ریاضی دهم

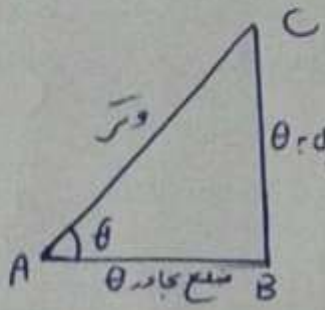
مدرس : هانی خاتمی

Email: hani_khatami@yahoo.com
Telegram channel : @hanikhatamii
Telephone: 09376510070

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت زاویه‌های مثلثاتی نامیم.



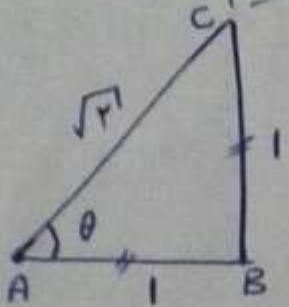
$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل } \theta}{\text{مجاور } \theta} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{مجاور } \theta}{\text{مقابل } \theta} = \frac{AB}{BC}$$

نسبت‌های زاویه ۴۵° : مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به ضلع ۱ را در نظر می‌گیریم:



طبق قضیه فیثاغورس، طول وتر برابر $\sqrt{2}$ است.

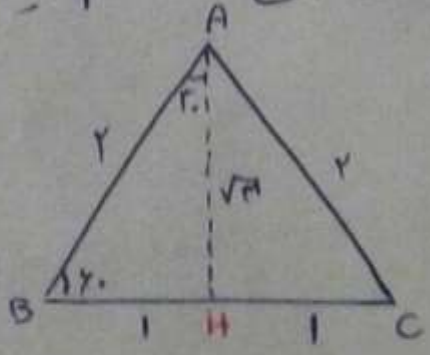
$$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۳۰° و ۶۰° : مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲ رسم می‌کنیم



$$\sin 30 = \frac{1}{2} \qquad \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60 = \frac{1}{2}$$

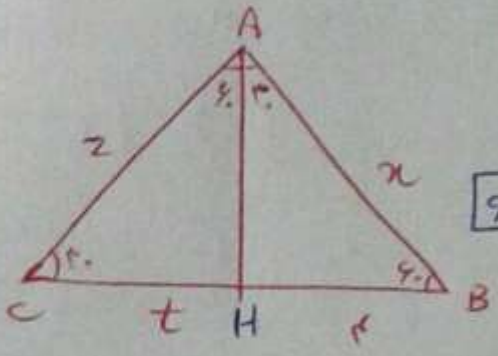
$$\tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60 = \sqrt{3}$$

$$\cot 30 = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

اندازه AH: $AH^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow AH^2 = 3 \Rightarrow AH = \sqrt{3}$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال : با توجه به شکل زیر مقادیر x، z، t را بیابید



$\cos 60 = \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow \boxed{x=8}$

یا در مثلث ABH چون روبه‌رو زاویه ۳۰ نصف وتر است پس $\boxed{x=8}$

در مثلث ABH : $\cos 30 = \frac{AH}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow \boxed{AH = 4\sqrt{3}}$

$\triangle ACH : \sin 30 = \frac{AH}{z} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{z} \Rightarrow \boxed{z = 8\sqrt{3}}$

$\triangle ACH : \cos 30 = \frac{t}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{t}{8\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{t = 12}$

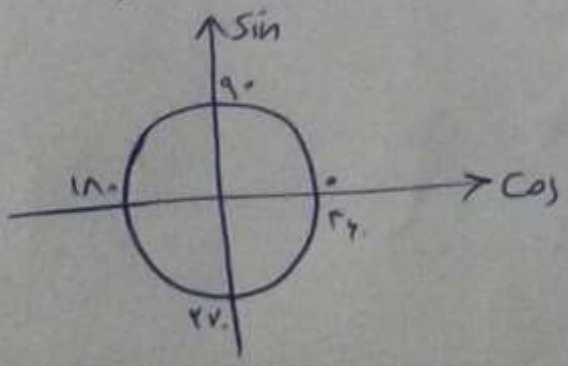
دایره مثلثاتی :

دایره‌ای به شعاع واحد و جهت مثبت آن خلاف عقربه‌های ساعت است.

