درس سوّم : دنباله های حسابی و هندسی

قسمت اوّل : دنباله ی حسابی (عددی)

هر دنباله که تفاضل هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی باشد را دنباله ی حسابی می نامند و این عدد ثابت را قدرنسبت می گویند و آن را با d نمایش می دهند[1].

مثال : دنباله ی زیر یک دنباله ی حسابی است، زیرا تفاضل هر دو جمله ی متوالی آن برابر ۴ است؟

.... و ۱۷ و ۱۳ و ۹ و ۵

$a = t_۱ = ۵$ جمله ی اول

$d = ۴$ قدر نسبت

تمرین۱ : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله ی حسابی است؟ چرا ؟

الف) ۵ و ۷ و ۱۰و۱۴و ....

ب) ۵ و ۳ و ۱ و ۱− و ....

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

اگر a جمله ی اوّل و d قدرنسبت و n شماره ی جمله در دنباله ی حسابی باشند، در این صورت می توان نوشت :

$t_۱ = a$ جمله ی اول

$t_۲ = t_۱ + d = a + d$ جمله ی دوم

$t_۳ = t_۲ + d = (a + d) + d = a + ۲d$ جمله ی سوم

$t_۴ = t_۳ + d = (a + ۲d) + d = a + ۳d$ جمله ی چهارم

$t_۵ = t_۴ + d = (a + ۳d) + d = a + ۴d$ جمله ی پنجم

....

$t_n = a + (n - ۱)d$ جمله ی عمومی (nام)

[1] . برای تعیین قدر نسبت در یک دنباله ی حسابی کافی است، از یک جمله ، جمله ی قبل آن را کم کنیم.

تمرین۲ : دنباله ی حسابی زیر را در نظر بگیرید.

..... و ۱۱ و ۷ و ۳

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله ی بیست و یکم این دنباله را بدست آورید.

تمرین۳ : جمله ی پانزده ام دنباله ی حسابی زیر را تعیین کنید.

.... و ۲ و ۵ و ۸

تمرین۴ : در یک دنباله ی حسابی جمله ی هفتم ۲۷ و جمله ی سوّم ۱۱ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله ی اوّل این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله ی عمومی این دنباله را بدست آورید.

تمرین۵ : اگر دو جمله ی غیر متوالی t_j و t_i از یک دنباله ی حسابی معلوم باشند. ثابت کنید که

$$d = \frac{t_i - t_j}{i - j}$$

اثبات : کافی است از جمله ی عمومی دنباله ی حسابی استفاده کنیم.

$$t_n = a + (n - ۱)d$$

$$t_i = a + (i - ۱)d \rightarrow t_i = a + id - d$$
$$t_j = a + (j - ۱)d \rightarrow t_j = a + jd - d$$

$$\rightarrow t_i - t_j = (a + id - d) - (a + jd - d)$$
$$\rightarrow t_i - t_j = a + id - d - a - jd + d \rightarrow a_i - a_j = id - jd$$
$$\rightarrow t_i - t_j = (i - j)d$$
$$\rightarrow d = \frac{t_i - t_j}{i - j}$$

تمرین۶ : در یک دنباله ی حسابی جمله ی پنجم ۱۷ و جمله ی دوازدهم ۵۲ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

تمرین۷ : ثابت کنید که هر دنباله ی حسابی ، دارای الگوی خطی است.

حل : کافی است که نشان دهیم اختلاف هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی است.

$$t_i - t_{i-۱} = (a + (i-۱)d) - (a + (i-۱-۱)d) = a + id - d - a - id + ۲d = d$$

یعنی اختلاف هر دو جمله ی متوالی در هر دنباله ی حسابی برابر d می باشد و لذا دارای الگوی خطی است.

***

واسطه ی حسابی

یک یا چند عدد را واسطه ی حسابی می نامند، هر گاه بین دو جمله از یک دنباله قرار گیرند، تشکیل دنباله ی حسابی بدهند.

برای مثال، اعداد ۲۶ و۲۰ و ۱۴ و ۸ چهار واسطه ی حسابی بین۲ و ۳۲ می باشند، زیرا دنباله ی زیر یک دنباله ی حسابی است.

$$\underline{۲},\underline{۸,۱۴,۲۰,۲۶},\underline{۳۲},...$$

با معلوم بودن دو جمله از یک دنباله ی حسابی و تعداد واسطه ها می توان این واسطه ها را با محاسبه ی قدر نسبت، تعیین نمود.

$$\boxed{d = \frac{b-a}{m+۱}}$$

تمرین۸ : بین دو عدد ۲ و ۳۴ سه واسطه ی حسابی درج کنید.

