

فصل ۱

مجموعه ها و دنباله ها

۱.۱ مجموعه ها

۱.۱.۱ مجموعه های اعداد

در این بخش ابتدا مجموعه‌ی اعدادی را که تابحال شناخته‌اید و نحوه پیدایش آنها را بررسی کرده و سپس مجموعه‌ها را در حالت کلی بررسی میکنیم و عملیات‌هایی چون اجتماع، اشتراک و تفاضل را بر آنها تعریف خواهیم کرد. تاریخچه‌ی دقیقی از نحوه شکل‌گیری و تکامل اعداد در دسترس نیست. از آثار بجای مانده از گذشتگان تنها می‌توان حدس زد که چگونه از شمارش در کارهای روزمره‌ی خود استفاده می‌کرده‌اند. خطوط موازی کوچک بر استخوان ران یک گاو که در کنگو در قاره‌ی آفریقا یافت شده است متعلق به حدود ۸۰۰۰ سال پیش است. آنها برای شمارش به ازای هر واحد شمارش (مثلا شمارش فرزندان یا گوسفندان یا افراد قبیله و...) یک خط بر استخوان یا چوب حک می‌کرده‌اند. گاهی نیز از سنگریزه برای شمارش استفاده کرده‌اند. شاید ابتدایی‌ترین راه شمارش استفاده از انگشتان دست باشد. در دسترس بودن انگشتان و خم کردن یک انگشت به ازای شمارش یک چیز کار ساده‌ایست و دلیل استفاده بشر از مبنای ۵ و ۱۰ به همین علت است. حتی مبنای ۲۰ هم در میان قوم مایاها در آمریکای جنوبی رواج داشته و یادآور دورانی است که بشر پابرهنه بوده است. در این دستگاه هر مرد معادل عدد ۲۰ بوده است. (چرا؟) ابتدایی‌ترین مجموعه مورد استفاده بشر همانطور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی بوده است. مجموعه اعداد طبیعی بصورت زیر است:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

لازم است خاصیتی جالب را در مورد مجموعه \mathbb{N} معرفی کنیم. چنانچه دو عدد دلخواه از اعداد طبیعی را باهم جمع کنیم حاصل باز هم عدد طبیعی است بعنوان مثال: $1 + 3 = 4 \in \mathbb{N}$ در حالت کلی اگر a, b دو عدد طبیعی باشند واضح است که $a + b$ نیز عددی طبیعی است. این خاصیت را اصطلاحاً بسته بودن \mathbb{N} نسبت به عمل $+$ می‌نامیم.

مثال ۱.۱. آیا مجموعه \mathbb{N} نسبت به عمل ضرب بسته است؟ نسبت به عمل تفریق چطور؟ نسبت به عمل تقسیم چطور؟

تمرین ۱.۱. مجموعه $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این مجموعه نسبت به ضرب بسته است نسبت به جمع چطور؟ نسبت به تقسیم چطور؟

تمرین ۲.۱. مجموعه $B = \{-1, 0, 1\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه نسبت به جمع بسته است؟ نسبت به ضرب چطور؟

تمرین ۳.۱. فرض کنید مجموعه ای چون A داریم بطوریکه می دانیم این مجموعه نسبت به اعمال جمع و تفریق بسته است و شامل عدد یک نیز هست. ثابت کنید که این مجموعه A همان مجموعه اعداد صحیح است. حال با توجه به تعریف بسته بودن می توان متوجه ضعف مجموعه اعداد طبیعی شد. \mathbb{N} نسبت به تفریق بسته نیست. این بزرگترین ضعف \mathbb{N} است. زمانی که بشر برای معاملات خود متوجه شد که مقروض بودن را نمی توان با اعداد طبیعی نمایش داد خلاء اعداد صحیح را حس کرد و مجبور شد اعداد صحیح را بکار بگیرد.

تعریف ۱.۱. مجموعه اعداد صحیح را که با نماد \mathbb{Z} نشان می دهیم عبارتست از :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

اینکه اعداد صحیح را با حرف \mathbb{Z} نمایش می دهند به خاطر کلمه *Zahlen* می باشد که لغتی آلمانی است. اعداد صحیح نیز به نوبه ی خود دارای ضعف بسته نبودن نسبت به عمل تقسیم بود به عنوان مثال دقت کنید که :

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \notin \mathbb{Z}$$

برای برطرف کردن این ضعف \mathbb{Z} مجموعه ای مورد نیاز بود که شامل تمام کسرهای ممکن که می توان به کمک اعداد صحیح ساخت باشد. این مجموعه را اعداد گویا می نامیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۱. مجموعه اعداد گویا را که با نماد \mathbb{Q} نشان می دهیم (\mathbb{Q} حرف اول کلمه *Quotient* به معنای خارج قسوت) بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا کوچکترین مجموعه ای است که نسبت به هر چهار عمل اصلی $+$, $-$, \times , \div بسته است. با این حال همین مجموعه هم بی نقص نیست. در واقع پیروان مکتب فیثاغورس که به فیثاغورثیان معروف بودند اولین بار به این حقیقت نگران کننده پی بردند که قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی توان بصورت کسر نوشت. فیثاغورثیان که ایمان کامل به اعداد گویا داشتند و آنرا بی عیب و نقص می پنداشتند از این کشف نگران شدند و تا سالها آن را پنهان نگاه داشته بودند و حتی داستانی نقل کرده اند که دو تن از پیروان این مکتب در یک کشتی عازم سفر بودند و یکی از آنها دیگری را از این راز مهم آگاه کرد و گفت پس از سفر آن را با دیگران در میان خواهم گذاشت. همین امر باعث شد تا دوستش او را به دریا پرتاب کند.

اکنون می دانیم که قطر مربعی به ضلع یک عددی غیر گویا یا اصم است. این عدد عددی نیست جز $\sqrt{2}$. می توان ثابت کرد که $\sqrt{2}$ را نمی توان بصورت یک کسر نوشت بعبارت بهتر به ازای هر دو عدد صحیح دلخواه a, b همواره داریم: $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$

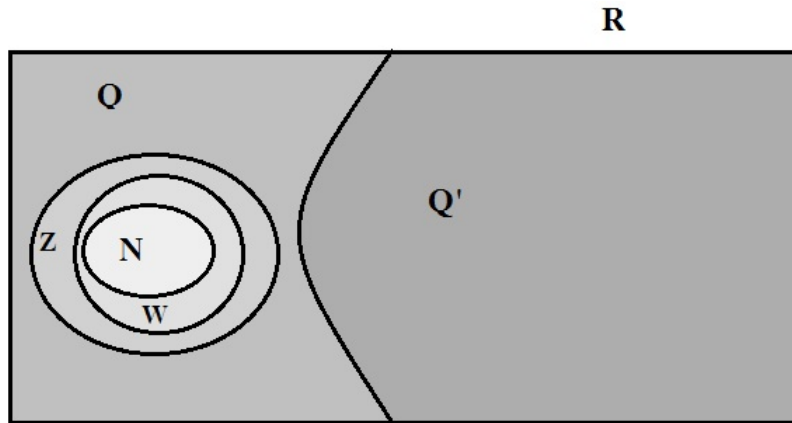
تمرین ۴.۱. اگرچه هنوز ابزار لازم برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ را در اختیار ندارید اما تلاش برای اثبات آن خالی از لطف نیست. برای اینکه ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است ثابت کنید $\sqrt{2}$ گویا نیست. بدین منظور تصور کنید که اگر $\sqrt{2}$ بخواهد گویا باشد پس باید داشته باشیم: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و فرض کنید که کسر حاصل تحویل ناپذیر است (کسری که صورت و مخرج آن دیگر ساده نشود). با به توان ۲ رساندن طرفین و استفاده از خاصیت زوج بودن به عبارتی برسید که با فرض سازگار نیست. (این روش اثبات غیرمستقیم یا همان برهان خلف نام دارد).

