آورید.

حل : هر شکل را با اضافه کردن چهار دایره به یک مربع تبدیل می کنیم.



حال جدول زیر را تشکیل می دهیم.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد کل دایره ها	$(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$	$(2 + 2)^2 = 4^2 = 16$	$(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$
تعداد دایره های اصلی	$9 - 4 = 5$	$16 - 4 = 12$	$25 - 4 = 21$

لذا تعداد دایره ها را در برای شکل n ام می توان به صورت زیر بدست آورد.

$$t_n = (n + 2)^2 - 4$$

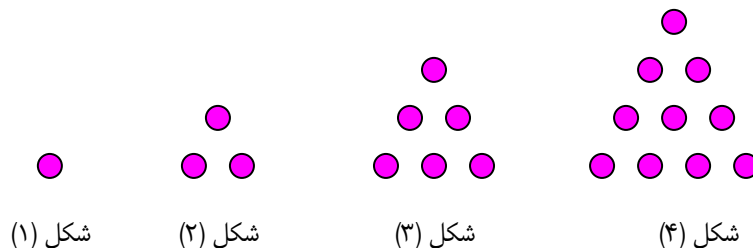
$$\rightarrow t_n = n^2 + 4n + 4 - 4$$

$$\rightarrow t_n = n^2 + 4n$$

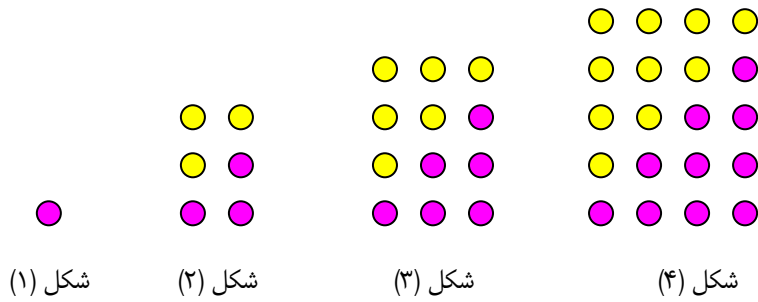
تمرین ۱۲ : الگوی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید. ب : تعداد دایره های هر شکل را بنویسید.

ج : جمله ی عمومی این الگو را بنویسید.



حل : می توانیم از شکل های دوم به بعد با دو برابر کردن نقاط متناظر با هر شکل یک مستطیل ساخت.

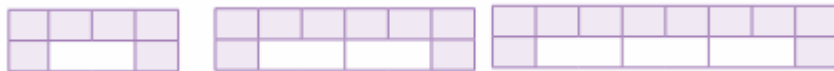


لذا تعداد واقعی دایره های هر الگو به صورت زیر است.

$$t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

تمرین برای حل :

۱۳ : به الگوی هندسی زیر دقت کنید.



الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید.

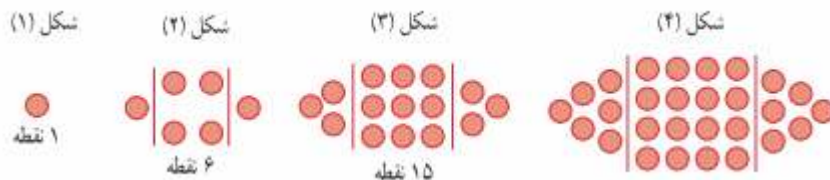
ب : تعداد کاشی های سفید و تیره را برای هر شکل بنویسید.

ج : جمله ی عمومی این الگو را بنویسید.

د : حساب کنید که برای ۱۰۰ کاشی سفید ، چند کاشی تیره لازم است.

هـ : آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ در صورت وجود تعداد کاشی های سفید آن تعیین کنید.

۱۴ : الگوی زیر را در نظر بگیرید.



ب : تعداد نقاط هر شکل را بنویسید.

الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید.

د : حساب کنید که شکل دهم این الگو چند نقطه دارد؟

ج : جمله ی عمومی این الگو را بنویسید.

قسمت چهارم : دنباله

اگر یک سری عدد به ترتیب پشت سر هم نوشته شوند، دنباله تشکیل می شود. هر دنباله هم می تواند دارای الگوی خاصی باشد و هم می تواند بدون الگو باشد. هر یک از اعداد موجود در دنباله را جمله می نامیم. اگر دنباله ای دارای الگوی خاصی باشد، آنگاه رابطه ی موجود در آن را جمله ی عمومی دنباله می نامند.

