

فصل ۴

معادلات و نامعادلات

در این فصل بسیار مهم با حل انواع معادلات و نامعادلات آشنا می‌شویم. در ابتدا حل معادله درجه دوم را بررسی کرده و سپس یک منحنی مرتبط با معادله درجه دوم یعنی سهمی‌ها را بررسی کرده، و در نهایت تعیین علامت عبارات جبری را که نقشی کلیدی در حل نامعادلات دارند را بررسی می‌کنیم.

۱.۴ معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

معادله درجه دوم چیست؟ فرض کنید هدف یافتن عددی است که وقتی با مربعش جمع می‌شود حاصل برابر ۶ شود. برای یافتن جواب می‌توان آزمون-خطا کرد و با چندبار امتحان عدد ۲ را یافت که در شرایط صدق می‌کند. اما فقط عدد ۲ جواب است؟ اگر بخواهیم بازهم آزمون-خطا کنیم این بار به سادگی دفعه قبل نمی‌توان جواب را یافت که البته عدد ۳- است. حال فرض کنید بخواهیم مسئله را بدون آزمون-خطا حل کنیم. بدین منظور فرض کنید عدد مورد نظر را با x نشان دهیم. پس باید داشته باشیم $x^2 + x = 6$. حال معادله را بصورت $x^2 + x - 6 = 0$ مینویسیم. چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ پاسخ تجزیه است. داریم:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0 \implies (x + 3)(x + 2) = 0 \implies x = 2 \text{ \& } x = -3$$

معادله شکل گرفته در بالا یک معادله درجه دوم است چرا که مجهول ما یعنی x در این معادله دارای توان ۲ است.

تعریف ۱.۴. به معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ یک معادله درجه دوم گوییم بشرطی که $a \neq 0$ باشد. اعداد $a, b, c \in \mathbb{R}$ را ضرائب معادله می‌نامیم. x مجهول معادله است و منظور از حل معادله فوق یعنی یافتن تمام اعداد حقیقی چون x که در معادله صدق کنند. با این حساب عدد λ جواب معادله است هرگاه:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

حال به معرفی روش‌های حل این معادله می‌پردازیم^۱. برای این منظور با توجه به وضعیت ضرائب معادله

^۱ محمد ابن موسی خوارزمی ریاضیدان نامی ایران و جهان در قرن هشتم و نهم میلادی است. خوارزمی بحق از نوادر تاریخ ریاضیات

روش هایی ارائه می‌شود.

روش ریشه‌گیری

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $c \leq 0$ & $b = 0$ آنگاه با یک ریشه‌گیری جواب معادله بدست می‌آید. مثلاً برای حل معادله $4x^2 - 16 = 0$ داریم:

$$4x^2 - 16 = 0 \implies 4x^2 = 16 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

روش فاکتورگیری

اگر در معادله درجه دوم داشته باشیم $b = 0$ با یک فاکتورگیری ساده معادله حل می‌شود. به عنوان یک مثال ساده برای حل معادله $3x^2 + 12x = 0$ داریم:

$$3x^2 + 12x = 0 \implies 3x(x + 4) = 0 \implies x = 0 \text{ \& } x = -4$$

روش تجزیه

چنانچه هیچ یک از ضرائب صفر نباشد به کمک تجزیه کردن سه جمله‌ای می‌توان معادله را حل کرد. در این مورد توجه داریم که از یکی از خواص اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم که قبلاً به آن اشاره کرده ایم:

$$if \quad ab = 0 \implies a = 0 \text{ یا } b = 0$$

به یک مثال ساده برای حل معادله $x^2 - x - 12 = 0$ داریم:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0 \implies \begin{cases} x - 4 = 0 \implies x = 4 \\ x + 3 = 0 \implies x = -3 \end{cases}$$

تمرین ۱.۴. معادلات زیر را حل کنید.

۱) $9x^2 - 25 = 0$

۲) $4x^2 + 16 = 0$

۳) $25x^2 + 5x = 0$

۴) $-\frac{1}{4}x = \frac{8}{3}x^2$

۵) $x^2 + 11x + 30 = 0$

۶) $6x^2 + x = 2$

۷) $x^2 + 9x - 136 = 0$

۸) $x^3 + x^2 = 56x$

است و وی را پدر جبر نام نهاده‌اند. وی معادله درجه دوم را طبقه بندی کرد و برای هر کدام روش حل ارائه داد.

روش مربع کامل کردن

تصور کنید می‌خواهید جواب معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ را بدست آورید. هرچه تلاش کنید، معادله به روش‌های معمول اشاره شده در بالا حل نخواهد شد. پس باید راهکار تازه‌ای بکار برد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x = 1 &\implies x^2 + 2x + 1 = 1 + 1 \\ &\implies (x + 1)^2 = 2 \\ &\implies x + 1 = \pm\sqrt{2} \\ &\implies x = \sqrt{2} - 1 \text{ \& } x = -\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

اگر خوب به محاسبات نگاه کنید هدف از اضافه کردن عدد ۱ به طرفین تساوی این بوده است که یک طرف معادله مربع کامل شود تا بتوان از طرفین جذر گرفت و جواب را یافت. چرا عدد ۱؟ جواب در محاسبه زیر نهفته است. در حالت کلی برای اینکه عبارت $x^2 + bx$ را به عبارتی تبدیل کنیم که شامل مربع کامل باشد به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

به عنوان مثالی دیگر فرض کنید می‌خواهیم جواب معادله $3x^2 - 9x + 3 = 0$ را حل کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned}3x^2 - 9x + 3 = 0 &\implies x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &\implies x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = 0 \\ &\implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 1 \\ &\implies x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\implies x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ \& } x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

روش کلی حل معادله درجه دوم

همان‌طور که مثال‌های حل شده بالا ملاحظه کردید، روش مربع کامل کردن کمی وقت‌گیر و پرمحاسبه است. به همین دلیل یکبار روش مربع کامل را روی فرم کلی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بکار می‌بریم تا دستوری کلی بر حسب رادیکال‌ها بیابیم و بعد از آن برای حل از دستور یافت شده استفاده کنیم. قبل از شروع محاسبات مبین معادله درجه دوم را بصورت $\Delta = b^2 - 4ac$ تعریف می‌کنیم. Δ یک عدد حقیقی است و لذا هر سه حالت $\Delta = 0$ ، $\Delta > 0$ ، $\Delta < 0$ ممکن است اتفاق بیافتد.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\implies x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\implies x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

به این ترتیب با فرض اینکه $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جواب $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد. اگر $\Delta = 0$ باشد هر دو جواب برابرند و داریم: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ و سرانجام اگر $\Delta < 0$ باشد گوییم معادله جواب حقیقی ندارد.

$$\Delta : \begin{cases} \Delta > 0 \implies \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد} \\ \Delta = 0 \implies x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < 0 \implies & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

درس را با ارائه‌ی مثال‌های کلی از مطالب مطرح شده پی می‌گیریم.