مجموعه اعداد گنگ را با نماد \mathbb{Q}' نشان می دهیم. یکی دیگر از اعداد گنگی، که قدمت زیادی دارد عدد π است. نسبت محیط دایره به قطر آن عدد π است. داستان پیدایش عدد پی با مسأله تربیع دایره در ارتباط تنگاتنگ است. برای آشنایی با تربیع دایره می توانید همین «تربیع دایره» را در گوگل جستجو کنید. محاسبه مقدار تقریبی عدد پی نیز داستان جالبی دارد. چنانچه علاقمند هستید می توانید به کتاب تاریخ ریاضیات نوشته هاوارد ایوز صفحه ۱۱۵ مراجعه کنید. (نسخه pdf این کتاب دو جلدی در سایت کتابناک موجود و رایگان است). در اینجا بد نیست به تقریبی از عدد پی اشاره کنیم که توسط غیاث الدین جمشید کاشانی منجم و ریاضی دان دربار الغ بیگ بدست آمده است. وی توانست عدد پی را تا شانزده رقم اعشار بدرستی تقریب کند. این رکورد تا حدود دویست سال پابرجا بود تا سرانجام در سال ۱۶۱۰ میلادی توسط لودولف وان کولن ریاضی دان اهل آلمان شکسته شد. وی عدد پی را تا ۳۵ رقم تقریب کرد. الغ بیگ گورکانی نوه تیمور گورکانی و پسر شاهرخ گورکانی بود. وی بر خلاف پدر بزرگش که یک خونریز تمام عیار بود، به هنر و دانش اهتمام ویژه ای داشت. وی حتی در نجوم تبحر داشت و کمی هم اطلاعات ریاضی نزد جمشید کاشانی فرا گرفت. تاکنون با مجموعه های $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ آشنا شده اید. رابطه بین سه مجموعه اول بصورت زیر است.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

در این رابطه مجموعه \mathbb{Q}' چه جایگاهی دارد؟ حال می توان مجموعه اعداد حقیقی را هم تعریف کرد.

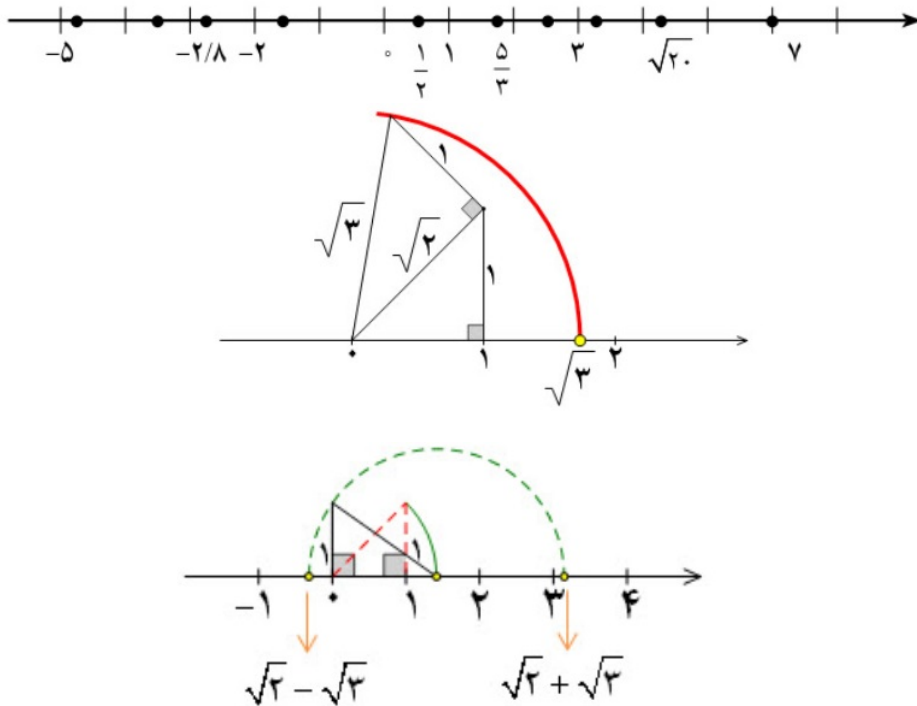
تعریف ۳.۱. مجموعه اعداد حقیقی را که با نماد \mathbb{R} نشان می دهیم برابر است با: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. (علامت \cup به معنای اجتماع است که در کلاس نهم تا حدودی با آن آشنا شده اید).



شکل ۱.۱: رابطه‌ی بین مجموعه اعداد

مجله ریاضی: مجموعه اعداد حقیقی نیز به شکلی دیگر (نه بسته بودن نسبت به اعمال اصلی) دارای نقصان است. معادلات درجه دوم را هنوز نخوانده‌اید با اینحال معادلات درجه دومی وجود دارند که جوابهای آن معادله دیگر عددی حقیقی نیست. مثل معادله $x^2 + 1 = 0$ که جواب آن عدد عجیبی است. در واقع جواب این معادله عددی است بنام i با این ویژگی عجیب که $i^2 = -1$. بله این اعداد عجیب اعداد مختلط نام دارند و با نماد \mathbb{C} نشان داده می‌شوند. برای مطالعه بیشتر ویکی‌پدیای فارسی را ملاحظه کنید.

متناظر به هر عدد حقیقی نقطه‌ای روی محور اعداد حقیقی وجود دارد. در اشکال زیر موقعیت برخی از اعداد روی محور نشان داده شده است.



شکل ۲.۱: نمایش اعداد گویا و گنگ روی محور اعداد

اگر به شکل ۲.۱ بدقت نگاه کنید متوجه خواهید شد که این شکل راه حل بسیار زیبایی را به شما معرفی

کرده است و ارزش آن بیش از یک شکل ساده است. سرانجام آخرین مجموعه از اعداد را که بزرگتر از \mathbb{N} و کوچکتر از \mathbb{Z} است را معرفی می‌کنیم. مجموعه اعداد حسابی که با نماد \mathbb{W} نشان می‌دهیم عبارتست از $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

تمرین ۵.۱. جاهای خالی را با مجموعه مناسب کامل کنید.

$$a) \mathbb{R} - \mathbb{Q} =$$

$$b) \mathbb{Z} - \mathbb{W} =$$

$$c) \mathbb{N} - \mathbb{W} =$$

$$d) \mathbb{Q}' - \mathbb{Q} =$$

۲.۱.۱ بازه های اعداد حقیقی

برای ورود به مطلب و آشنایی با بازه ها دو نامعادله زیر را در نظر بگیرید:

$$-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \quad (1) \quad , \quad 3x+1 < 7 \quad (2)$$

با حل این دو نامعادله مجموعه جواب معادله شماره ۱ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$ و مجموعه جواب معادله شماره ۲ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. آیا می‌توان مجموعه جواب را با نمادی ساده تر از مجموعه های فوق نوشت؟ جواب مثبت است. بازه ها جوابگوی ما برای این ساده نویسی هستند. مجموعه جواب نامعادله ۱ بازه ی $[-2, 4)$ است و مجموعه جواب نامعادله شماره ۲ بازه ی بی کران $(-\infty, 2)$ است. حال به سراغ تعریف بازه ها می‌رویم.

تعریف ۴.۱. یک بازه ، زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است که بصورت های زیر تعریف می‌شود:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{بازه ی باز}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{بازه ی نیم باز}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{بازه ی بسته}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad \text{بازه ی باز بی کران}$$

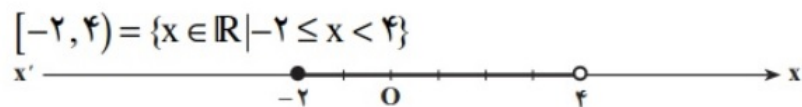
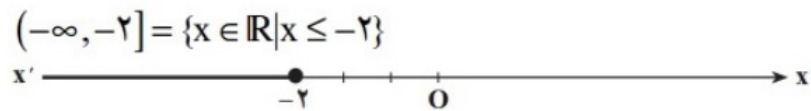
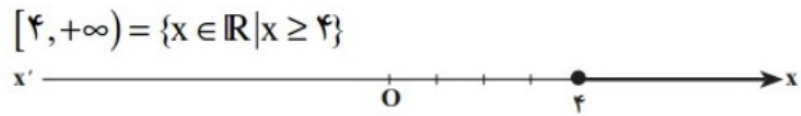
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad \text{بازه ی نیم باز بی کران}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad \text{بازه ی باز بی کران}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \quad \text{بازه ی نیم باز بی کران}$$

اغلب بجای اصطلاح نیم باز از اصطلاح نیم بسته هم استفاده میشود. نماد ∞ که بی نهایت خوانده می‌شود (مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت) یک عدد حقیقی نیست فقط نمادی است برای اینکه نشان دهیم بازه بی کران است. یعنی هر عددی خواه بسیار بزرگ یا خواه بسیار کوچک در این بازه ها می‌تواند وجود داشته باشد.

در اشکال زیر چند بازه را بعنوان مثال روی محور اعداد حقیقی نمایش داده ایم.



مثال ۲.۱. درست و نادرست را بررسی کنید و جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

$$(a) : 3 \in [-1, \sqrt{10})$$

$$(b) : \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1]$$

$$(c) : \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$$

$$(d) : -1395 \in (-\infty, -1396)$$

$$(e) : \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \in [3, 4]$$

$$(f) : \emptyset \subseteq (-\pi, \pi)$$

$$(g) : (-\infty, 3) \cap (-2, 0) \cap (-1, +\infty) =$$

$$(h) : \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) =$$

$$(m) : \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$(n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) =$$

تمرین ۶.۱. درست و نادرست را مشخص کنید و جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} (a) : [0, 1) \subset \mathbb{Q} & \quad (b) : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}' & \quad (c) : \sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{Q}' \\ (e) : \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' & \quad (f) : \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{W} & \quad (g) : \frac{1 - \pi}{2} \in (-1, +\infty) \\ (h) : \sqrt{-1} \in \mathbb{R} & \quad (m) : \sqrt[3]{-27} \in \mathbb{Q} & \quad (n) : (-\infty, \sqrt{3}) \cap (0, \frac{\pi}{2}) = \\ (d) : \sqrt{841} \in \mathbb{Q} & & \end{aligned}$$

۳.۱.۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

در این بخش می خواهیم در مورد تعداد اعضای یک مجموعه صحبت کنیم.