مثال ۱ : اعداد زیر به همین ترتیب، یک دنباله محسوب می شوند.

$$\dots \text{ و } ۱۴ \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۸ \text{ و } ۵$$

که جمله ی عمومی آن می شود.

$$t_n = 3n + 2$$

مثال ۲ : جمله ی اول یک دنباله برابر ۵ است و برای جملات دوم به بعد رابطه ی زیر برقرار است.

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

پنج جمله ی اول این دنباله را بنویسید.

حل : با توجه به رابطه ی فوق می توان نوشت :

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 11$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 23$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 47$$

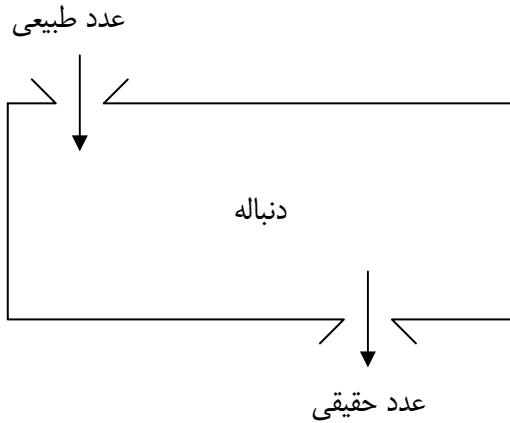
$$a_5 = 2a_4 + 1 = 95$$

لذا این دنباله به صورت زیر است.

$$\dots \text{ و } ۹۵ \text{ و } ۴۷ \text{ و } ۲۳ \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۵$$

برای درک بهتر مفهوم دنباله ی عددی دارای الگو به تعریف زیر دقت کنید.

هر عبارت جبری بر حسب یک حرف (مانند n) را یک دنباله می نامند. هرگاه عدد طبیعی می گیرد و عدد حقیقی می دهد.



برای مثال عبارت $t_n = \frac{n}{2n+1}$ یک دنباله است.

زیرا با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n می توان یک عدد حقیقی به دست آورد. هر کدام از اعداد حاصل را یک جمله می نامند و این عبارت جبری را

جمله ی عمومی دنباله می گویند.

مثال : عبارت $t_n = \frac{3n+1}{n^2}$ یک دنباله است.

$$n = 1 \rightarrow t_1 = \frac{3(1)+1}{(1)^2} = \frac{4}{1} = 4 \quad \text{جمله ی اول}$$

$$n = 2 \rightarrow t_2 = \frac{3(2)+1}{(2)^2} = \frac{7}{4} \quad \text{جمله ی دوم}$$

$$n = 3 \rightarrow t_3 = \frac{3(3)+1}{(3)^2} = \frac{10}{9} \quad \text{جمله ی سوم}$$

$$n = 4 \rightarrow t_4 = \frac{3(4)+1}{(4)^2} = \frac{13}{16} \quad \text{جمله ی چهارم}$$

.....

$$t_n = \frac{3n+1}{n^2} \quad \text{جمله ی عمومی (جمله ی } n \text{ ام)}$$

جملات این دنباله را می توان به شکل زیر نیز نوشت :

$$4 \quad \text{و} \quad \frac{7}{4} \quad \text{و} \quad \frac{10}{9} \quad \text{و} \quad \frac{13}{16} \quad \text{و} \quad \dots$$

توجه : جمله ی عمومی یک دنباله می تواند یک عدد ثابت نیز باشد. مثلاً $t_n = 5$

در این صورت این دنباله را دنباله ی ثابت می نامند و می نویسند.

... و ۵ و ۵ و ۵

تمرین ۱۵ : پنج جمله ی اول دنباله ی زیر را تعیین کنید.

$$t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

تمرین ۱۶ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $t_n = \frac{n+3}{2n+1}$ می باشد. جمله ی چهارم این دنباله را به

دست آورید.

تمرین ۱۷ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = (-1)^{n+1} n^2$ می باشد. جمله ی ششم این دنباله

را به دست آورید.

تمرین ۱۸ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = -3n + 5$ می باشد. تعیین کنید که جمله ی چندم

این دنباله برابر ۱۶- است؟

تمرین ۱۹ : با استفاده از چوب کبریت شکل های زیر ساخته شده است.



الف : تعیین کنید که برای ساختن هر شکل چند چوب کبریت استفاده شده است؟

ب : برای ساختن شکل چهارم چند چوب کبریت نیاز است؟

ج : جمله ی n ام (جمله ی عمومی) دنباله ی مربوط به چوب کبریت ها را بنویسید.

تمرین ۲۰ : جمله ی عمومی دنباله ی زیر را بنویسید.