حل: ابتدا قدر نسبت را تعیین کرده و سپس جملات دنباله را محاسبه می نماییم.

$$d = \frac{b-a}{m+۱} = \frac{۳۴-۲}{۳+۱} = \frac{۳۲}{۴} = ۸$$

$$۲,۱۰,۱۸,۲۶,۳۴,...$$

***

تمرین ۹ : اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، ثابت کنید که : $۲y = x + z$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله ی حسابی تفاضل هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدرنسبت می نامند و آن را با d نمایش می دهند.

$$\left.\begin{array}{l} d = y - x \\ d = z - y \end{array}\right. \rightarrow y - x = z - y \rightarrow ۲y = x + z$$

تمرین۱۰ : در دنباله ی حسابی زیر مقدار t را به دست آورید.

.... و ۲۳ و t و ۷

تمرین۱۲ : در دنباله ی حسابی زیر مقدار x را تعیین کنید.

...... و $۱+۲x$ و $۲+x$ و $۱-x$

تمرین۱۳ : بین ۴ و ۱۰ یک واسطه ی حسابی درج کنید.

حل:

$$۲x = a + b \rightarrow ۲x = (۴) + (۱۰) \rightarrow ۲x = ۱۴ \rightarrow x = ۷$$

$$\Rightarrow ۴,۷,۱۰,.....$$

تمرین۱۴ : اگر زاویه های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله ی حسابی تشکیل شود. نشان دهید که یکی از زاویه های این مثلث ۶۰ درجه است.

***

روش تعیین تعداد جملات دنباله ی حسابی

اگر در یک دنباله ی حسابی جمله ی اول(a)، جمله ی آخر(b) و قدر نسبت (d) معلوم باشند، می توان تعداد جملات را از رابطه ی زیر محاسبه نمود.

$$n = \frac{b-a}{d} + ۱$$

تمرین۱۵ : با توجه به دنباله ی حسابی زیر، تعداد جملات را تعیین کنید.

$$۳,۷,۱۱,...,۵۱$$

حل: واضح است که $a = ۳$ و $b = ۵۱$ و $d = ۴$ در این صورت داریم:

$$n = \frac{b-a}{d} + ۱ = \frac{۵۱-۳}{۴} + ۱ = \frac{۴۸}{۴} + ۱ = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

تمرین ۱۶: تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ را به دست آورید.

حل: به سادگی می توان اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ را به صورت زیر نوشت :

$$۱۴,۲۱, \ldots ,۹۸$$

این اعداد تشکیل یک دنباله ی حسابی با قدر نسبت ۷ می دهند. همچنین جمله‌ی اوّل این دنباله ۱۴ و جمله ی آخر آن ۹۸ است. لذا تعداد جملات دنباله برابر است با:

$$n = \frac{b-a}{d} + ۱ = \frac{۹۸-۱۴}{۷} + ۱ = \frac{۸۴}{۷} + ۱ = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

تمرین۱۷: تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۳ را تعیین کنید.

حل:

$$۱۲,۱۵ ,\ldots,۹۹$$

تعداد جملات $n = \frac{b-a}{d} + ۱ = \frac{۹۹-۱۲}{۳} + ۱ = \frac{۸۷}{۳} + ۱ = ۲۹ + ۱ = ۳۰$

***

قسمت دوّم : دنباله ی هندسی

هر دنباله که خارج قسمت هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی باشد را دنباله ی هندسی می نامند و این عدد ثابت را قدرنسبت می گویند و آن را با r یا q نمایش می دهند[2].

مثال : دنباله ی زیر یک دنباله ی هندسی است، زیرا خارج قسمت هر دو جمله ی متوالی آن برابر ۲− است؟

۳ و ۶− و ۱۲ و ۲۴− و ....

جمله ی اول $a = t_1 = ۳$

قدر نسبت $r = -۲$

[2] . در هر دنباله ی هندسی جمله ی اوّل و قدر نسبت ، نباید صفر باشند. همچنین برای تعیین قدر نسبت در یک دنباله ی هندسی کافی است، یک جمله را بر جمله ی قبل از آن تقسیم کنیم.