تعریف ۵.۱. مجموعه ای چون A را یک مجموعه متناهی (باپایان) گوئیم هرگاه تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد حسابی نمایش داد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را با نماد $|A|$ نمایش دهیم متناهی بودن یک مجموعه چون A به معنای آن است که به ازای یک عدد حسابی مثل k داریم $|A| = k$. در غیر اینصورت مجموعه را نامتناهی (بی پایان) گوئیم.

مثال ۳.۱. مجموعه های زیر را بررسی کنید و متناهی یا نامتناهی بودن آنها را معین کنید.

- ۱ - مجموعه دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی در کشور.
- ۲ - تعداد اعداد ۳ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰
- ۳ - تعداد اعداد اول.
- ۴ - مجموعه اعداد طبیعی فرد.
- ۵ - مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان بالغ.
- ۶ - مجموعه دایره هایی که مرکزشان مبدا مختصات است.
- ۷ - مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی.
- ۸ - مجموعه درختان جنگل آمازون.
- ۹ - مجموعه کسر هایی که مثبت هستند و صورتشان ۱ است.
- ۱۰ - بازه $(0, 2)$.
- ۱۱ - مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب.

فعالیت

- الف) بین 0 و 1 دو عدد گویای دلخواه بنویسید.
- ب) در بازه $(0, 1)$ چهار عدد گویای دیگر بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.
- پ) آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟
- ت) در مورد منتهای یا نامنتهای بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
- ث) در مورد منتهای یا نامنتهای بودن Q چه می‌توان گفت؟
- ج) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامنتهای باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

نتیجه فعالیت بالا بیان می‌کند که اگر مجموعه‌ای چون A دارای زیرمجموعه‌ای چون B باشد ($B \subseteq A$) به طوری که B نامنتهای باشد آنگاه بناچار خود A نیز نامنتهای است. در نتیجه چون اعداد گویای واقع در بازه $(0, 1)$ نامنتهای هستند پس Q هم نامنتهای است و به همین ترتیب \mathbb{R} هم نامنتهای است. ($Q \subseteq \mathbb{R}$) پرسش: با توجه به شرایط بالا اگر A منتهای باشد در مورد B چه می‌توان گفت؟

یادداشت تاریخی: اعداد اول یکی از قدیمی‌ترین مباحث در ریاضیات می‌باشد. در دوره معاصر نیز یکی از جذابترین شاخه‌های رشته ریاضیات نظریه اعداد است که به بررسی اعداد صحیح و خواص آن می‌پردازد. حدود ۳۵۰ سال قبل از میلاد مسیح اقلیدس ثابت کرد که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. عبارت بهتر ثابت کرد مجموعه اعداد اول نامنتهای است. جالب است بدانید که این اثبات به روش برهان خلف انجام می‌شود و هنوز در طی سالیان سال نتوانسته‌اند اثباتی ساده‌تر از اثبات اقلیدس بیابند.

تمرین ۷.۱. منتهای یا نامنتهای بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

- ۱ - مجموعه کلمات بکار رفته در کتاب ریاضی دهم.
- ۲ - مجموعه مضارب مثبت عدد ۵.
- ۳ - مجموعه پلنگ‌های زنده در قاره آفریقا.
- ۴ - مجموعه تمام زیر مجموعه‌های \mathbb{N} .
- ۵ - مجموعه تمام اعدادی که در تقسیم بر ۵ باقیمانده ۱ دارند.
- ۶ - مجموعه باقی مانده‌ها در تقسیم اعداد طبیعی بر عدد ۷.
- ۷ - مجموعه تمام موبایل‌های تولید شده در ۲۰ سال گذشته.

بیشتر بدانیم: همانطور که از کلاس نهم می دانید چنانچه دو مجموعه دارای تعداد اعضای برابر باشند آن دو مجموعه لزوماً برابر نیستند. مثلاً دو مجموعه

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\}$$

هر دو دارای سه عضو می باشند اما برابر نیستند. اما برابر بودن تعداد اعضا باعث می شود اصطلاح دیگری در مورد این دو مجموعه بکار رود. اگر بتوان بین اعضای دو مجموعه یک تناظر یک به یک برقرار کرد در این صورت گویند دو مجموعه هم ارزی یا هم عدد هستند. منظور از تناظر یک به یک این است که به هر عضو مجموعه A یک و فقط یک عضو از مجموعه B نظیر کرد و بعکس. در مورد مثال بالا تناظر بدین صورت است که :

$$1 \longleftrightarrow a \quad 2 \longleftrightarrow b \quad 3 \longleftrightarrow c$$

توجه داشته باشید که این تناظر باید اصطلاحاً یک به یک باشد. مثل تناظر بین انسان ها و اثر انگشتشان. هر انسانی یک اثر انگشت دارد و هر اثر انگشتی فقط متعلق به یک انسان است. حال موضوع زمانی جالب تر می شود که بدانید \mathbb{N} و \mathbb{Z} هم هم ارزی یا هم عدد هستند. برای ایجاد تناظر به این صورت عمل می کنیم که اگر n عددی طبیعی باشد دو حالت رخ می دهد یا زوج است یا فرد. اگر زوج بود آن را به $\frac{n}{2}$ نظیر می کنیم و اگر فرد بود آنرا به $\frac{1-n}{2}$ نظیر می کنیم. می توان ثابت کرد که این تناظر یک به یک است. چند مورد ابتدای این تناظر را در زیر می بینید.

$$1 \longleftrightarrow \frac{1-1}{2} = 0$$

$$2 \longleftrightarrow \frac{2}{2} = 1$$

$$3 \longleftrightarrow \frac{1-3}{2} = -1$$

$$4 \longleftrightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$$5 \longleftrightarrow \frac{1-5}{2} = -2$$

در فصول بعدی که مفهوم تابع را درس خواهیم داد راحت تر می توان ضابطه تناظر را بیان کرد.

۲.۱ متمم یک مجموعه

۱.۲.۱ مجموعه مرجع

جهت روشن شدن لزوم در نظر گرفتن یک مجموعه بعنوان مجموعه مرجع مجموعه $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. اگر از شما بخواهند که اعضای مجموعه را بنویسید چه اعدادی را خواهید نوشت؟ جوابهای احتمالی شما بصورت زیر است:

$$(۱) \quad A = \{1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد طبیعی را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۲) \quad A = \{0, 1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد حسابی را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۳) \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد صحیح را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۴) \quad A = [-2, 3] \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد حقیقی را در نظر گرفته باشید}$$

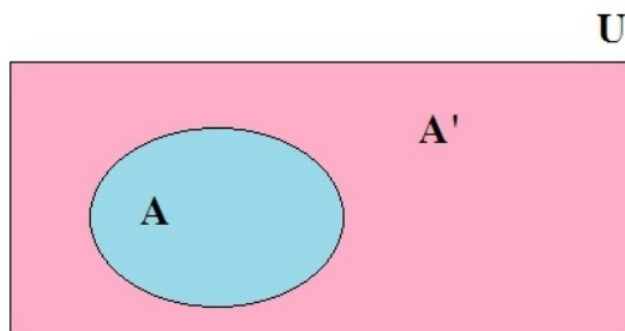
پس همانطور که مشاهده می کنید برای مجموعه می توان حالت های مختلف را در نظر گرفت و جواب یکتایی بدست نمی آید و این ابهام در تعریف مجموعه A چندان خوشایند نیست. چنانچه مجموعه را بصورت :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

تعریف کنیم دیگر تکلیف روشن است و می دانیم جواب چیست. در اینجا نبود یک مجموعه مرجع باعث بروز چنین مشکلی شد. اما با در نظر گرفتن مجموعه های $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}, \mathbb{N}$ بترتیب مجموعه های $1, 2, 3, 4$ بدست می آیند. پس با تغییر مجموعه بعد از علامت \in اعضای مجموعه نیز تغییر می کنند. چنین مجموعه هایی را مجموعه مرجع گویند.

تعریف ۶.۱. در هر مبحث مجموعه ای که همه مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می نامند و با حرف U نشان می دهند. در این حالت اگر $A \subseteq U$ مجموعه ای دلخواه باشد، $U - A$ را با نماد A' نشان می دهیم و آن را متمم A می نامیم. به عبارت بهتر A' شامل اعضای از U است که در A نیستند.