کلمه حقیقی اشاره به اعداد حقیقی دارد. در واقع در حالتی که $\Delta < 0$ است باز هم معادله جواب دارد اما این جواب‌ها عدد حقیقی نیستند بلکه اعداد مختلط هستند که در فصل یک به آن‌ها اشاره‌ای داشته‌ایم. کارل فردریش گاوس در پایان نامه دوره‌ی دکتری خود ثابت کرد که یک معادله از درجه n حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

تجزیه $۱) ۴x^2 - ۴x + ۱ = ۰$

تجزیه $۲) ۸x^2 - ۷x - ۱ = ۰$

مربع کامل $۳) x^2 + ۵x = ۱$

مربع کامل $۴) ۳x^2 + ۲x = ۵$

روش دلتا $۵) ۴x^2 + ۴x - ۷ = ۰$

روش دلتا $۶) ۲۰x + ۱ = ۲۱x$

مثال ۲.۴. یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^2 + ax + ۳a - ۵ = ۰$ برابر ۱ است. ریشه دیگر معادله را بدست آورید.

مثال ۳.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید که معادله $x^2 - (a + ۲)x + ۲a = ۰$ دارای ریشه مضاعف باشد و سپس آن ریشه مضاعف را بدست آورید.

مثال ۴.۴. از چه عدد مثبتی اگر معکوس آن کم شود باقیمانده برابر $\frac{۵}{۶}$ می‌شود؟

مثال ۵.۴. طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۸۸ واحد باشد، محیط مستطیل را بدست آورید.

مثال ۶.۴. طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر $۲x$, $۲x + ۱$, $۲x + ۲$ است. محیط این مثلث چند واحد است؟

مثال ۷.۴. جواب معادله $\frac{۱}{x-۲} - \frac{۱}{x+۳} = \frac{x^2+۱}{x^2+x-۶}$ را بیابید.

مثال ۸.۴. حاصل عبارت $A = ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۰۰۰}$ را بیابید.

تمرین ۲.۴. حاصل عبارت $A = \sqrt[۳]{۵}\sqrt[۳]{۵}\sqrt[۳]{۵}\sqrt[۳]{۰۰۰}$ را بدست آورید.

تمرین ۳.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

مربع کامل $۱) ۵x^2 + ۶x - ۸ = ۰$

روش دلتا $۲) ۷x^2 - ۵x + ۲ = ۰$

تمرین ۴.۴. معادله‌ی $x^2 + \frac{۱}{x^2} + \frac{۱}{۲}(x - \frac{۱}{x}) = ۵$ را حل کنید.

تمرین ۵.۴. معادله $(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴) + ۱ = ۰$ را حل کنید.

تمرین ۶.۴. معادله $\frac{۱}{x-۱} + \frac{۱}{x-۲} + \frac{۱}{x-۳} = \frac{۱۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}$ را حل کنید.

تمرین ۷.۴. معادله‌ی $x^4 + ۲۵ = ۲۶x^2$ را حل کنید.

تمرین ۸.۴. معادله‌ی $x^2 - 17x + 16 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۹.۴. یک درهم را بین چند مرد تقسیم کرده ایم ولی چون یک مرد به آن‌ها اضافه شده است، تقسیم را دوباره بین همه‌ی مردها انجام داده‌ایم. معلوم شد در تقسیم دوم به هر مرد $\frac{1}{6}$ درهم کمتر از تقسیم اول رسیده است. در آغاز چند مرد بوده است؟ (مسئله خوارزمی)

تمرین ۱۰.۴. معادله‌ی $x^2 - (2 + 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۱.۴. یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر در ۴ متر قرار دارد به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد فاصله هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید.

تمرین ۱۲.۴. حدود m را طوری بیابید تا معادله‌ی درجه دوم $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

تمرین ۱۳.۴. اختلاف مربع عدد $\frac{3}{7}$ از خود $\frac{3}{7}$ برابر اختلاف مربع چه کسری از خود آن کسر است؟

تمرین ۱۴.۴. ثابت کنید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \implies x_1 = 1 \text{ \& } x_2 = \frac{c}{a} \\ a + c = b \implies x_1 = -1 \text{ \& } x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

تمرین ۱۵.۴. معادلات داده شده را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $148x^2 + 2x = 150$

۲) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5} = 0$

۳) $(1 + \sqrt{2})x^2 = x + \sqrt{2}$

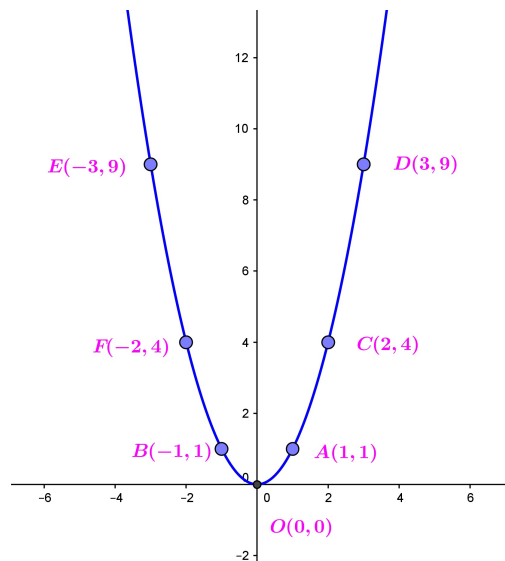
۴) $1395x^2 - 1394x - 1 = 0$

۵) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

۶) $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

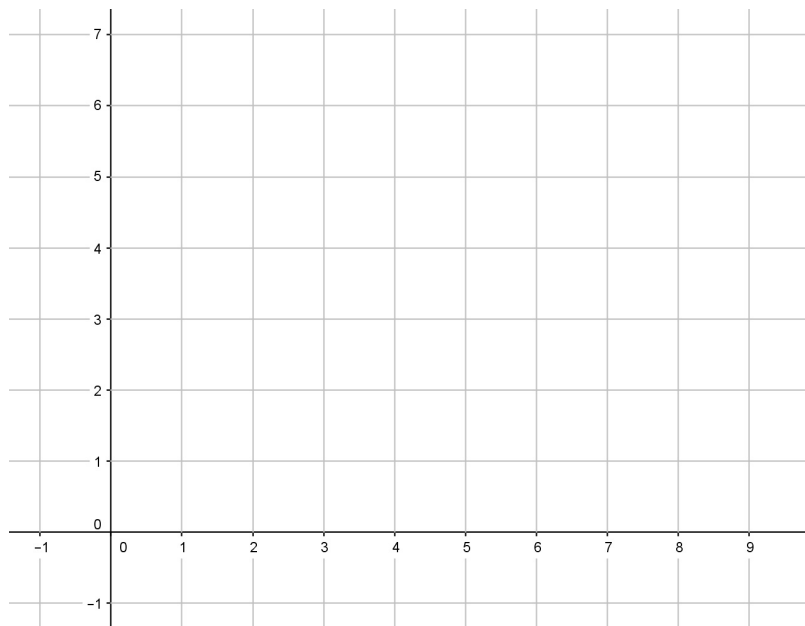
۲.۴ سهمی‌ها

یکی از کاربردی‌ترین منحنی‌ها در زندگی روزمره ما سهمی است. سهمی که سه بعدی شده سهمی است، امروزه نقش اصلی در ارسال و دریافت اطلاعات از طریق هوایی را دارد. نام امروزی سهمی (parabola) را آپولونیوس معرفی کرد و نیوتن اولین بار خاصیت همگرایی نور در کانون سهمی را بررسی کرد. ساده‌ترین سهمی دارای معادله‌ی $y = x^2$ است. اگر به متغیر x مقدار دهیم می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم. مثلاً با فرض $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 0$ مقادیر حاصل عبارتند از $1, 4, 9, 0, 1, 4, 9$. اگر این نقاط را روی محورهای مختصات مشخص کنیم و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم شکل زیر حاصل می‌شود.