دایره‌ی مثلثاتی به شعاع واحد و مرکز (۰،۰) منطبق بر دستگاه مختصات رسم می‌کنیم چون دستگاه مختصات چهار ناحیه دارد. پس دایره مثلثاتی دارای ۴ ربع می‌باشد.

در دایره‌ی مثلثاتی منطبق بر دستگاه مختصات، محور x همان محور cos‌ها و محور y همان محور sin‌های باشد.

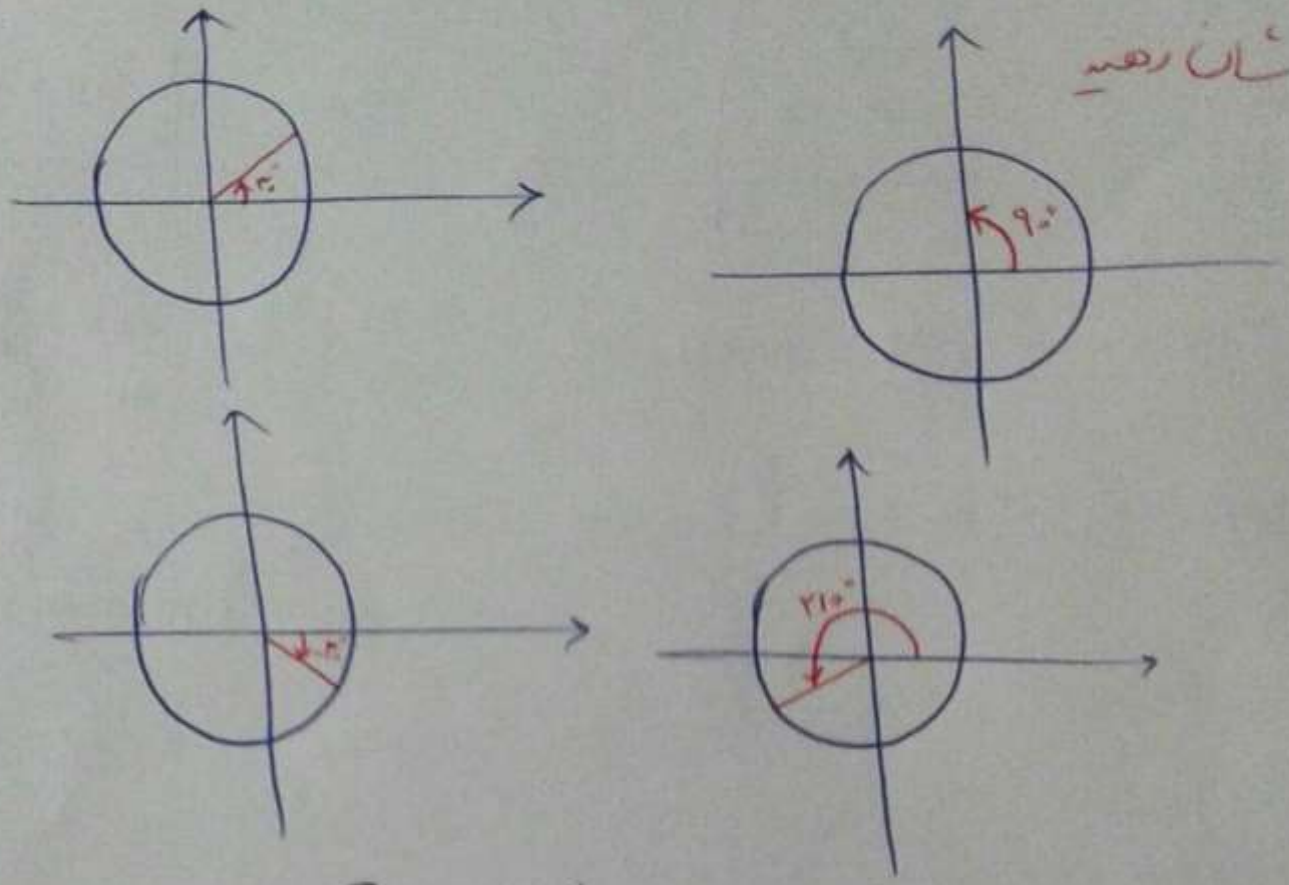
در هر ربع دایره‌ی مثلثاتی علامت نسبت‌های مثلثاتی با استفاده از x و y تعیین طول و عرض آن ناحیه مشخص می‌شود برای به دست آوردن علامت tan، cot از روی رسم