در شکل زیر رابطه بین مجموعه های A, A', U دیده می شود.



بطور معمول در هر بحثی مجموعه مرجع را معرفی می‌کنند. چنانچه در بحثی مجموعه مرجع را معرفی نکردیم شما می‌توانید بزرگترین مجموعه موجود را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید. وقتی صحبت از اعداد باشد بزرگترین مجموعه ممکن همان \mathbb{R} است. در حالت کلی برای نوشتن یک مجموعه به صورت استاندارد می‌نویسیم $\{x \text{ دارای خاصیت } p(x) \text{ است} \mid x \in U\}$ در این جا U مجموعه مرجع است و $p(x)$ خاصیتی است که x دارای آن است.

یادداشت تاریخی: آیا مجموعه مرجع به معنای مطلق وجود دارد؟ یعنی مجموعه‌ای چون U به طوری که شامل هر مجموعه‌ای که شما تصور کنید باشد. تا ابتدای قرن بیستم وجود چنین مجموعه‌ای فرضی مسلم بود. برتراند راسل ریاضی دان و فیلسوف نامدار انگلیسی در ابتدای قرن بیستم ثابت کرد چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. پارادوکس راسل در همین ارتباط است و برای مطالعه بیشتر می‌توانید در گوگل عبارت پارادوکس راسل را جستجو کنید.

مثال ۴.۱. متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$U = \mathbb{N}$$

$$B = \mathbb{N}$$

$$U = \mathbb{Z}$$

$$C = \mathbb{N}$$

$$U = \mathbb{W}$$

$$D = \mathbb{Q}$$

$$U = \mathbb{R}$$

$$E = [-\infty, -2)$$

$$U = \mathbb{R}$$

$$F = [-\infty, -2)$$

$$U = (-\infty, 0)$$

$$G = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

$$U = [0, 1]$$

$$H = \mathbb{Z}$$

$$U = \mathbb{R}$$

مثال ۵.۱. اگر U مجموعه مرجع دلخواهی باشد و $A \subseteq U$ باشند طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$a) A \cup A' =$$

$$b) A \cap A' =$$

$$c) \emptyset' =$$

$$d) U' =$$

مثال ۶.۱. فرض کنید $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q\}$ و $A = \{a, e, g, h, m, n, l\}$ و $B = \{a, b, c, d, f, g, l\}$ باشند. جدول زیر را کامل کنید.

$(A')'$	{	}
$A' \cap B'$	{	}
$A' \cup B'$	{	}
$(A \cap B)'$	{	}
$(A \cup B)'$	{	}
$A \cap B'$	{	}
$A - B$	{	}

۲.۲.۱ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

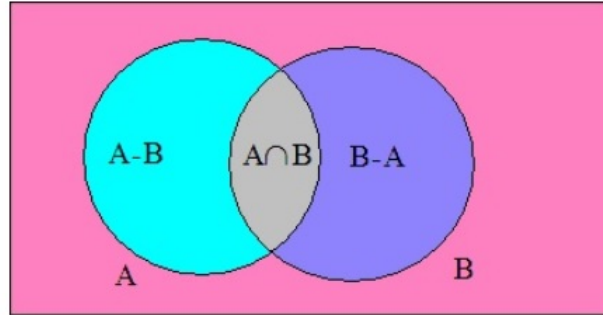
فرض کنید تعداد اعضای مجموعه های A, B معلوم باشد. می خواهیم تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را بر حسب $n(A)$ و $n(B)$ بیابیم. (تعداد اعضای یک مجموعه را هم با نماد $|A|$ و هم با نماد $n(A)$ نشان می دهند) ممکن است تصور کنید که جواب واضح است و برابر است با عدد $n(A) + n(B)$ اما این نادرست است. چرا که اگر $U = \mathbb{N}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ آنگاه:

$$4 = n(A \cup B) \neq n(A) + n(B) = 3 + 3 = 6$$

دلیل آن ها ساده است. هنگامی که می نویسیم $n(A) + n(B)$ در واقع اعضای مشترک دوبار شمارش شده اند. یعنی $n(A \cap B)$ یکبار در هنگام شمارش اعضای A و یک بار در شمارش اعضای B حساب شده است. لذا برای یافتن تعداد درست باید یکبار $n(A \cap B)$ را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم. پس جواب درست بصورت زیر است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

به شکل زیر دقت کنید. می توان درستی رابطه فوق را از روی نمودار ون زیر تحقیق کرد.



تذکر مهم: از روی شکل فوق روابط جالب دیگری بین اعضای مجموعه های $A - B$ و $A \cap B$ بدست می آید. این روابط بصورت زیر هستند که خودتان براحتی می توانید صحت آنها را تحقیق کنید.

$$n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = n(A \cup B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

درس را با ذکر چند مثال پی میگیریم.

مثال ۷.۱. در یک کلاس مدرسه ۳۰ دانش آموز وجود دارد. ۲۲ نفر از آنها فوتبال بازی می کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می کنند. چند نفر هم فوتبال بازی می کنند و هم والیبال؟

مثال ۸.۱. در یک جمع ۴۰ نفره ۲۰ نفر به چای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه. چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به چای علاقه ندارند.

مثال ۹.۱. از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد؟ چند عدد بر ۵ بخش پذیر است اما بر ۷ بخش پذیر نیست؟ چند عدد نه بر ۵ بخش پذیر است نه بر ۷؟

تمرین ۸.۱. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۱ نفر به زبان انگلیسی، ۱۷ نفر به زبان فرانسه و ۱۰ نفر به هر دو زبان می توانند صحبت کنند. در این کلاس چند نفر هستند که به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمی کنند؟

تمرین ۹.۱. در یک مدرسه، ۲۳ نفر در تیم فوتبال و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضو هستند. ۴ نفر نیز در هر دو تیم عضو هستند. چند نفر از دانش آموزان مدرسه، در دست کم یکی از ۲ تیم ورزشی مدرسه هستند؟

تمرین ۱۰.۱. در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته :

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.

(ب) فقط از شرکت A خرید داشته اند.

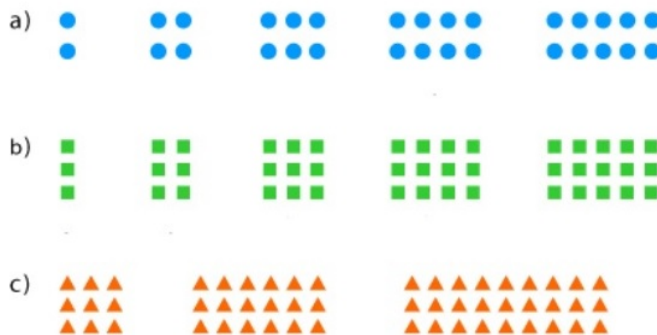
پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند.

۳.۱ الگو و دنباله

۱.۳.۱ الگو

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده و یا مارپیچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشد. ریاضیات به عنوان ملکه علوم، یکی از رسالت های مهم خود را مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنها می داند. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارتست از علم مطالعه الگوها. در این بخش برخی الگوهای هندسی و نیز الگوهای عددی متناظر با آنها مورد بررسی قرار می گیرند.

مثال ۱۰.۱. به شکل زیر دقت کنید در هر مورد a, b, c چه ارتباطی بین جملات است؟ در هر مورد چند جمله بعدی را بنویسید. آیا در حالت کلی می توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟ (رسم بر اینست که جمله اول را با نماد a_1 جمله دوم را با نماد a_2 و جمله n ام را با a_n نشان دهند. شماره های جمله که به شکل کوچک و پایین حرف انگلیسی نوشته شده اند را اندیس گویند)

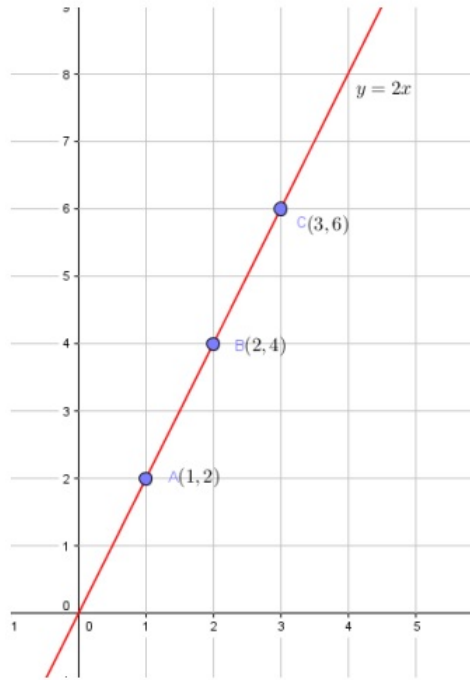


همانطور که در مثال بالا دیده شد اختلاف هر جمله از جمله قبلی مقدار ثابتی است. این نوع الگوها را الگوی خطی می نامیم چرا که به شکل معادله درجه اول $t_n = an + b$ است. در اینجا t_n جمله n ام الگو است. در نمودار زیر مشخص کرده ایم که در قسمت a اختلاف هر جمله از جمله قبلی ۲ واحد است و لذا الگوی خطی

دارد.