ذکرچند نکته ضروری است. اول اینکه پایین‌ترین نقطه سهمی در شکل فوق مبداء مختصات است. نقطه $O(0, 0)$ را مینیمم (کمینه) سهمی گوئیم. دوم اینکه محور عرض‌ها سهمی را به دو قسمت یکسان تقسیم کرده است. محور عرض‌ها $x = 0$ را محور تقارن سهمی گوئیم.

مثال ۹.۴. سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ را رسم کنید.



تعریف ۲.۴. منظور از یک سهمی معادله‌ای بصورت $y = ax^2 + bx + c$ است که $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$. با مربع کامل کردن این عبارت بصورت:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

درمی‌آید که در این حالت راس سهمی یا مینیمم سهمی نقطه $M(h, k)$ است و خط $x = h$ را محور تقارن سهمی گوئیم. اگر $a > 0$ باشد دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شود و اگر $a < 0$ باشد دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

مثال ۱۰.۴. راس سهمی‌های زیر را بیابید و سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$۱) y = ۲x^2 + ۱$$

$$۲) y = -x^2 + ۴$$

$$۳) y = x^2 + ۴x + ۳$$

$$۴) y = ۱ - \frac{x^2}{۲}$$

$$۵) y = ۱ - ۴x - ۲x^2$$

$$۶) ۳y = x^2 - ۴x + ۷$$

رسم سهمی ساده‌تر می‌شود اگر بتوانیم دستوری صریح از راس سهمی بدست آوریم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &\implies y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

با این حساب راس سهمی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{راس سهمی} \longrightarrow M \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

به این ترتیب با داشتن راس سهمی کافیست یک یا دو نقطه قبل و بعد از آن را در معادله منحنی جایگذاری کنیم تا عرض آن نقاط حاصل شده و سپس سهمی را رسم کنیم. همچنین توجه کنید که اگر $a > 0$ باشد سهمی مینیمم دارد و اگر $a < 0$ باشد سهمی ماکزیمم (بیشینه) دارد.

مثال ۱۱.۴. نمودار سهمی $y = -\frac{1}{۲}x^2 + ۲x + \frac{1}{۲}$ را رسم کنید.

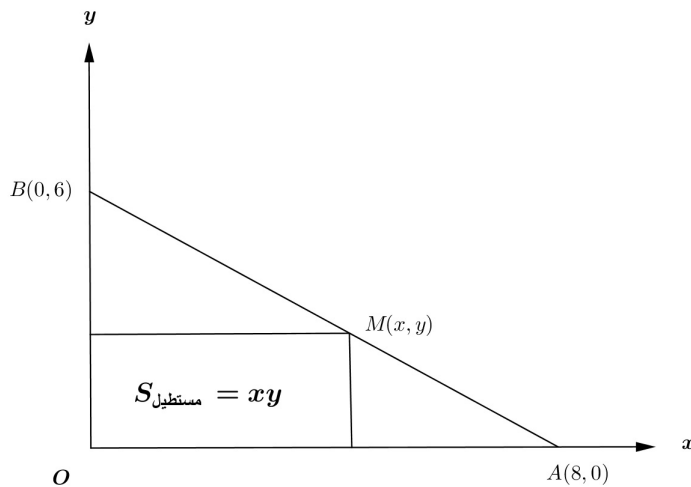
مثال ۱۲.۴. مجموع دو عدد مقدار ثابت 20° است. بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد را بدست آورید.

مثال ۱۳.۴. مستطیلی به اضلاع 20° و 60° واحد مفروض است. اگر یک واحد به عرض آن اضافه کنیم دو واحد از طول آن کم می‌شود. در بین مستطیل‌هایی که به این ترتیب ساخته می‌شود کدامیک بیشترین مساحت را داراست؟

مثال ۱۴.۴. یک طناب به طول ۸۸ متر در دسترس است. با این طناب قرار است زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است حصار شود. بیشترین مساحتی که می‌توان با این طناب حصار کرد چقدر است؟

مثال ۱۵.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید تا ماکزیمم سهمی $y = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ شود.

مثال ۱۶.۴. بیشترین مساحت ممکنه برای مستطیل زیر را بیابید.



مثال ۱۷.۴. موشکی با زاویه معینی به هوا شلیک شده است و ارتفاع موشک t ثانیه پس از پرتاب از دستور

$y = -5t^2 + 50t + 55$ بدست می‌آید. معین کنید پس از چند ثانیه موشک به بیشترین ارتفاع خود می‌رسد.

پس از چند ثانیه موشک به زمین می‌خورد؟

تمرین ۱۶.۴. سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$۱) y = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

$$۲) y = 6x^2 - 24x + 24$$

$$۳) y = 4 - 2x - 2x^2$$

$$۴) y = 4x^2 + 28x = 49$$

$$۵) y = 2x - 3 - x^2$$

$$۶) y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{12}x - 1$$

تمرین ۱۷.۴. بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است و با طناب می‌توان

حصار کرد ۶۴۸ متر است. طول طناب را بیابید.

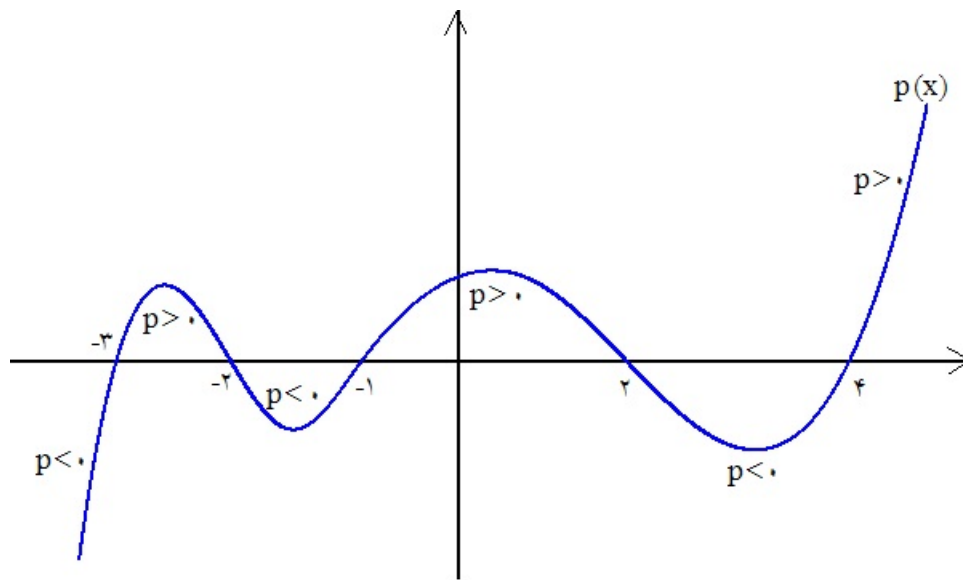
تمرین ۱۸.۴. دو ضلع مستطیلی روی محورهای مختصات در ناحیه اول و زیر خط $y = \frac{6-x}{4}$ واقع است.

یک راس آن روی مبدا و راس مقابلش M روی خط $y = \frac{6-x}{4}$ قرار دارد. بیشترین مساحت مستطیل وقتی $M(x, y)$ روی خط اشاره شده حرکت می‌کند را بیابید.