استفاده می‌شود $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ ، $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مثال : هریک از زاویه‌های 30° و 90° و (-30°) و 210° را روی دایره مثلثاتی نشان دهید



* با توجه به نسبت‌های مثلثاتی زوایای $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ که قبلاً به دست آوردیم و با توجه به دایره مثلثاتی جدول زیر را خودتان تکمیل کنید :

نسبت‌های مثلثاتی \ زاویه	0	30	45	60	90	180	270	360
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+1$	0	-1	0
cos	$+1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$+1$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+1$	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	$+1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

دانلود از اپلیکیشن پادرس

نکته : با توجه به نسبت های مثلثاتی زاویه ۳۰° و ۶۰° متوجه خواهیم شد که :

دو زاویه که متمم یکدیگرند (مجموع آنها ۹۰° است) سینوس یکی برابر کسینوس دیگری و همینطور tan یکی cot دیگری است یعنی :

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

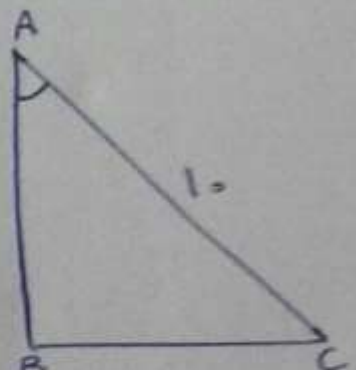
مثال : حاصل عبارت روبرو را بدست آورید

$$\cos 40^\circ + \sin 30^\circ - \sin 50^\circ + \tan 45^\circ =$$

$\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$ تمام کمان دوتا

$$\Rightarrow \cancel{\cos 40^\circ} + \sin 30^\circ - \cancel{\sin 50^\circ} + \tan 45^\circ = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

مثال : طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ای ۱۰ سانتی متر است و سینوس یکی از زاویه های آن $\frac{3}{5}$ می باشد. محیط این مثلث چند سانتی متر است؟



$$\sin A = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{10} = \frac{3}{5} \rightarrow \boxed{BC = 6}$$

فیثاغورس : $10^2 = 6^2 + AB^2 \Rightarrow \boxed{AB = 8}$

محیط مثلث $P = 10 + 6 + 8 = 24$ cm

تست : حاصل عبارت روبرو کدام است ؟

$$(\tan 10^\circ \times \tan 80^\circ) - \tan 10^\circ + \cot 80^\circ = ?$$

۱) $\tan 90^\circ$

۲) $\tan^2 10^\circ$

۳) $\cot 80^\circ$

۴) ۱

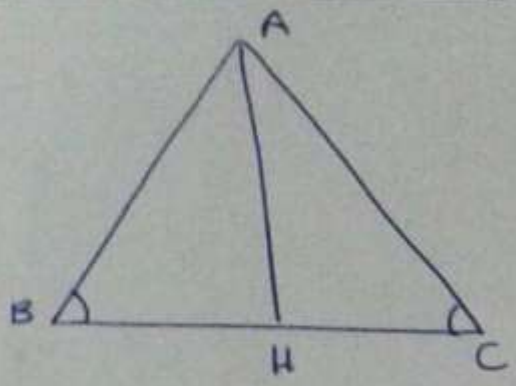
$\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$ متمم کمان دوتا

$$(\cot 80^\circ \times \tan 80^\circ) - \cot 80^\circ + \cot 80^\circ = \frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = 1$$