تمرین۱۸ : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله ی حسابی و کدام یک هندسی است؟ چرا ؟

الف) ۳ و ۵- و ۱۳- و۲۱- ....

هـ) ۲ و $۲\sqrt{۳}$ و ۶ و $۶\sqrt{۳}$ و ۱۸ و ....

ب) ۵ و ۱۵ و ۴۵ و ۱۳۵ و ....

و) ۲و ۱و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ و ....

ج) ۵ و ۷ و ۱۴ و ۱۶و ۳۲ و ....

ز) ۳ و ۳ و ۳ و ۳و .....

د) $\sqrt{۵}$ و $۲\sqrt{۵}$ و $۳\sqrt{۵}$ و $۴\sqrt{۵}$ و ....

تمرین۱۹ : دو دنباله‌ی هندسی بنویسید که قدر نسبت آنها $\frac{۴}{۵}$ باشد. به نظر شما چند دنباله ی هندسی با این ویژگی می توان نوشت؟

جمله ی عمومی دنباله ی هندسی

اگر a جمله‌ی اوّل و r قدرنسبت و n شماره ی جمله در دنباله ی هندسی باشند، در این صورت می توان نوشت :

$t_۱ = a$ جمله ی اول

$t_۲ = t_۱ r = ar$ جمله ی دوم

$t_۳ = t_۲ r = (ar)r = ar^۲$ جمله ی سوم

$t_۴ = t_۳ r = (ar^۲)r = ar^۳$ جمله ی چهارم

$t_۵ = t_۴ r = (ar^۳)r = ar^۴$ جمله ی پنجم

....

$t_n = ar^{n-۱}$ جمله ی عمومی (nام)

تمرین ۲۰ : دنباله ی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

۳ و۶ و ۱۲ و .....

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله ی پنجم این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین۲۱ : جمله ی پانزده ام دنباله ی هندسی زیر را تعیین کنید.

.... و ۲ و ۴ و ۸

تمرین۲۲ : در یک دنباله ی هندسی جمله ی پنجم ۱۶۲ و جمله ی دوّم ۶ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله ی اوّل این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین۲۳ : اگر دو جمله ی غیر متوالی a_j و a_i از یک دنباله ی هندسی معلوم باشند. ثابت کنید که

$$r = \sqrt[i-j]{\frac{t_i}{t_j}}$$

اثبات : کافی است از جمله ی عمومی دنباله ی هندسی استفاده کنیم.

$$t_n = ar^{n-۱}$$

$$\left.\begin{matrix} t_i = ar^{i-۱} \\ t_j = ar^{j-۱} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{t_i}{t_j} = \frac{ar^{i-۱}}{ar^{j-۱}} \to \frac{t_i}{t_j} = \frac{r^{i-۱}}{r^{j-۱}} \to \frac{t_i}{t_j} = r^{i-۱-j+۱} \to \frac{t_i}{t_j} = r^{i-j}$$

تمرین۲۴ : در یک دنباله ی هندسی جمله ی هفتم ۸۱ و جمله ی چهارم ۳ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

***

واسطه ی هندسی

یک یا چند عدد را واسطه ی هندسی می نامند، هر گاه بین دو جمله از یک دنباله قرار گیرند، تشکیل دنباله ی هندسی بدهند.

برای مثال، اعداد ۵۴ و ۱۸ و ۶ سه واسطه ی هندسی بین ۲ و ۱۶۲ می باشند، زیرا دنباله ی زیر یک دنباله ی هندسی است.

$$\underline{۲}, \underline{۶,۱۸,۵۴}, \underline{\underline{۱۶۲}},...$$

با معلوم بودن دو جمله از یک دنباله ی هندسی و تعداد واسطه ها می توان این واسطه ها را با محاسبه ی قدر نسبت، تعیین نمود.

$$r = \sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}}$$

تمرین۲۵ : بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه واسطه ی هندسی درج کنید.

حل: ابتدا قدر نسبت را تعیین کرده و سپس جملات دنباله را محاسبه می نماییم.

$$r = \sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}} = \sqrt[۳+۱]{\frac{۳۲۴}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱} = ۳$$

$$۴, ۱۲, ۳۶, ۱۰۸, ۳۲۴, ...$$

تمرین۲۶ : اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، ثابت کنید که : $y^۲ = xz$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله ی هندسی تفاضل هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدر نسبت می نامند و آن را با r نمایش می دهند.

$$\begin{matrix} r = \frac{y}{x} \\ r = \frac{z}{y} \end{matrix} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \rightarrow y^۲ = xz$$

تمرین۲۷ : در دنباله ی هندسی زیر مقدار t را به دست آورید.