تمرین ۱۹.۴. اگر $x + 2y = 30$ باشد ماکزیمم مقدار حاصلضرب xy را بدست آورید.

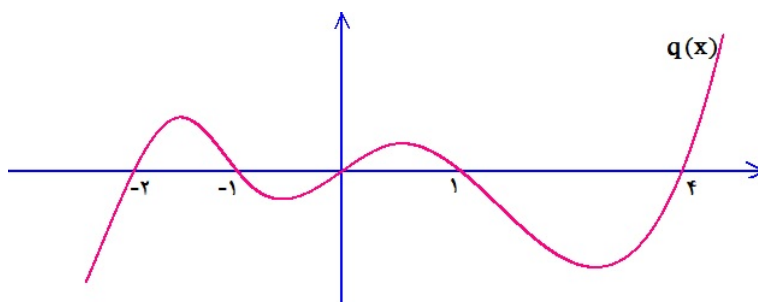
۳.۴ تعیین علامت چند جمله‌ایها

به دقت به شکل زیر نگاه کنید. نمودار یک منحنی در دستگاه مختصات ترسیم شده است. نام منحنی $p(x)$ است و در برخی بازه‌ها بالای محور x هاست و لذا مثبت است و در برخی بازه‌ها زیر محور x هاست و لذا منفی است. اگر دقت کنید نقاطی که منحنی محور طولها را در آنها قطع کرده است نقشی اساسی در تعیین اینکه p مثبت است یا منفی بازی می‌کند. چنین نقاطی را ریشه‌های p گوئیم. در حالت کلی نقاط حاصل از حل معادله $p(x) = 0$ را ریشه‌های p گوئیم.



$$\left\{ \begin{array}{l} x < -3 \implies p(x) < 0 \\ -3 < x < -2 \implies p(x) > 0 \\ -2 < x < -1 \implies p(x) < 0 \\ \vdots \\ x > 4 \implies p(x) > 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{گوئیم عبارت منفی است} \\ \text{گوئیم عبارت مثبت است} \end{array}$$

مثال ۱۸.۴. با توجه به شکل علامت منحنی $q(x)$ را تعیین کنید.

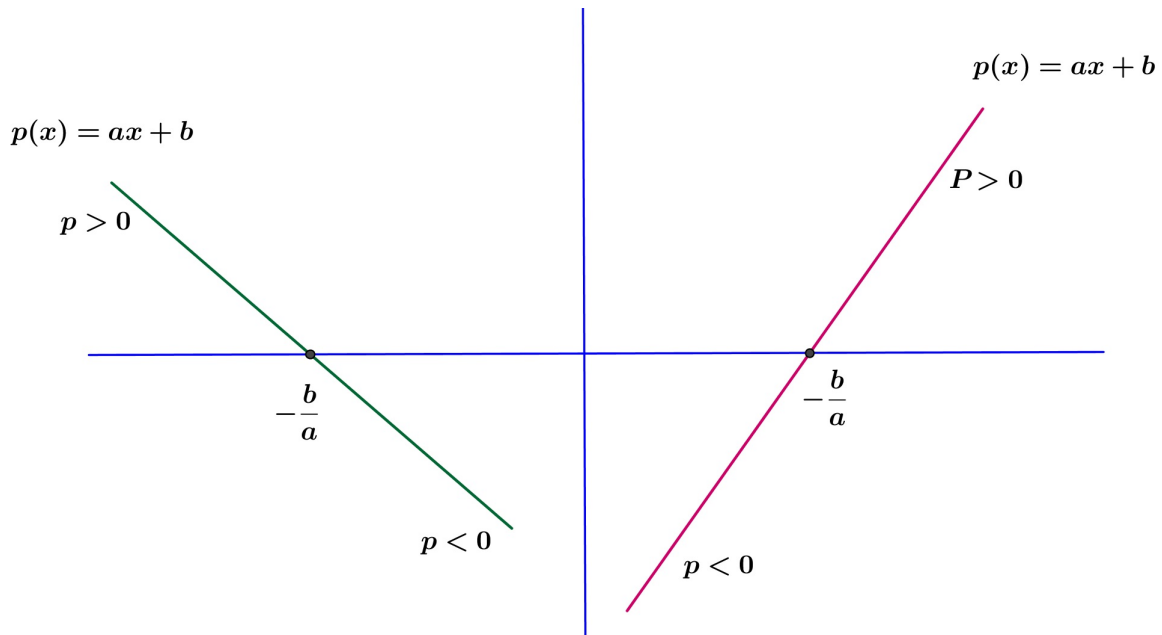


۱.۳.۴ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

می‌خواهیم عبارت $p(x) = ax + b$ را تعیین علامت کنیم. ابتدا ریشه‌ها یا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم:

$$p(x) = 0 \implies ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$$

در حالت کلی نمودار $p(x) = y = ax + b$ یکی از دو حالت زیر را دارد:



از نمودار فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p < 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p > 0 \end{cases} \\ a < 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p > 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

خلاصه بحث فوق در جدول زیر که آن را جدول تعیین علامت می‌نامیم آمده است.

x	$-\frac{b}{a}$
$p(x) = ax + b$:
مخالف علامت a	موافق علامت a

مثال ۱۹.۴. علامت عبارات $p(x) = 2x - 4$, $q(x) = (6 - 2x)^3$ را تعیین کنید.

تذکر مهم: چنانچه بخواهیم علامت یک عبارت جبری را که شامل چند دوجمله‌ای درجه اول است را تعیین کنیم، می‌توانیم در یک جدول همه‌ی دوجمله‌ایها را نوشته و ریشه تک‌تک آنها را یافته و هر کدام را تعیین علامت کنیم و دست آخر با ضرب علامت‌ها درهم علامت کل عبارت را بیابیم. مثال زیر را که به همین طریق حل می‌شود به دقت نگاه کنید.

مثال ۲۰.۴. عبارت $A = (x - 1)(x + 2)(x - 3)^5$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۱.۴. چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ را تعیین علامت کنید.

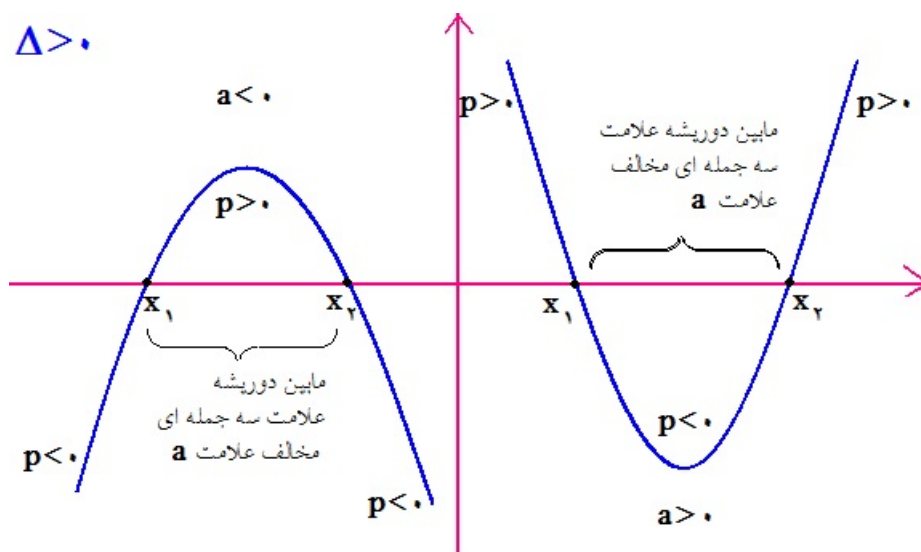
مثال ۲۲.۴. عبارت $A = \frac{(1-x)(x+2)}{(x+1)(x-3)^2}$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۳.۴. سهمی $y = x^2 - 2x - 8$ مفروض است. معین کنید در چه بازه‌ای سهمی زیر محور طولها و در چه بازه‌ای بالای محور طولهاست؟