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} \dots$$

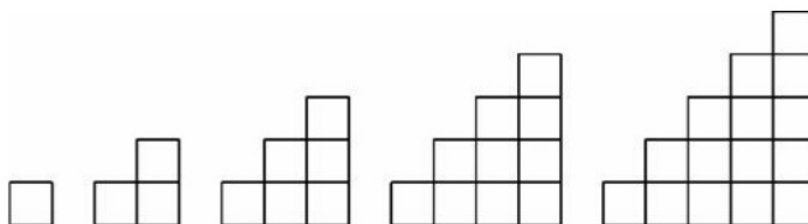
مثال ۱۱.۱. در یک اگوی خطی جمله چهارم ۱ و جمله هشتم ۱- است. جمله چندم آن برابر ۴۷- است؟



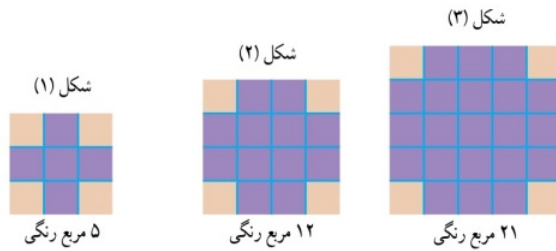
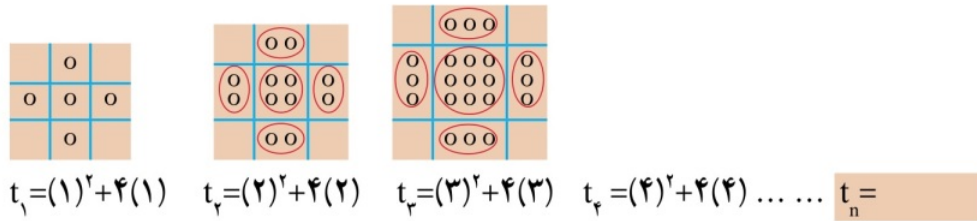
شکل ۳.۱: نمودار یک اگوی خطی

همانطور که در شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنید اعضای دنباله ی $2, 4, 6, \dots$ در واقع عرض نقاط A, B, C, \dots روی خط $y = 2x$ هستند. به همین علت هم به این الگوها خطی گویند. اگر خوب به معادله آن که بر حسب متغیر n نوشته شده است دقت کنید بلافاصله به یاد معادله خط از کلاس نهم خواهید افتاد یعنی عبارت $y = ax + b$. اما همه ی الگوها لزوماً خطی نیستند. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱۲.۱. با توجه به شکل زیر تعداد مربع‌ها را در هر مرحله بنویسید. آیا این الگو خطی است؟ چگونه می‌توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟



مثال ۱۳.۱. الگوی ۵, ۱۲, ۲۱, ۰۰۰ را در نظر بگیرید. آیا الگو خطی می باشد؟ به کمک دو شکل زیر سعی کنید جمله n ام آن را بیابید.



$t_1 = (1+2)^2 - 4$ $t_2 = (2+2)^2 - 4$ $t_3 = (3+2)^2 - 4$ $t_4 = (4+2)^2 - 4$ $t_n =$

تذکر : در مثال بالا نتیجه جالب و پرکاربرد $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ را بدست آوردیم. مشابه به مجموع فوق می توان مجموع مربعات و مکعبات اعداد طبیعی را هم بدست آورد. تلاش شما برای اثبات روابط بسیار مهم زیر خالی از اجر نیست!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۲.۳.۱ دنباله ها

همانطور که در بخش قبل دیدیم از روی الگوهای هندسی می توان اعدادی را استخراج کرده و به دنبال هم نوشت. اعداد بدست آمده را از چپ به راست می نویسیم و ترتیب آنها را هم حفظ می کنیم . در واقع این نکته بسیار مهمی است که اعداد نامنظم کنار هم قرار نگرفته اند بلکه دارای نظم و ترتیب هستند.

تعریف ۷.۱. به هر تعداد از اعداد که آنها را پشت سر هم نوشته باشیم یک دنباله گوئیم. هر عدد که در دنباله قرار دارد را یک عضو دنباله گوئیم و جمله n ام یا جمله عمومی دنباله را با نماد a_n نمایش می دهیم. نماد رایج برای نوشتن جمله عمومی یک دنباله نماد $\{ \}$ است. مثلاً می نویسم $a_n = \frac{n^2 + 1}{5n}$ یا معادلاً عبارت

$$\left\{ \frac{n^2 + 1}{5n} \right\}$$

تمرین ۱۱.۱. پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

$$b_n = (n + 2)^{-n}$$

$$c_n = n^n$$

$$d_n = -n^2 + 8n$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f_n = \frac{n}{n+2}$$

$$g_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$p_n = \sqrt[n]{n}$$

مثال ۱۴.۱. الگوهای عددی زیر همگی مثال هایی برای دنباله محسوب می شوند. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

a) $-1, -2, -3, -4, \dots$

b) $5, 18, 31, 44, \dots$

c) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$

d) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

e) $1, 4, 9, 16, \dots$

f) $1, 2, 4, 7, \dots$

h) $3, 1, 4, 1, 5, 1, \dots$

k) $-1, 8, -27, 64, \dots$

l) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

m) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \dots$

n) $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

p) $2, 8, 24, 64, 160, \dots$

یادداشت تاریخی: لئوناردو فیبوناتچی (حدود ۱۱۷۰-حدود ۱۲۵۰) نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است. برای مطالعه بیشتر در گوگل فیبوناتچی را جستجو کنید.

در اینجا ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه یافتن جمله عمومی از روی چند جمله اول هر دنباله ای در حالت کلی ممکن نیست. مثلا دنباله اعداد اول دارای جمله عمومی نیست. دوم اینکه از روی چند جمله اول یک دنباله نمی توان بصورت منحصر بفرد جمله عمومی را یافت. مثلا دنباله قسمت e مثال بالا را که جمله عمومی آن بصورت $a_n = n^2$ بدست آمده می توانست بصورت $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n^2$ نیز باشد چرا که دقیقا همین اعداد ۱۶، ۹، ۴، ۱ را تولید می کند اما مشخص است که از جمله چهارم به بعد این دو دنباله کاملا متفاوت هستند.

مثال ۱۵.۱. الف: جمله عمومی دنباله ای بصورت $a_n = n^2 - 10n + 18$ است. کوچکترین جمله دنباله جمله چندم است. ب: جمله عمومی یک دنباله بجای اینکه بر حسب n بیان شود بر حسب $3n - 1$ بیان شده است. به عبارت بهتر داریم: $a_{3n-1} = \frac{6n-2}{3n+3}$ جمله بیستم دنباله چه عددی است؟ آیا می توان جمله عمومی دنباله را بدست آورد؟

بیشتر بدانیم: دو نوع خاص دنباله وجود دارد که از اهمیت ویژه ای برخوردار است. اول دنباله های یکنوا: دنباله ای که جملات آن مرتبا از اولین جمله افزایش یابند را دنباله صعودی گوئیم. در مقابل چنانچه دنباله ای از اولین جمله شروع به کاهش کند، دنباله را نزولی گوئیم. توجه کنید که یک دنباله ممکن است نه صعودی باشد و نه نزولی. منظور از دنباله یکنوا دنباله ای است که یا صعودی باشد یا نزولی. دوم دنباله های کراندار: دنباله ای را کراندار گوئیم که همواره جملات آن بین دو عدد حقیقی قرار گیرند.

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله صعودی و کراندار است}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله نه صعودی است و نه نزولی اما کران دار است}$$

$$c_n = \frac{1}{n} \rightarrow \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله نزولی و کران دار است}$$

$$d_n = (-1)^n n^2 \rightarrow \{-1, 4, -9, 16, -25, 36, \dots\} \rightarrow \text{نه صعودی و نه نزولی و نه کران دار}$$

۳.۳.۱ دنباله حسابی

تعریف ۸.۱. دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند. فرض کنید جمله اول دنباله a و قدر نسبت عدد d باشد در این صورت جملات ابتدایی دنباله بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1} \quad \underbrace{a+d}_{a_2} \quad \underbrace{a+2d}_{a_3} \quad \underbrace{a+3d}_{a_4} \quad \dots \quad \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}$$

به این ترتیب جمله عمومی دنباله حسابی بصورت زیر حاصل می شود:

$$a_n = a + (n - 1)d$$

تعداد جملات $n =$ ، قدر نسبت $d =$ ، جمله اول $a_1 =$

مثال ۱۶.۱. در دنباله حسابی $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots$ جمله ۱۸ ام را بیابید. آیا جمله ای وجود دارد که برابر با ۲۴- شود؟

مثال ۱۷.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{11} = 48$ ، $a_5 = 24$ مطلوبست محاسبه a_{20} .