... و ۱۷ و ۱۲ و ۷ و ۲

تمرین ۲۱ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^2 + 2$ می باشد. چهار جمله ی اول دنباله را

نوشته سپس برای آن الگوی هندسی رسم کنید.

حل:

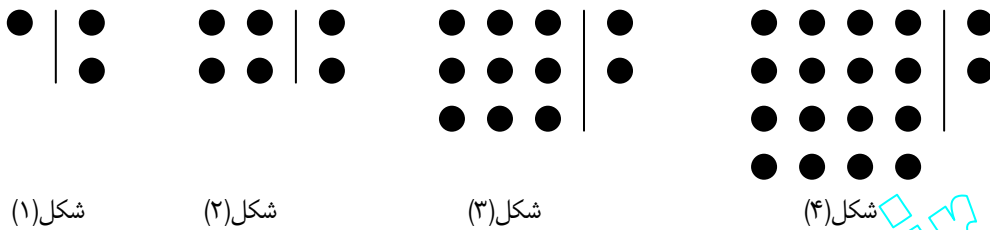
$$n = 1 \rightarrow a_1 = (1)^2 + 2 = 3$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = (2)^2 + 2 = 6$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = (3)^2 + 2 = 11$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = (4)^2 + 2 = 18$$

الگوی هندسی این دنباله به صورت زیر است.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

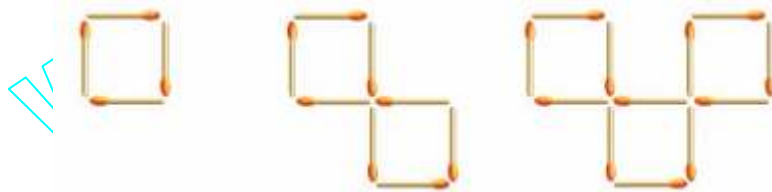
شکل (۴)

تمرین ۲۲: برای دنباله‌ی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

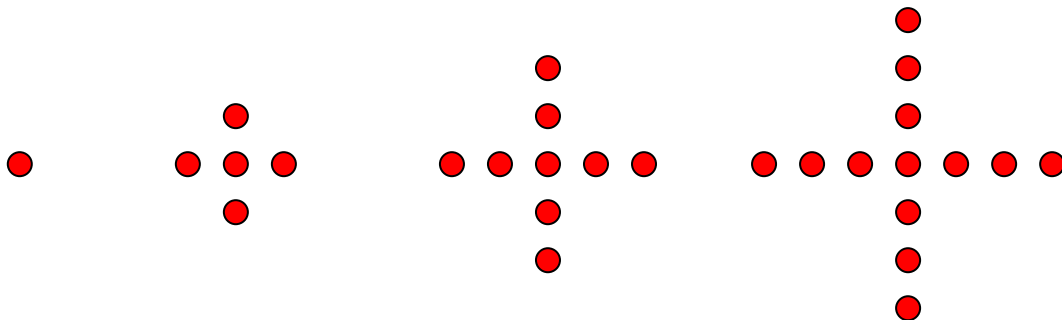
۵ و ۸ و ۱۳ و ۲۰ و ۲۹ و

تمرین برای حل :

۲۳: جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مربوط به شکل‌های زیر که با چوب کبریت ساخته شده است، را بنویسید.



۲۴: جملات دنباله‌ی دارای الگوی زیر می باشند. جمله‌ی بیستم این دنباله را به دست آورید.



۲۵ : جمله ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله ی اول را بنویسید و سپس برای هر یک الگوی هندسی رسم کنید.

الف) $a_n = 3n$ ب) $b_n = 4n - 1$ ج) $c_n = n^2 + n$

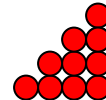
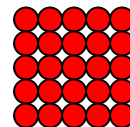
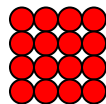
۲۶ : برای دنباله ی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

.... و ۵۱ و ۳۵ و ۲۲ و ۱۲ و ۵

حل : با قدری دقت می توان نوشت.

.... و $36 + 15$ و $25 + 10$ و $16 + 6$ و $9 + 3$ و $4 + 1$

یعنی جملات یک دنباله ی مربعی و یک دنباله ی مثلثی جمع شده اند.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

لذا جمله ی عمومی این دنباله می شود.

$$t_n = (n + 1)^2 + \frac{1}{2}n(n + 1)$$

۲۷ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^2 + 2n - 3$ می باشد. کدام جمله ی این دنباله ۳۲ است؟

۲۸ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = 3^n - 1$ می باشد. حساب کنید که جمله ی چندم این

دنباله ۸۰ است؟

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @mathameri