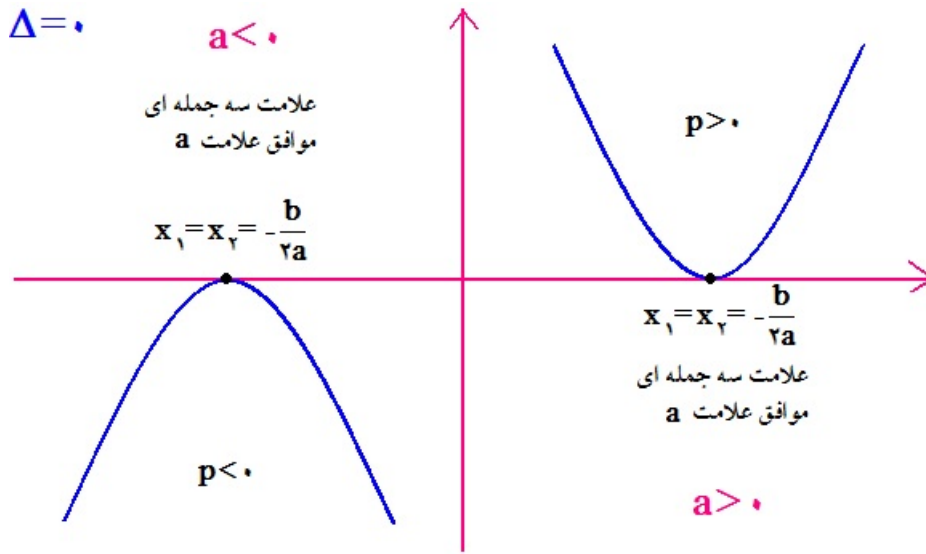
۲.۳.۴ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم

همان‌طور که تا الان متوجه شدید یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان با تجزیه به عامل‌های درجه اول تعیین علامت کرد. اما این زمانی شدنی است که عبارت تجزیه شود. در صورتیکه عبارت تجزیه نشود راه‌حل چیست؟ راه‌حل یافتن روشی است که به کمک آن بتوان سه‌جمله‌ای‌ها را مستقیماً تعیین علامت کرد. در حالت کلی یک سه‌جمله‌ای درجه دوم یا همان سهمی به یکی از صورت‌های زیر است:

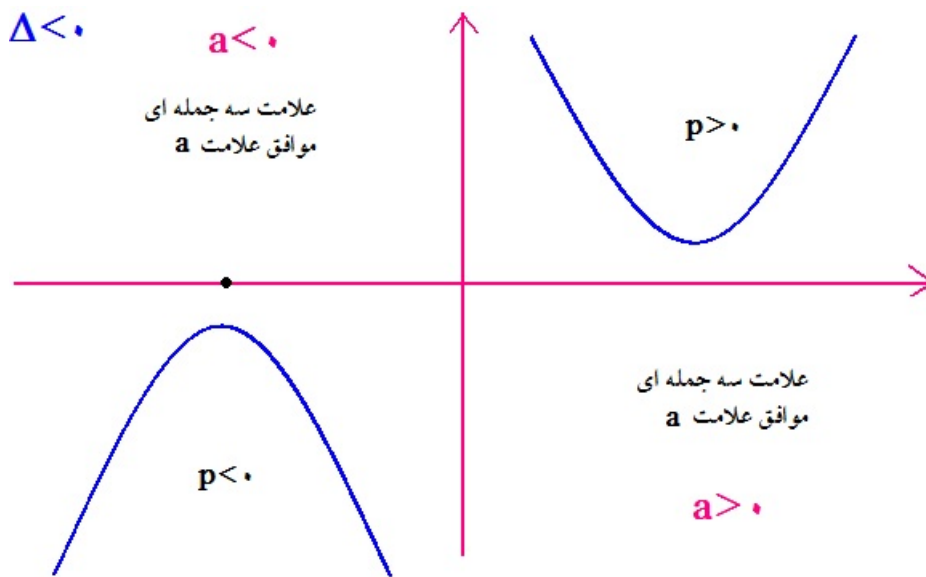
الف: اگر $\Delta > 0$



ب: اگر $\Delta = 0$



ج: اگر $\Delta < 0$



پس برای تعیین علامت سه جمله‌ای $p(x)$ ابتدا باید $p(x) = 0$ را حل کنیم. پس اولین گام یافتن مبین معادله درجه دوم است یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ است که بسته به علامت Δ یکی از جداول زیر را تشکیل می‌دهیم. اگر $\Delta > 0$ باشد:

x	x_1	x_2
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	علامت مخالف a
		علامت موافق a

اگر $\Delta = 0$ باشد:

x	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$	
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	علامت موافق a

اگر $\Delta < 0$ باشد:

x	سه جمله ای ریشه ندارد	
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	

تذکر: نتایج حاصل از بررسی نمودارهای یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان از روی معادله سه‌جمله‌ای درجه دوم $p(x) = ax^2 + bx + c$ نیز بدست آورد. برای این منظور فرم تبدیل شده‌ی عبارت p را که قبلاً محاسبه کرده‌ایم بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ \implies \frac{p(x)}{a} &= \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

حال اگر $\Delta < 0$ باشد عبارت $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ همواره مثبت است پس $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی اگر a مثبت باشد آنگاه $p(x)$ هم مثبت است و اگر a منفی باشد آنگاه $p(x)$ هم منفی است.
 حال اگر $\Delta = 0$ باشد عبارت حاصل بصورت $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ درمی‌آید و باز $\frac{p(x)}{a}$ مثبت است و مانند حالت قبل نتیجه حاصل می‌شود.

سرانجام اگر $\Delta > 0$ باشد پس $\sqrt{\Delta}$ با معنی است و داریم:

$$\frac{p(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \quad (*)$$

عبارت‌های داخل پرانتز که بلافاصله بعد از x آمده‌اند همان ریشه‌های معادله $p(x) = 0$ هستند. اگر قرار دهیم:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

آنگاه معادله (*) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{p(x)}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

بدون آنکه استدلال دچار نقصان شود می‌توان فرض کرد $x_1 < x_2$ است. (چرا) حال برای بررسی علامت $\frac{p(x)}{a}$ باید حالات زیر را بررسی کرد.

۱. اگر $x_1 < x < x_2$ باشد عبارت $(x - x_1)(x - x_2)$ منفی است و لذا $\frac{p(x)}{a}$ منفی است و این یعنی $p(x)$ و a از نظر علامت مخالف هم هستند. (این همان عبارت جدول تعیین علامت است)

۲. اگر $x < x_1 < x_2$ باشد و یا $x_1 < x_2 < x$ باشد عبارت $(x - x_1)(x - x_2)$ مثبت است و لذا $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی $p(x)$ و a هم علامت هستند.