مثال ۱۸.۱. در دنباله حسابی $200, 204, 208, \dots$ کدام جمله صفر است؟

نکته مهم: فرض کنید سه عدد a, b, c تشکیل دنباله حسابی داده باشند. در این صورت باید $b - a = c - b$ در نتیجه باید $b = \frac{a+c}{2}$. در این حالت b را واسطه حسابی بین a و c گوئیم.

مثال ۱۹.۱. در یک دنباله حسابی غیر ثابت (یعنی $d \neq 0$) چند جمله اول بصورت زیر است. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

$$a + 2, a^2 + 2a + 2, a^3 + 2 \dots$$

مثال ۲۰.۱. فرض کنید $b \neq 1$ باشد. نشان دهید که سه عدد $\frac{1}{1+\sqrt{b}}, \frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-\sqrt{b}}$ تشکیل دنباله حسابی می دهند.

مثال ۲۱.۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بیابید که اضلاع آن تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۲.۱. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۲۷ و مجموع مربعات آنها ۲۹۳ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

مثال ۲۳.۱. بین دو عدد ۴ و ۳۶ سه واسطه حسابی درج کنید به عبارت بهتر بین این دو عدد ۳ عدد چنان قرار دهید که ۵ عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۴.۱. در یک دنباله حسابی که دارای n جمله است، مجموع سه جمله اول برابر $6\sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر $6\sqrt{2}$ است. همچنین می دانیم $a_{10} = \frac{3}{4}a_{15}$. این دنباله چند جمله دارد؟

مثال ۲۵.۱. فرض کنید a_s, a_r, a_n, a_m چهار جمله از یک دنباله حسابی باشند بطوریکه $m+n = r+s$ باشد. نشان دهید در این حالت باید داشته باشیم $a_m + a_n = a_r + a_s$. بویژه اگر $m+n$ زوج باشد آنگاه $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ در حالت خاص $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$

مثال ۲۶.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{13} + a_{18} = 130$ ، $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 120$ است. جمله ۳۰ ام دنباله را بدست آورید.

مثال ۲۷.۱. مجموعه A شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۴ است. مجموعه B نیز شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۵ و قدرنسبت ۶ است. مطلوبست محاسبه $n(A \cap B)$.

تمرین ۱۲.۱. فرض کنید که p^2, q^2, r^2 سه جمله متولی یک دنباله حسابی باشند. نشان دهید که سه عدد

نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. $\frac{1}{p+q}$, $\frac{1}{r+p}$, $\frac{1}{q+r}$

تمرین ۱۳.۱. اعداد $1 + 2\sqrt{x}$, $2 + 3\sqrt{x}$, $6 - 7\sqrt{x}$ تشکیل دنباله حسابی می دهند. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱۴.۱. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲ و مجموع مربعات ۲۴۶ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۱۵.۱. در یک دنباله حسابی $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = 0$ است. در این صورت حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\frac{a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{3n-1}}{a_4 + a_7 + a_{10} + \dots + a_{3n+1}}$$

تمرین ۱۶.۱. در دنباله حسابی $0, -161, -152, \dots, -170$ چند جمله منفی است؟

بیشتر بدانیم: می خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را در حالت کلی بیابیم. اگر این مجموع را با S_n نمایش دهیم هدف یافتن عبارت

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

است. بدین منظور همان روشی را که کارل فردریش گاوس معروف در دوره دبستان انجام داد را بکار میگیریم.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_n)$$

حال اگر مقدار جملات را از روی جمله عمومی جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$2S_n = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ جمله}}$$

بنابر این به دستور جالب زیر می رسم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

الف) درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

c) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

d) $3 + 7 + 11 + \dots + 79 = 820 \implies n = ?$

ب) در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از دستور $S_n = 2n^2 + n$ حاصل می‌شود. مطلوبست محاسبه a_n, d .

ج) مجموع چند جمله از دنباله $۰, ۱۶, ۲۱, ۲۶$ برابر ۷۴ است؟

۴.۳.۱ دنباله هندسی

می‌گویند یک هندی برای اولین بار شطرنج را اختراع نمود و به پادشاه هند تقدیم کرد. پادشاه که بازی شطرنج را بسیار پسندیده بود به مخترع قول داد هر جایزه‌ای درخواست کند قبول خواهد کرد. مخترع خوش ذوق و ریاضیدان، درخواستی عجیب نمود. او گفت من تقاضا و توقع زیادی ندارم فقط پادشاه لطف نموده دستور دهند به ازای خانه اول صفحه شطرنج یک دانه گندم، خانه دوم دو دانه گندم، خانه سوم چهار دانه گندم و بدین ترتیب به ازای هر خانه دو برابر خانه قبل گندم به من اهدا نمایند. پادشاه و اطرافیان درخواست مخترع را به دیده حقارت و تمسخر نگریستند و خزانه دار مامور شد فی الفور خواسته مخترع را برآورده سازد. ساعاتی بعد خزانه دار به حضور پادشاه رسید و در کمال ناباوری همگان گفت: پادشاه به سلامت باد اگر کلیه خزائن کشور را از گندم تهی نموده به مخترع دهیم باز هم تعداد زیادی از خانه‌های شطرنج باقی می‌مانند و از برآوردن خواسته مخترع عاجزیم!

جدای از صحت و سقم داستان فوق بیاید امکان تهیه گندم را بررسی کنیم. مجموع گندم خواسته شده برابر است با:

$$۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + \dots + ۲^{۶۴} = ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵$$

وزن هر دانه گندم را $۰,۴$ گرم بگیرید در این صورت حاصل برابر است با

$$۰,۴ \times ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ = ۷۳۷۸۶۹۷۶۲۹۴۸۳۸۲۰۶۴۶ \text{ gr} = ۷۳۷۸۶۹۷۶۲۹۴۸ \text{ ton}$$

تولید این مقدار گندم تقریباً هزار سال طول می‌کشد! در واقع هدف از بیان این داستان معرفی دنباله‌های هندسی و سرعت شگفت‌انگیز رشد یا زوال آنهاست.

تعریف ۹.۱. دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله مینامیم. جمله اول دنباله هندسی $a \neq ۰$ است. قدرنسبت را با q نشان می‌دهیم. در حالت‌های خاص اگر $q = ۱$ و $q = ۱$ باشد دنباله‌های خاصی پدید می‌آیند. اگر $q = ۰$ باشد دنباله بصورت $۰, ۰, ۰, \dots$ و اگر $q = ۱$ باشد دنباله ثابت a, a, a, \dots حاصل می‌شوند.

برای یافتن جمله عمومی یک دنباله هندسی فرض می‌کنیم جمله اول آن a و قدرنسبت q باشد در این صورت ترتیب جملات بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1} \quad \underbrace{aq}_{a_2} \quad \underbrace{aq^2}_{a_3} \quad \dots \quad \underbrace{aq^{n-1}}_{a_n} \quad \dots$$

بنابراین جمله n ام یا جمله عمومی دنباله هندسی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$a_n = aq^{n-1}$$

تعداد جملات = n ، قدر نسبت = q ، جمله اول = a

مثال ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. آنهایی را که هندسی هستند مشخص کرده و قدر نسبت و جمله عمومی آنها را بیابید.

a) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸,

b) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots$

c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

d) ۵, ۵, ۵, ...

e) ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ...

f) ۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, ...

g) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{2}, \dots$

h) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$

k) ۳, $\sqrt{3}, 1, \dots$

مثال ۲۹.۱. در دنباله $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ جمله چندم برابر $\frac{1}{128}$ است؟

مثال ۳۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_5 = 162$, $a_8 = 4374$ است. جمله سوم را بدست آورید.

مثال ۳۱.۱. سه عدد a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. ثابت کنید: $b^2 = ac$. (در این حالت b را واسطه هندسی بین a و c گویند.)

مثال ۳۲.۱. سه عدد $a + 5, a + 2, 4a + 4, 10a - 4$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. قدر نسبت را بیابید.

مثال ۳۳.۱. پنج واسطه هندسی بین دو عدد ۱ و ۶۴ درج کنید.

مثال ۳۴.۱. سه عدد $81^{\frac{1}{4}}, 3^{b^2}, 3^b$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. b را بیابید.

مثال ۳۵.۱. در دنباله $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}, \dots$ جمله سیزدهم را بیابید.

مثال ۳۶.۱. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{130}{3} \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{260}{9} \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

مثال ۳۷.۱. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 108 \\ a_4 \times a_6 = 162 \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

تذکر مهم: در یک دنباله هندسی که جمله اول آن مثبت است چنانچه $q > 1$ باشد دنباله افزایشی است و اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله کاهشی است. اگر $q = -1$ باشد دنباله متناوب است و اگر $q < 0$ باشد دنباله نوسانی است.

