فصل ۶ : شمارش

درسنامه ۱ : اصل جمع و ضرب

بالاخره به زیباترین فصل کتابتون رسیدیم که البته خیلی برای یادگیری مبحث احتمال که در سه سال دبیرستان دارید مفیده!

هدف از این فصل، شمارش بدون شمردنه!!!

عجله نکن تا بگم، مثلا به چند طریق میتوانند ۶ نفر که دو نفر آنها برادرند دور یک میز گرد بنشینند به طوریکه دو برادر روبه روی هم باشند؟ پس از یادگیری این فصل در چند ثانیه جواب میدی۲۴ حالت در صورتیکه اگه بخواین روی کاغذ کل حالت ها رو یکی یکی بشماری هم خیلی زمانبره و هم امکان اشتباه زیاده.

خب حالا یه سوال دیگه، اگه شما دو جفت کفش و سه شلوار مختلف داشته باشید به چند طریق میتونید اونا رو بپوشید؟

آفرین به۶ طریق. یعنی ضرب کردیم که بهش، همون اصل ضرب یا اصل شمارش میگن که در واقع پایه و اساس بقیه فرمول های این فصله.

اصل ضرب (اصل شمارش) : اگر دو عمل مستقل از هم، یکی به m روش متمایز و دیگری به n روش متمایز، امکان پذیر باشند.

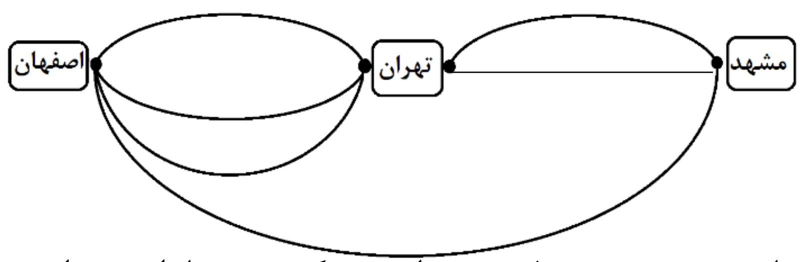
هردو عمل باهم (عمل اول و عمل دوم) به $m \times n$ روش امکان پذیر است.

✓تذکر : این اصل برای بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است: $m \times n \times k \times \dots$

اصل جمع: اگر یک عمل به دو روش امکان پذیر باشد(روش اول یا روش دوم)، به طوریکه برای روش اول m انتخاب و برای روش دوم n انتخاب ، وجود داشته باشد. آنگاه آن عمل به m + n روش امکان پذیر است.

✓*خلاصه بخوام بهتون بگم یا میشه همون جمع.......... و میشه همون ضرب!*

مثال۱: با توجه به مسیرهای شکل زیر:



الف) به چند طریق می توان از اصفهان به مشهد رفت به‌طوری که حتما از تهران عبور کنیم؟

ب) به چند طریق می توان از اصفهان به مشهد رفت ؟

ج) به چند طریق می توان از اصفهان به مشهد رفت و برگشت؟

د) به چند طریق می توان از اصفهان به مشهد رفت و برگشت، به طوری که مسیر برگشت با مسیر رفت متفاوت باشد؟

مثال ۲: به چند طریق می توان یک ساختمان ۴ طبقه را با ۵ رنگ مختلف رنگ آمیزی کرد به طوری که:

الف) هیچ دوطبقه ای، هم رنگ نباشند.

ب) هیچ دو طبقه ی مجاوری هم رنگ نباشند.

مثال ۳: از یک جامعه سه نفر را به تصادف انتخاب کرده ایم :

الف) تعداد کل حالت های ممکن برای ماه تولد این ۳ نفر را بدست آورید.

ب) به چند طریق ممکن است، هر ۳ متولد یک ماه از سال باشند؟

ج) به چند طریق ممکن است، هیچ کدام متولد یک ماه نباشند؟ (متولد سه ماه مختلف)

د) به چند طریق ممکن است، هر سه متولد یک ماه نباشند؟

ه) به چند طریق ممکن است، حداقل دو نفر آنها متولد یک ماه باشند؟

و) به چند طریق ممکن است، حداکثر دو نفر آنها متولد یک ماه باشند؟

ز) به چند طریق ممکن است، فقط دو نفر آنها متولد یک ماه باشند؟

نتیجه: با توجه به اصل ضرب داریم :

کل حالت های مختلف در پرتاب n سکه : $۲ \times ۲ \times ... \times ۲ = ۲^n$

کل حالت های مختلف در پرتاب m تاس : $۶ \times ۶ \times ... \times ۶ = ۶^m$

کل حالت های مختلف در پرتاب n سکه و m تاس با هم : $۲^n \times ۶^m$

کل حالت های ماه تولد n نفر : $۱۲ \times ۱۲ \times ... \times ۱۲ = ۱۲^n$

درسنامه ۲: جایگشت

تعریف فاکتوریل :

$$n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times (n-۳) \ldots ۳ \times ۲ \times ۱$$

$$۰! = ۱, ۱! = ۱, ۲! = ۲, ۳! = ۶, ۴! = ۲۴, ۵! = ۱۲۰, ۶! = ۷۲۰, ۷! = ۵۰۴۰$$

تعریف جایگشت : به هریک از حالت های قرار گرفتن اشیا کنارهم، یک جایگشت آن ها گفته می‌شود.