.... و ۶۳ و t و ۷

تمرین۲۸ : در دنباله ی هندسی زیر مقدار x را تعیین کنید.

...... و $۹x$ و ۶ و x

تمرین۲۹ : بین ۴ و ۹ یک واسطه ی هندسی درج کنید.

حل:

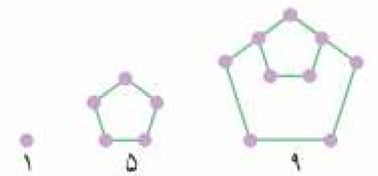
$$x^۲ = ab \rightarrow x^۲ = (۴)(۹) \rightarrow x^۲ = ۳۶ \rightarrow x = \pm\sqrt{۳۶} = \pm۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴, ۶, ۹, ... \\ ۴, -۶, ۹, ... \end{cases}$$

***

تمرین برای حل :

۳۰ : الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دوجمله ی بعدی الگو را با رسم شکل بیابید.

ب : نوع دنباله ی بدست آمده را با ذکر دلیل بیان کنید.

ج : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

د : حساب کنید که جمله ی چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

۳۱ : در یک دنباله ی حسابی مجموع جملات نهم و سیزدهم و بیستم برابر ۷۸ است. جمله ی چهاردهم این دنباله را به دست آورید.

۳۲ : در یک دنباله‌ی حسابی ، مجموع سه جمله‌ی اوّل ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن ۳۹ است. این دنباله را مشخص کنید.

۳۳ : اگر $4m-11$ و $3m+2$ و $m-1$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، مقدار m را به دست آورید.

۳۴ : جملات سوّم و ششم یک دنباله ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. این دنباله را مشخص کنید.

۳۵ : عددی بین ۵ و ۸۰ قرار دهید به طوری که این سه عدد تشکیل یک دنباله ی هندسی بدهند. مسئله چند جواب دارد؟

۳۶ : اگر 9^c و 81^b و 3^a سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، ثابت کنید که $8b = a + 2c$.

۳۷ : در یک دنباله ی هندسی جمله ی پنجم برابر ۶ و جمله ی هشتم برابر ۴۸ است. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

۳۸ : بین دو عدد $2^5 \times 3^9$ و $2^3 \times 3^7$ عددی قرار دهید که دنباله ی هندسی تشکیل شود.

۳۹ : در یک دنباله ی هندسی قدرنسبت ۲ و $t_5 - t_3 = 48$. این دنباله را مشخص کنید.

***

روشی برای محاسبه ی مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی ابتدا از یک

معلّم در کلاس درس گفت، بچه ها حاصل جمع اعداد طبیعی متوالی از یک تا صد را به دست آورید. بر خلاف انتظار معلم، یکی از شاگردان به نام گاوس[3] سریع پاسخ را نوشت. معلم روش کار او را پرسید، او گفت من این روش را برای حاصل جمع اعداد از ۱ تا ۵ توضیح می دهم. حاصل جمع از یک تا صد نیز به همین شکل بدست آورد.

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵$$
$$S = ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱$$
$$\rightarrow ۲S = (۱ + ۵) + (۲ + ۴) + (۳ + ۳) + (۴ + ۲) + (۵ + ۱)$$
$$۲S = ۵ \times ۶ \rightarrow S = \frac{۵ \times ۶}{۲} = ۱۵$$

تمرین ۴۰ : مجموع اعداد طبیعی متوالی از یک تا ۱۰ را به روش گاوس به دست آورید.

نتیجه :

$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

تمرین برای حل :

۴۱ : مجموع اعداد طبیعی متوالی از یک تا ۱۰۰ را به دست آورید.

۴۲ : حاصل ضرب بیست جمله‌ی اوّل دنباله ی هندسی زیر را محاسبه کنید.

۲ و ۴ و ۸ و ....

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @mathameri

[3]. گاوس، نام یک ریاضی دان آلمانی است. گفته می شود که او وقتی آموزگارش، در دبستان، برای سرگرم کردن شاگردان به آنان گفت شماره های ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع کنند. گاوس پاسخ درست را در چند ثانیه با به کارگیری یک بینش ریاضیاتی چشمگیر به دست آورد.