مثال ۳۸.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی غیرثابت افزایشی اند. قدرنسبت دنباله هندسی را بیابید.

مثال ۳۹.۱. چهار عدد مثبت جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. مجموع دو عدد کوچکتر برابر 2^0 و مجموع دو عدد بزرگتر برابر 4^5 است. بزرگترین این اعداد کدام است؟

تمرین ۱۷.۱. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی $4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ و جمله وسطی $3\sqrt{2}$ است. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۱۸.۱. در یک دنباله هندسی حاصلضرب سه جمله اول -8 و حاصلجمع جملات اول و سوم برابر -5 است. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۱۹.۱. در یک دنباله هندسی $a_{20} - a_{19} = 1024$, $a_{10} - a_9 = 1$ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۲۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_2 + a_4 + a_6 = 546$, $a_3 + a_5 + a_7 = 1638$ است. حاصلضرب چند جمله دنباله برابر 11664 می شود؟

تمرین ۲۱.۱. عدد 325 را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند و اختلاف دو عدد بزرگتر برابر 15^0 باشد.

تمرین ۲۲.۱. جمله اول یک دنباله هندسی $\sqrt{2} - 1$ است. جمله دوم دنباله چه عدد صحیحی باشد تا جمله ششم برابر $12\sqrt{2} + 17$ شود؟

تمرین ۲۳.۱. در یک دنباله حسابی و غیرثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟

بیشتر بدانیم: در این قسمت می‌خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را بدست آوریم. اگر جمله اول را با a و قدر نسبت را با q نشان دهیم هدف محاسبه عبارت $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ است. بدین منظور داریم:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

کم کردن طرفین ۲ رابطه بالا

$$qS_n - S_n = aq^n - a$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

تعداد جملات = n قدر نسبت = q جمله اول = a

بویژه در یک حالت خاص که $|q| < 1$ است مشاهده می‌کنیم که چنانچه n به قدر کافی بزرگ باشد آنگاه $q^n \approx 0$ است و لذا رابطه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - q}$$

۱ - در یک دنباله هندسی $S_2 = 9$, $S_6 = -63$ است مطلوبست محاسبه S_1 .

۲ - مجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ را بیابید.

۳ - اگر $|q| < 1$ باشد حاصل $(1 - q + q^2 - q^3 + \dots)(1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$ را بدست آورید.

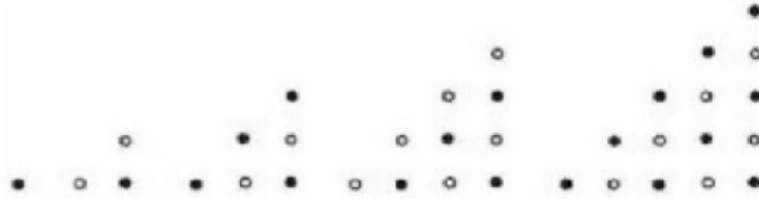
۴ - در یک دنباله هندسی داریم $S_{2n} = 17S_n$. مطلوبست محاسبه q .

۵ - حاصل عبارت $S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n$ را بیابید.

۶ - توپی از ارتفاع ۵ متری پرتاب می‌شود و پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود تا ساکن شود. کل مسافتی که توپ طی می‌کند را محاسبه کنید.

تمرین الگو، دنباله های حسابی و هندسی

تمرین ۲۴.۱. با توجه به شکل زیر و الگوی آن در شکل پانزدهم چند دایره سیاه رنگ دیده می شود؟



تمرین ۲۵.۱. کوچکترین جمله ی دنباله های زیر را بیابید.

$$a) a_n = n^2 - 20n$$

$$b) a_n = n + \frac{16}{n}$$

تمرین ۲۶.۱. بزرگترین جمله دنباله های زیر را بیابید.

$$a) a_n = -2n^2 + 20n - 15$$

$$b) a_n = \frac{1}{n^2 + 10n + 5}$$

تمرین ۲۷.۱. دنباله $a_n = n + 3 + \frac{8}{n+1}$ چند جمله صحیح دارد؟

تمرین ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. کدام هندسی یا حسابی اند؟

$$a) \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$$

$$b) 2, 5, 9, 14, \dots$$

$$c) \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{16}, \dots$$

$$d) \sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}, \dots$$

تمرین ۲۹.۱. دنباله $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{5}, \frac{1}{64}, \dots$ مفروض است. جمله عمومی آن را بنویسید.

تمرین ۳۰.۱. فرض کنید a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. ثابت کنید $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{2b}$ و $\frac{1}{b+c}$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

تمرین ۳۱.۱. اعداد فرد را بصورت $(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$ دسته بندی کرده ایم. در دسته سی ام مجموع دو جمله اول و آخر را بیابید.

تمرین ۳۲.۱. تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع جملات دنباله سه برابر مجموع جملات ردیف فرد دنباله باشد قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۳۳.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول، نهم و چهل و نهم بترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۳۴.۱. اعداد a, b, c تشکیل دنباله حسابی و اعداد a, c, b تشکیل دنباله هندسی می دهند. قدرنسبت دنباله هندسی را بدست آورید.

تمرین ۳۵.۱. دستوری برای جمله عمومی دنباله $\frac{5}{3}, \frac{8}{6}, \frac{11}{11}, \frac{14}{18}, \dots$ بیابید.

تمرین ۳۶.۱. در دنباله زیر چند جمله مشترک کمتر از 190 وجود دارد؟

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \dots \\ 2, 7, 12, 17, \dots \end{cases}$$

تمرین ۳۷.۱. بین دو عدد $a+8$ ، a سه واسطه هندسی درج کرده ایم. اگر مجموع اولین و آخرین واسطه برابر $8\sqrt{2}$ باشد، a را بدست آورید.

تمرین ۳۸.۱. در دنباله هندسی که جمله اول آن 10 و قدرنسبت آن 5 است چند جمله کمتر از 10000 داریم؟

تمرین ۳۹.۱. مجموع جملات یک دنباله هندسی ($|q| < 1$) برابر 8 و مجموع مربعات جملات همان دنباله برابر $\frac{64}{3}$ است. جمله اول را بیابید.

تمرین ۴۰.۱. حاصل عبارت $(1-x+x^2-\dots+x^8)(1+x+x^2+\dots+x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را بیابید.

۴.۱ تست‌های فصل اول

۱- اعداد $۵p - ۱$, $۳p + ۴$, $۲p + ۳$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۴

۲- اگر $A = \sqrt{۲۵۲}$ باشد حاصل $\frac{۱}{A - ۰/۲۵}$ کدام است؟

- (۱) ۴۴۱ (۲) ۴۴۲ (۳) ۴۴۳ (۴) ۴۴۴

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۳- عرض یک مستطیل ۴ متر است. اگر اندازه‌ی طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، مربع قطر مستطیل کدام است؟

- (۱) $۵(۱ + \sqrt{۵})$ (۲) $۶(۱ + \sqrt{۵})$ (۳) $۸(۵ + \sqrt{۵})$ (۴) $۸(۶ + \sqrt{۵})$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۴- اگر جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی ۴ و حد مجموع جملات این تصاعد ۱۶ باشد جمله‌ی چهارم کدام است؟

- (۱) $\frac{۹}{۱۶}$ (۲) $\frac{۹}{۳۲}$ (۳) $\frac{۲۷}{۱۶}$ (۴) $\frac{۲۷}{۳۲}$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۵- اگر S_n مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی و سه جمله اول دنباله S_n به صورت ۳ , $\frac{۳}{۲}$, $\frac{۱}{۲}$ باشد جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{۷}{۲}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{۹}{۲}$ (۴) ۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۵

۶- اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در Z با پایان است؟

- (۱) $A \cap B'$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۷- قطار سریع‌السیر به طور آزمایشی، فاصله دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است، طبق برنامه تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود، تا مدت زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۸- در آرایه‌ی مربعی مقابل، تفاضل صفرهای توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۱
- • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۹- تصاعد هندسی ... و $\frac{1}{3}$ و X و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

(۱) $\frac{41}{32}$ (۲) $\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{23}{16}$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۶

۱۰- ده عدد جملات متوالی از دنباله‌ی حسابی‌اند، مجموع ۵ جمله‌ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله‌ی آخر آن‌ها ۱۳۰ می‌باشد، کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۱- در دنباله‌ی مثلثی هر جفت از جمله‌های متوالی را با هم جمع می‌کنیم. اعداد حاصل کدام نوع دنباله است؟

(۱) مربعی (۲) هندسی (۳) حسابی (۴) فیبوناتچی

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۲- اعداد 2^a ، $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی از تصاعد هندسی‌اند، واسطه عددی بین a و b کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\sqrt{2}$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۷

۱۳- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

(۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{7}{8}$ (۳) $82\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۹