همان‌طور که مشاهده کردید نتایج بدست آمده در این حالت منطبق بر نتایج بدست آمده از نمودارهای هندسی است.

درس را با بررسی چند مثال پی می‌گیریم.

مثال ۲۴.۴. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $p = 2x^2 - x - 3$

۲) $p = -x^2 + x + 2$

۳) $A = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$

۴) $p = (x^2 - 9)(3x - 1)$

۵) $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

۶) $C = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)(x - 3)}$

تمرین ۲۰.۴. تعیین علامت کنید.

۱) $p = \frac{1}{3}x - 1$

۲) $p = (6 - 3x)(2 + 2x)$

۳) $A = \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(4-x)(5-x)}$

۴) $B = \frac{x^2 + x + 2}{4 - 3x - x^2}$

۵) $C = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

۶) $D = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}(x^2 + 4x + 4)}$

۴.۴ نامعادله

یکی از مهم‌ترین کاربردهای تعیین علامت حل نامعادلات جبری است. برای یافتن مقادیری از x که در شرط $p(x) > 0$ صدق می‌کند تنها راه تعیین علامت p است. حتی ممکن است p لزوماً چندجمله‌ای نباشد. قبل از هر چیز خواص مقدماتی نامساوی‌ها را بیان می‌کنیم.

خواص اصلی نامساوی‌ها

$$۱) a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$۲) a \leq b \implies \begin{cases} c > 0 \implies ac \leq bc \\ c < 0 \implies ac \geq bc \end{cases}$$

$$۳) a \leq b \ \& \ b \leq c \implies a \leq c$$

$$۴) 0 < a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$$

$$۵) a \leq b < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$$

$$۶) a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

مثال ۲۵.۴. نامساوی $-8x + 3(x - 2) > -x + 2$ را حل کنید و مجموعه جواب آن را بصورت بازه نمایش دهید.

مثال ۲۶.۴. نامعادله $\frac{1}{3} < \frac{2x+3}{5} \leq \frac{2}{3}$ را حل کنید.

مثال ۲۷.۴. حدود پارامتر m را طوری تعیین کنید تا معادله درجه دوم $x^2 + mx + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد.

مثال ۲۸.۴. سهمی $y = x^2 + ax + b$ محور طولها را در دو نقطه با طول‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند. اولاً مقادیر a, b را بیابید و ثانياً معین کنید که نمودار این سهمی در چه بازه‌ای زیر خط $y = -3$ قرار می‌گیرد.

مثال ۲۹.۴. نامعادله $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$ را حل کنید.

مثال ۳۰.۴. نامعادله $\frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}$ را حل کنید.

مثال ۳۱.۴. نامعادله $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}$ را حل کنید.

مثال ۳۲.۴. دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 3 \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۳۳.۴. نامعادله‌ی $\frac{(x-4)(x^2-5x+6)(x^2+x+2)}{(-2x^2+x-5)(x^2-2x+1)} < 0$ را حل کنید.

مثال ۳۴.۴. حدود m را چنان تعیین کنید تا عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ برای هر مقدار x مثبت باشد.

مثال ۳۵.۴. نامعادله‌ی $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} < 1$ را با شرط $x > 0$ حل کنید.

تمرین ۲۱.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $-1 < \frac{x+1}{1-x} \leq 2$ را بیابید.

تمرین ۲۲.۴. حدود m را چنان بیابید که نابرابری زیر همواره درست باشد.

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -1$$

تمرین ۲۳.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $(2 - \sqrt{3})^2 + x < (2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{x}}$ با شرط $x > 0$ را بدست آورید.

تمرین ۲۴.۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{3-x^2}{x} > 2$$

$$۲) \frac{2x-1}{x} < 1$$

$$۳) \frac{3x^2-3x}{x^3-1} > 1$$

$$۴) -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2}$$

$$۵) \frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$$

$$۶) \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x+4}$$

$$۷) \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} > \frac{2x+4}{x-2}$$

$$۸) (x + \sqrt{x})(2x^2 + x - 15) < 0$$

تمرین ۲۵.۴. اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ برای هر مقدار x منفی باشد حدود تغییرات a را بدست آورید.

تمرین ۲۶.۴. نامعادله $\frac{5}{3}x + 2 \leq 2x - 1 \leq 3x + 1$ را حل کنید.

تمرین ۲۷.۴. نامعادله‌ی $\frac{1}{2x^2+x+1} \geq \frac{1}{x^2+1}$ را حل کنید. (ببینید امکان معکوس کردن طرفین نامعادله وجود دارد؟)

۵.۴ قدرمطلق و معادلات و نامعادلات قدرمطلق

در کلاس نهم با قدرمطلق آشنا شده‌اید. یادآوری می‌کنیم که قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۴. قدر مطلق x را که با نماد $|x|$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۳.۴.۴. قدرمطلق عبارت‌های زیر را حساب کنید.

۱) $|1 + \sqrt{2}|$

۲) $|1 + t^2|$

۳) $|1 - \sqrt{2}|$

۴) $\left|1 - \frac{\pi}{3}\right|$

مهم‌ترین خواص قدرمطلق ها

۱) $|u| = 0 \implies u = 0$

۲) $|u| = a \implies u = \pm a \quad , a > 0$

۳) $|u| \leq a \implies -a \leq u \leq a \quad , a > 0$

۴) $|u| \geq a \implies u \geq a \text{ یا } u \leq -a \quad , a > 0$

۵) $u^2 \leq a^2 \iff |u| \leq a \iff -a \leq u \leq a \quad , a > 0$

۶) $u^2 \geq a^2 \iff |u| \geq a \iff u \geq a \text{ یا } u \leq -a \quad , a > 0$

۷) $\begin{cases} |u| = u \iff u \geq 0 \\ |u| = -u \iff u \leq 0 \end{cases}$

۸) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ نامساوی مثلثی

۹) $|ab| = |a||b| \quad \& \quad \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

مثال ۳۷.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x^3 - 9x| = 0$$

$$۲) |3x - 5| = 4$$

$$۳) |2x - 1| < 1$$

$$۴) |1 - x| \geq 2$$

$$۵) |x^2 + x - 2| = 2 - x - x^2$$

$$۶) |2x - 1| < x$$

مثال ۳۸.۴. ثابت کنید $|a - b| = |b - a|$.

مثال ۳۹.۴. فرض کنید $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ با این مفروضات ثابت کنید $|ab - c| < 20$.

مثال ۴۰.۴. در نامساوی مثلثی چه زمانی تساوی رخ می‌دهد؟ یعنی تحت چه شرایطی روی a , b نتیجه می‌شود:
 $|a + b| = |a| + |b|$.

مثال ۴۱.۴. معادله‌ی $|x^2 - 1| + |2 - x^3| = 1$ را حل کنید.

مثال ۴۲.۴. معادله‌ی $|x - 1| + |x + 1| = 2$ را حل کنید.

مثال ۴۳.۴. نامعادله‌ی $|x^3 - x| \leq x$ را حل کنید.

مثال ۴۴.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x - 1| + |x + 3| > 2$ را بدست آورید.