Email: hani_khatami@yahoo.com
Telephone: 09376510070

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مساحت مثلث :

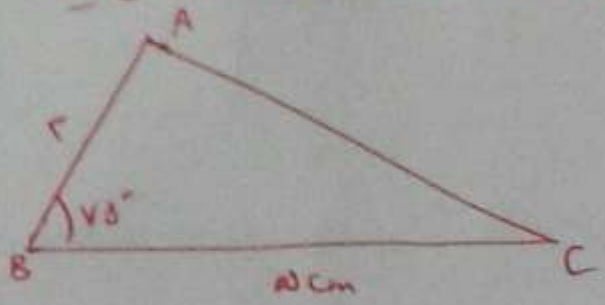


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

چون $\sin B = \frac{AH}{AB}$ و $AH = AB \sin B$ پس می‌توان نوشت: $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB \times \sin\hat{B}) \times BC$

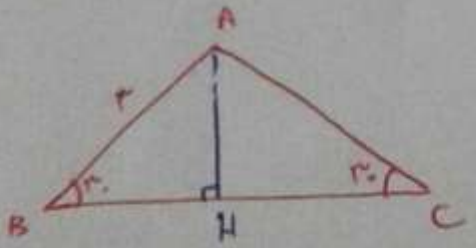
چون $\sin\hat{C} = \frac{AH}{AC}$ و $AH = AC \sin\hat{C}$ پس می‌توان نوشت: $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AC \times \sin\hat{C}) \times BC$

مثال : فرض کنید $\sin 75^\circ = 0/96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را بیابید کدام است



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB \times \sin 75^\circ) \times BC = \frac{1}{2}(3 \times 0/96) \times 5 = 7/2$$

مثال : مساحت مثلث روبه رو را بیابید



$\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ \Longrightarrow AB = AC = 3$

ضلع روبه رو به زاویه 30° (دوشنبه تا نیم از راست) نصف وتر است

$\cos\hat{B} = \frac{BH}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

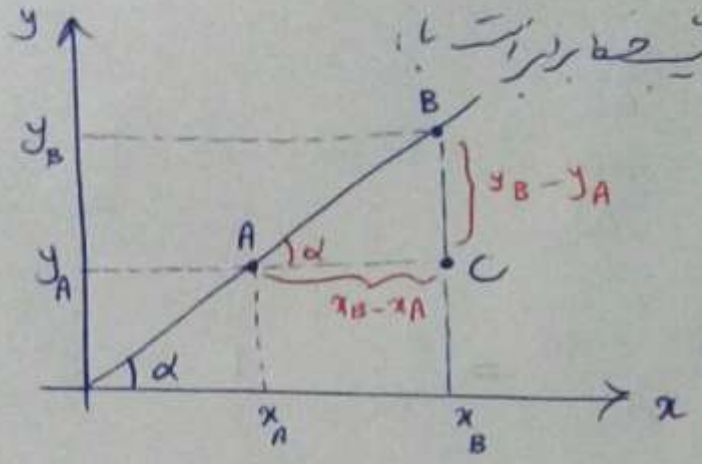
پس $AH = 1/5$

$BC = 2BH \Longrightarrow BC = 3\sqrt{3}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2}(1/5 \times 3\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

شیب خط ، $\tan\alpha$:



در صورتی که دو نقطه از خط را داشته باشیم شیب خط برابر است با:

$$m = \frac{\text{تفاضل } y}{\text{تفاضل } x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \tan\alpha}$$

* شیب هر خط که محور افقی را قطع می کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی.

* اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد آنگاه $\boxed{m = \tan\alpha}$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x ها زاویه 30° می سازد و از نقطه $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ بگذرد

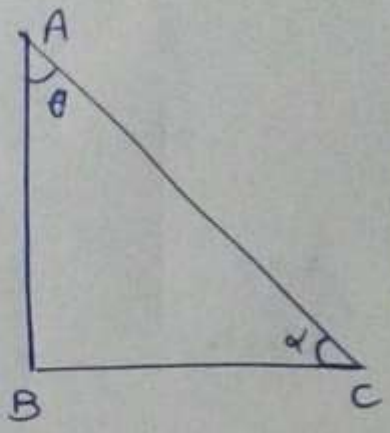
$$m = \tan\alpha \Longrightarrow m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

معادله خط $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

$$\Longrightarrow y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

$$\Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس



روابط بین نسبت‌های مثلثاتی :

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{BC}{AC} \\ \cos\theta = \frac{AB}{AC} \end{cases} \Longrightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$= \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

مثال : اگر α زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Longrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Longrightarrow \cos\alpha = \mp\frac{3}{5}$$

$\xrightarrow{\text{در ناحیه سوم}}$ $\boxed{\cos\alpha = -\frac{3}{5}}$ $\Longrightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{3}{4}$$

تذکر : تساوی $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ یک اتحاد مثلثاتی می‌باشد که برای هر α همواره برقرار است.

مثال : درستی اتحاد مثلثاتی زیر را تحقیق کنید

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\text{طرف چپ} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \text{طرف راست}$$

اثبات شد.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را تعیین کنید

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

طرف چپ: $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$ = طرف راست ساده‌شده

$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1$$

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$

طرف چپ $= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1$

خلاصه فرمول‌های مهم مثلثات:

۱) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

۲) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۳) $\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$

۴) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۵) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

۱- اگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $(\hat{C}=90^\circ)$، $BC=1$، $\tan\hat{B}=Z$ باشد $\cos\hat{A}$ برحسب Z برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{Z^2+1}}$ ۲) $\frac{Z}{\sqrt{Z^2+1}}$ ۳) $\sqrt{Z^2+1}$ ۴) $\frac{Z}{Z^2+1}$

۲- دو ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\sqrt{3}$ و ۲ هستند. اگر α کوچکترین زاویه داخلی این مثلث باشد $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{7}}$ ۴) $\sqrt{\frac{3}{11}}$

۳- اگر $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ و $\tan\theta<0$، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۴- ساده شده عبارت $(1-\cos\theta)^2\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)-(1-\sin^2\theta)$ کدام است؟

۱) $\sin^2\theta$ ۲) $\cos^2\theta$ ۳) $-\cos^2\theta$ ۴) $2\cos\theta$

۵- حاصل $\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}-\cot^4\theta$ کدام است؟

۱) $\sin^2\theta$ ۲) $\cos^2\theta$ ۳) $\tan^2\theta$ ۴) $\cot^2\theta$

۶- اگر $\tan x=\sqrt{2}$، مقدار $\frac{2\sin^2x-\cos^2x}{3\sin x\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

Email: hani_khatami@yahoo.com Telephone: 09376510070

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مدرس : هانی خاتمی

۷- حاصل عبارت $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸- ساده شده عبارت $\frac{(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)}{\cos x}$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $2\sin x$ ۴) $2\cos x$

۹- اگر $\cos\theta = \frac{5}{3} - 1$ و $\tan\theta\cos\theta > 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

۱) دوم ۲) اول ۳) چهارم ۴) سوم

۱۰- مقدار عبارت روبرو کدام است؟

$$A = \frac{(\tan 45^\circ + \tan 30^\circ - \sin^2 45^\circ)}{(\tan^2 15 \times \cot^2 15)}$$

۱) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

۲) $1 + \sqrt{3}$

۳) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

۴) قابل حل نیست

با آرزوی بهترین دعا

۹۵/۰۵/۲۸ سید کاظم

Email: hani_khatami@yahoo.com Telephone: 09376510070

دانلود از اپلیکیشن پادرس