۱۴- مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$ است. مجموع جملاتی از این تصاعد که از

جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

(۱) ۱۳۲ (۲) ۱۴۵ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۴

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۹

۱۵- در یک دنباله‌ی هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله‌ی قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله‌ی اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله‌ی اول

کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۶- در دنباله‌ی فیبوناتچی، دومین عدد بخش‌پذیر بر ۱۳ کدام است؟

(۱) ۳۶۴ (۲) ۳۷۷ (۳) ۳۹۰ (۴) ۴۰۳

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۷- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۱۸- اگر $k \in Z$ (عدد صحیح نسبی) آنگاه مجموعه اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

- (۱) $2k-5$ (۲) $2k+6$ (۳) $3k-1$ (۴) $3k+1$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۱

۱۹- در تضاعد هندسی $...., 4, 2, 1$ ، مجموع چهارده جمله‌ی اول چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟

- (۱) ۶۵ (۲) ۶۳ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۲۹

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۰

۲۰- جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۱- اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $B \cap C \neq \emptyset$ (۳) $A \cap (B \cap C) = \emptyset$ (۴) $A \cap (B - C) \neq \emptyset$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۲- شخص در ماه اول A ریال پس‌انداز کرده، در هر ماه به اندازه‌ی $\frac{1}{3}A$ بیش‌تر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند، تا مقدار پس‌انداز یک ماه آن به دو برابر پس‌انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان مجموع پس‌انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس‌انداز وی چه قدر بوده است؟

- (۱) ۱۶۰۰ (۲) ۲۰۰۰ (۳) ۲۲۰۰ (۴) ۲۴۰۰

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۳- در دنباله‌ی مثلثی $...., 6, 3, 1$ مجموع جملات دهم و یازدهم، کدام است؟

- (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۳۲ (۴) ۱۴۴

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۴- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۱

۲۵- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد، ...، (۱، ۳، ۵)، (۷، ۹، ۱۱)، (۱)، جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟

(۱) ۴۱۵ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۲۱ (۴) ۴۲۳

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۶- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

(۱) ۴۲۸ (۲) ۴۸۴ (۳) ۴۸۶ (۴) ۴۸۸

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۷- اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه $[A - (A \cap B)] - (A \cup B)$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۲۸- مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله‌ی حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جمله کوچک‌تر است. قدر نسبت آن کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۲۹- در دنباله‌ی مثلثی با جمله اول ۱، جمله چهاردهم کدام است؟

(۱) ۸۴ (۲) ۹۸ (۳) ۱۰۵ (۴) ۱۰۸

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۳۰- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

(۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $5 + 2\sqrt{3}$ (۳) $5 + 4\sqrt{3}$ (۴) $7 + 4\sqrt{3}$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۲

۳۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

(۱) $\frac{117}{16}$ (۲) $\frac{125}{16}$ (۳) $\frac{63}{4}$ (۴) $\frac{127}{8}$

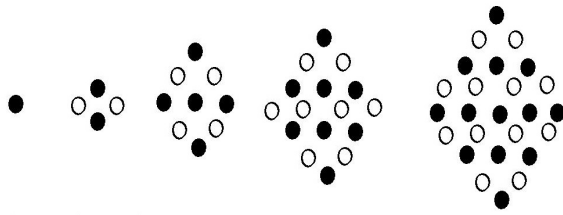
دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۳۲- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{4}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جمله‌ی سوم این تصاعد کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

۳۳- در آرایه‌ی لوزی مقابل تعداد صفرهای توپر، در جمله‌ی یازدهم، کدام است؟



- ۶۱ (۱)
- ۶۲ (۲)
- ۶۳ (۳)
- ۶۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

۳۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهارجمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع ۶ جمله‌ی اول کدام است؟

- ۱۰/۸ (۱)
- ۱۱/۲ (۲)
- ۱۲/۶ (۳)
- ۱۳/۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۸

۳۵- در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این تصاعد، صفر است؟

- ۹ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۱ (۳)
- ۱۲ (۴)

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۸۸

۳۶- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد:

... (۱, ۲, ۳, ۴), (۵, ۶, ۷, ۸, ۹), (۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰), ...

- ۱۶۹۱ (۱)
- ۱۷۱۰ (۲)
- ۱۷۲۹ (۳)
- ۱۷۴۸ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۷- تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک تصاعد عددی ۵ و مجموع جمله‌ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله‌ی بیست‌ویکم این تصاعد کدام است؟

- ۳۵ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۳۷/۵ (۳)
- ۳۸/۵ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۸- در یک تصاعد عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این تصاعد کدام است؟

- ۷/۵ (۱)
- ۸ (۲)
- ۸/۵ (۳)
- ۹ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

۳۹- اعداد $1, X, Y, \frac{5}{3}, \dots$ چهار جمله‌ی اول از یک تصاعد عددی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

- ۵۷ (۱)
- ۶۲/۵ (۲)
- ۶۷/۵ (۳)
- ۶۸ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶

۴۰- در یک تصاعد عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت تصاعد هندسی کدام است؟

- $\frac{6}{5}$ (۱)
- $\frac{5}{4}$ (۲)
- $\frac{4}{3}$ (۳)
- $\frac{3}{2}$ (۴)

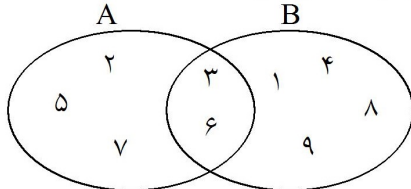
دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۷

۴۱- در بیست جمله‌ی اول تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۵

۴۲- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه $A - (A - B)$ و $B - (B - A)$ چند عضو دارد؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

۴۳- مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنباله حسابی‌اند برابر ۱۰۵، مجموع سه عدد بزرگ‌تر، ۶ برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

- ۳۸ (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

۴۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

- $\frac{81}{16}$ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴)

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۹

۴۵- در یک تصاعد عددی جمله‌ی a_n به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

- ۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۸۹

۴۶- حد مجموع جملات دنباله هندسی $۸, ۶, ۴, \dots$ کدام است؟

- ۲۴ (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۴۷- در دنباله مثلثی با جمله اول ۱، در جمله چندم عدد مربع کامل غیر ۱ نوشته است؟

- ۱) ششم ۲) هفتم ۳) هشتم ۴) نهم

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۴۸- بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع

این هشت عدد کدام است؟

- ۳۰ (۱) $۴۸\sqrt{2}$ (۲) $۳۰(\sqrt{2}+۱)$ (۳) $۳۶(\sqrt{2}+۱)$ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸

۴۹- در یک تصاعد عددی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این تصاعد برابر صفر است؟

- ۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

دیپارستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۸

۵۰- در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

دیپارستان - سراسری - تجربی - ۹۰

۵۱- در یک تصاعد عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

دیپارستان - سراسری - ریاضی - ۹۰

۵۲- مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴)

دیپارستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۳- در یک دنباله‌ی هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله‌ی اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ می‌باشد. مجموع این ۶ جمله، کدام است؟

- ۱۳۳ (۱) ۱۳۸ (۲) ۱۲۴ (۳) ۱۱۵ (۴)

دیپارستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۴- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های (A-B) و (B-A) به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید، کدام است؟

- ۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)

دیپارستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۵- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی چهارم ۸ برابر جمله‌ی اول است. اگر جمله‌ی ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول آن، کدام است؟

- ۴۷/۲۵ (۱) ۴۷/۵ (۲) ۴۷/۷۵ (۳) ۴۸/۵ (۴)

دیپارستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۶- به ازای یک مقدار x، اعداد x ، $x-۸$ ، x و $x+۱۲$ ، به ترتیب سه جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی نزولی‌اند. حد مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

- ۱۸ (۱) ۲۱ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

دیپارستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۳

۵۷- تعداد جملات یک دنباله هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

$$\frac{1}{3} (1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad 2 (3) \quad 3 (4)$$

دیپیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵۸- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم، که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره ی آن دسته باشد. ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ... مجموع دو جمله ی اول و آخر دسته ی سی ام، کدام است؟

$$1750 (1) \quad 1750 (2) \quad 1800 (3) \quad 1850 (4)$$

دیپیرستان - سراسری - تجربی - ۹۴

۵۹- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم، که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره ی آن دسته باشد، ... (۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹, ۱۰), ... مجموع جملات در دسته ی بیستم، کدام است؟

$$4010 (1) \quad 4020 (2) \quad 4030 (3) \quad 4040 (4)$$

دیپیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۴

۶۰- در دو دنباله ی حسابی به صورت های ... ۲, ۷, ۱۲, ... و ... ۸, ۱۱, ۱۴, ... چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$58 (1) \quad 59 (2) \quad 60 (3) \quad 61 (4)$$

دیپیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵.۱ کلید تست‌های فصل اول

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۲
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