تمرین ۲۸.۴. حاصل قدرمطلق‌های زیر را بدست آورید.

$$۱) |\sqrt{7} - 3|$$

$$۲) |\sqrt{2} + \sqrt{3} - \pi|$$

$$۳) |\sqrt{10} - 3|$$

$$۴) |\sqrt{2} - 1.41|$$

$$۵) |\pi - 3.14|$$

$$۶) |1 - 2^{\pi}|$$

تمرین ۲۹.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |b(b - 1)| = b$$

$$۲) |b| + |b - 1| = 0$$

$$۳) |b - 1| + |b| = b$$

$$۴) |x^2 - 1| < 1$$

$$۵) 2 \leq |b| \leq 3$$

$$۶) |x| + x = 2$$

تمرین ۳۰.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x| - x = ۳$$

$$۲) |x| + ۱ = ۱$$

$$۳) |x| + x = ۱$$

$$۴) |x| > x + ۲$$

$$۵) |x| - |x + ۱| = ۱$$

$$۶) |x| + |x + ۲| = ۳$$

$$۷) |x| = \frac{1}{x}$$

$$۷) |x^2 - x| < x$$

$$۹) \left| a - \frac{1}{a} \right| = |a - ۱|$$

$$۱۰) |۳x - ۵| = |x + ۲|$$

تمرین ۳۱.۴. به ازای چه مقدار m همواره رابطه $mx^2 - 2(m-1)x + 1 > 0$ همواره برقرار است؟

تمرین ۳۲.۴. به کمک تعیین علامت نامساوی بسیار مهم و کلیدی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{cases} x > 0 \implies x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ x < 0 \implies x + \frac{1}{x} \leq -2 \end{cases}$$

تمرین ۳۳.۴. به کمک رابطه‌ی تمرین قبل کمترین مقدار عبارات زیر را بیابید.

$$A = \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} \quad B = \frac{x^4 + 2}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

تمرین ۳۴.۴. حل کنید.

$$۱) \frac{1}{x - x^2} > ۴$$

$$۲) ۴ + x^2 > ۳۰ - x^2$$

$$۳) \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+1}}$$

$$۴) (x^2 + 2\sqrt{2}x + 2)(x^2 - 4) \leq 0$$

$$۵) m^3 x^2 + mx + \frac{1}{m} < 0 \rightarrow m = ?$$

$$۶) 2x^2 - (a-3)x + \frac{1}{8} > 0 \rightarrow a = ?$$

$$۷) x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0$$

$$۷) x^4 - 3x^2 < 4$$

$$۹) \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} < 0$$

$$۱۰) x(x+1)(x+2)(x+3) \leq 24$$

۶.۴ تست‌های فصل چهارم

۱- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x - 1) < |x| \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $\{x: -1 < x < 1\}$ (۲) $\{x: -2 < x < 2\}$ (۳) $\{x: 0 < x < 2\}$ (۴) $\{x: -2 < x < 1\}$

۲- در کدام فاصله نامساوی $(x - 1)(2 - x) > 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < -1$ (۲) $x < 1$ (۳) $x > 2$ (۴) $1 < x < 2$

۳- اگر $A = \{x | x > 5\}$ و $B = \{x | x < -1\}$ آنگاه علامت عبارت $x(x - 2)(x - 4)$ بر A و B کدام است؟
 (۱) بر A منفی و بر B مثبت
 (۲) بر A مثبت و بر B منفی
 (۳) بر A و B هر دو مثبت
 (۴) بر A و B هر دو منفی

۴- جوابهای معادله $\frac{1 - 2x}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2} = 0$ کدام است؟
 (۱) $1, -1$ (۲) صفر، 1 (۳) صفر، 8 (۴) $1, 8$

۵- به ازای چه مقادیری از x نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} < 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < 1$ (۲) $1 < x < 2$ (۳) $-1 < x < 2$ (۴) $-2 < x < -1$

۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - (4a + 4)x + (3a^2 + 6a + 3) = 0$ برابر 2 باشد ریشه دیگر کدام است؟
 (۱) -6 (۲) -3 (۳) 3 (۴) 6

۷- به ازای کدام مقدار a ریشه‌های معادله $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 2 = 0$ با هم برابرند؟
 (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۸- جوابهای دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 2x - \frac{x}{3} < 1 \\ \frac{x}{2} - 2 < x \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $x > -4$ (۲) $x < \frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5} < x < 4$ (۴) $-4 < x < \frac{3}{5}$

۹- محل تلاقی خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ کدام است؟
 (۱) $(0, 0)$ (۲) $(1, -1)$ (۳) $(1, 1)$ (۴) $(1, 1)$ و $(0, 0)$

۱۰- ریشه‌های معادله $7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$ کدام اند؟
 (۱) $-1, \frac{1}{2}$ (۲) $1, -\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

۱۱- اگر یک ریشه معادله $ax^2 - 7x + 357 = 0$ برابر ۱۷ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۱۲- عدد $\frac{2}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + bx - 4 = 0$ است ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) -۳ (۴) -۶

۱۳- مجموعه جواب دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases} 5x - 2 > 3 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\{x \mid x > 4\}$ (۲) $\{x \mid x < 4\}$ (۳) $\{x \mid x > 1\}$ (۴) $\{x \mid 1 < x < 4\}$

۱۴- کدام مجموعه، جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 10 - 5x < 0 \\ \frac{x}{2} + 2 > x \end{cases}$ است؟

- (۱) $\{x: 2 < x < 4\}$ (۲) $\{x: 2 < x < 5\}$ (۳) $\{x: 4 < x < 5\}$ (۴) $\{x: 5 < x < 10\}$

۱۵- اگر $a > b > 0$ ، $c < d < 0$ کدام نامساوی همواره صحیح است؟

- (۱) $ac > bd$ (۲) $ac < bd$ (۳) $ad < bc$ (۴) $ad > bc$

۱۶- ۴ برابر عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کمتر است معکوس آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{-8}{9}$ (۴) $\frac{-9}{8}$

۱۷- در معادله درجه دوم $3x^2 + mx - 20 = 0$ یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{5}{3}$ است ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۸- مجموعه همه جوابهای نامعادله $\frac{2\sqrt{x+2}}{3\sqrt{x+1}} > 1$ در کدام فاصله است؟

- (۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $[0, 1)$

۱۹- اگر به ازای همه مقادیر m ، $4x^2 - 2mx + 4m^2 \geq 0$ باشد، آنگاه حدود m کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) \emptyset (۳) $|m| \leq 2$ (۴) $|m| \geq 2$

۲۰- فرض کنیم a و b مختلف‌العلامه باشند و $a < b$ در این صورت کدام نامساوی همواره برقرار است؟

- (۱) $a^2 < b^2$ (۲) $a^3 < b^3$ (۳) $b^2 < a^3$ (۴) $b^3 < a^3$

۲۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ کدام است؟

(۱) $\{x \mid x \leq 1\}$ (۲) $\{x \mid x < 1\}$ (۳) $\{x \mid x \geq 1\}$ (۴) $\{x \mid x > 1\}$

۲۲- فرض کنید p و q و r اعداد حقیقی و $r < 0$, $pq \neq 0$, $pr > qr$. آنگاه همواره :

(۱) $-p > -q$ (۲) $-p > q$ (۳) $q > -p$ (۴) $p > q$

۲۳- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است مجموع این دو عدد کدام است؟

(۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۵ (۴) ۴۷

۲۴- نسبت دو عدد برابر $\frac{3}{5}$ و مجموع مربعاتشان ۱۶۶۶ است. مجموع دو عدد کدام است؟

(۱) ۴۵ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۶۵

۲۵- اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام است؟

(۱) $-2 \leq m \leq 1$ (۲) $1 \leq m \leq 2$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $-3 \leq m \leq 2$

۲۶- مجموعه جوابهای حقیقی نامعادله $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > \frac{3}{4}x(x-1)^2$ کدام است؟

(۱) $\{x : x > -3\}$ (۲) $\{x : x < -1\}$ (۳) $\{x : x < -2\}$ (۴) $\{x : -3 < x < -1\}$

۲۷- دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن مقدار ۹ واحد کمتر است. این مقدار کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۲۸- تعداد جوابهای معادله‌ی $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x-4}$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۹- حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچکتر ۳۲ واحد بیشتر است مجموع آن دو عدد کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۱۹ (۳) ۱۷ (۴) ۱۵

۳۰- حاصلضرب دو عدد فرد متوالی ۳۲۳ است مجموع این دو عدد کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به طوری که $0 < x < y$: آنگاه:

(۱) $\frac{-1}{x} < \frac{-1}{y}$ (۲) $-x < -y$ (۳) $-x + y < 0$ (۴) $\frac{-1}{y} < \frac{-1}{x}$

۳۲- اگر a و b متضاد علامه و ناصفر باشند، حاصل عبارت $4 - (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ همواره کدام است؟
 (۱) مثبت (۲) منفی (۳) کوچکتر یا مساوی صفر (۴) بزرگتر یا مساوی صفر

۳۳- مجموعه جوابهای نامعادله $|x|(x^2 - 3x + 2) \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $[1, 2]$ (۲) $\{0\} \cup [1, 2]$ (۳) $[-2, -1]$ (۴) $\{0\}, [-2, -1]$

۳۴- مجموعه جوابهای $x^4 - 1 \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, +1]$ (۲) $[-1, +1]$ (۳) $[-1, +1]$ (۴) $[-1, +\infty)$

۳۵- عدد ۳۶ را به دو قسمت چنان تقسیم کرده‌ایم که حاصلضرب آن دو ماکزیمم است. آن دو قسمت کدامند؟
 (۱) ۱۲ و ۲۴ (۲) ۱۶ و ۲۰ (۳) ۱۸ و ۱۸ (۴) ۲۲ و ۱۴

۳۶- مجموعه جوابهای نامعادله $(x^2 - 4)(x^2 + \sqrt{2}x + 2) \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (۳) $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$ (۴) $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$

۳۷- حدود تغییرات x ، در نامعادله $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + x + 1) > 0$ کدام است؟
 (۱) $1 < x < 3$ (۲) $-3 < x < -1$ (۳) $x > 3$ یا $x < 1$ (۴) $x > -1$ یا $x < -3$

۳۸- کمترین مقدار عبارت $x^2 - x + 2$ وقتی که x تغییر می‌کند، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۳۹- کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصله زیر منفی است؟
 (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $(2, \infty)$

۴۰- جواب نامعادله $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ کدام است؟
 (۱) $-4 < x < 4$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $x > 2$ یا $x < -2$ (۴) $x > 4$ یا $x < -4$

۴۱- جوابهای نامعادله $\frac{3x^2 - 3x}{x - 1} > 1$ کدام است؟
 (۱) $R - \{1\}$ (۲) \emptyset (۳) $\{x : x > 1\}$ (۴) $\{x : x < 1\}$

۴۲- حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد، ۴۰ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۳- اگر $x \geq 3$ ، مجموعه جوابهای نامعادله $|x - 3| - 2 \leq x^2$ کدام است؟
 (۱) $\{x : 3 \leq x \leq 4\}$ (۲) $\{x : 3 \leq x \leq 5\}$ (۳) $\{x : x \leq 4\}$ (۴) $\{x : x \geq 5\}$

۴۴- اگر $\forall a, b \in \mathbb{R} ; a < b < 0$ ، آنگاه کدام نامساوی نادرست است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ (۲) $a^{2n} > b^{2n}$
 (۳) $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$ (۴) $\frac{-1}{a} < \frac{-1}{b}$

۴۵- مجموعه جواب نامعادله $|x - 1| - 2x > 8$ کدام است؟

(۱) $\{x : x > 7\}$ (۲) $\{x : x > 9\}$
 (۳) $\{x : x > 7 \text{ یا } x < 1\}$ (۴) $\{x : x > 9 \text{ یا } x < 1\}$

۴۶- اگر $|a| < |b|$ و b^3 منفی باشد، آنگاه همواره:

(۱) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (۲) $a < b$ (۳) $a > b$ (۴) $a^2 > b^2$

۴۷- در معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ ، با شرط $b = c + 1$ ، یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت است؟

(۱) $-c$ (۲) $2b - 1$ (۳) $\frac{b}{2}$ (۴) c

۴۸- رابطه بین x ، y به صورت $2x + y = 16$ است. بیشترین مقدار xy وقتی x تغییر می‌کند، کدام است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۴۲

۴۹- جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} \geq x-1 \\ x(x-4) \leq x^2-16 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\{4\}$ (۲) \emptyset (۳) $\{x : x \geq 4\}$ (۴) $\{x : x \leq 4\}$

۵۰- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟

(۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۵۱- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصلضرب آنها می‌نیم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۲- جواب نامعادله‌ی $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟

(۱) $x < \frac{2}{3}$ (۲) $x > \frac{3}{4}$ (۳) $x > \frac{7}{6}$ (۴) $x < \frac{5}{4}$

۵۳- در معادله‌ی $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4}$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $-2 < x < 3$

۵۵- جواب نامعادله‌ی $2x > \frac{x-1}{x+1}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x : x < -1\}$ (۲) $\{x : x > -1\}$ (۳) $\{x : -1 < x < 1\}$ (۴) $\{x : -2 < x < -1\}$

۵۶- در یک قطعه زمین اگر ۲۰ درخت میوه با فاصله‌های مساوی کاشته شود، پس از رشد کافی از هر درخت به طور متوسط ۶۰ کیلوگرم میوه برداشت می‌شود، به ازای هر درخت اضافی که کاشته شود، دو کیلوگرم از متوسط محصول آن کم می‌شود. حداکثر برداشتی با این فرضیه کدام است؟

- (۱) ۱۲۰۰ (۲) ۱۲۴۰ (۳) ۱۲۵۰ (۴) ۱۲۸۰

۵۷- جواب نامعادله زیر کدام است؟ $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$

- (۱) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ (۲) $-1 \leq x \leq 1$ (۳) $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (۴) $-2 \leq x \leq 1$

۵۸- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

- (۱) $m < -2$ (۲) $m > 2/5$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 < m < 2/5$

۵۹- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $\{a : 1 < a < 5\}$ (۲) $\{a : a < 1\}$ (۳) \emptyset (۴) \mathbb{R}

۶۰- جواب مشترک دو نامعادله $\frac{4x-1}{3} > 3x-2$ و $\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $-2 < x < 2$ (۲) $-4 < x < 1$ (۳) $-2 < x < 1$ (۴) $-4 < x < 2$

۶۱- بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

- (۱) ۹۵۸ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۸ (۴) ۹۸۸

۶۲- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-2| < 2x - x^2$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$

۶۳- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

۷.۴ کلید تست‌های فصل چهارم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۱
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۸
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۹
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۷
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۰
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۶۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۶