نکته: تعداد جایگشت‌های مختلف

الف) تعداد جایگشت‌های n شی متمایز در n جایگاه در یک ردیف : n!

ب) تعداد جایگشت‌های n فرد، دور یک میزگرد : $(n-۱)!$

ج) تعداد دستبندهای مختلف با n مهره متمایز : $\frac{(n-۱)!}{۲}$

تعداد کلیدهای مختلف با n کلید مختلف :

مثال۴: به چند طریق می توان ۳ ایرانی و ۴ خارجی را :

الف) در یک ردیف کنار هم نشاند.

ب) دور یک میزگرد کنار هم نشاند.

ج) روی ۱۰ صندلی مختلف نشاند.

نکته: جایگشت اشیا دارای عضو یکسان (اصل تقسیم!)

تعداد جایگشت های n شی در n جایگاه، که k۱ تای آنها از نوع اول، k۲ تا از نوع دوم و .... باشند، برابر است با :

$$\frac{n!}{k_1! \times k_2! \times \dots}$$

مثال۵ : حروف کلمه DAMDARAN چند جایگشت مختلف دارد؟

۱) ۶۷۲۰ ۲) ۳۳۶۰ ۳) ۲۴۸۰ ۴) ۱۶۸۰

مثال۶ : با حروف کلمه RANGIN چند کلمه رمز ۳ حرفی می توان ساخت؟ (سراسری انسانی ۹۴ داخل کشور)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۱۲۰

مثال۷: با ارقام ۱،۱،۱،۲،۲و۳ :

الف) چند شش رقمی می توان ساخت؟

ب) چند سه رقمی می توان ساخت؟

نکته: روش بسته بندی کردن: در مسائلی که قرار است یک سری اشیا کنار هم (چسبیده به هم) قرار بگیرند، می توان آنها را در یک بسته فرضی قرار داد و یک شی فرض کرد و جایگشت کل را در جایگشت اشیا داخل بسته ضرب کرد.

مثال۸ : به چند طریق ممکن است، ۷نفر که ۳ نفر آنها برادرند در یک صف کنار هم قرار بگیرند بطوریکه ۳برادر کنار هم باشند؟

۱) $7!$ ۲) $6!$ ۳) $4! \times 3!$ ۴) $6! \times 3!$

مثال۹: حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟ (کنکور تجربی۸۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

نکته : کنار هم قرار نگرفتن هیچ دو شیء هم نوعی(یک در میان)

الف) تعداد حالت های یک در میان قرار گرفتن n شی متمایز با m شی متمایز دیگر (اختلاف تعداد آنها یک واحد است)برابر است با: $n! \times m!$

ب) تعداد حالت های یک در میان قرار گرفتن n شی متمایز با n شی متمایز دیگر (تعداد یکسان) برابر است با : $2n! \times n!$

ج) برایریک درمیان قرار گرفتن اشیا دارای عضو یکسان علاوه از اصل تقسیم هم استفاده میکنیم: $\frac{\text{الف یا ب}}{\text{جایگشت یکسانها}}$

✓ برای درک و اثبات نکته بالا فیلم آموزشی مربوطه رو حتما ببینید.

نکته: قرار نگرفتن نوعی از اشیا کنار هم: کافی است ابتدا اشیائی که مجاز اند کنار هم قرار بگیرند را چیده و سپس جاهای خالی بین آنها $(n+1)$ را در نظر بگیریم که اشیا دیگر که قرار است کنار هم نباشند در آن جاهای خالی قرار می گیرند، در آخر باید جایگشت های هر کدام را جداگانه بدست آورد و در هم ضرب کرد.

تذکر : قرار نگرفتن هیچ دو شی هم نوعی کنار هم، همان یک در میان است که در نکته ۵ بیان شده است.

✓ برای درک و اثبات نکته بالا فیلم آموزشی مربوطه رو حتما ببینید.

مثال ۱۰: سه کتاب ریاضی متمایز و چهار کتاب ادبی متمایز را به چند طریق میتوان در یک قفسه در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوریکه:

الف) بدون محدودیت.

ب)کتاب های ریاضی کنار هم باشند.

ج) کتاب های هم نوع کنار هم باشند.

د) هیچ دو کتاب هم نوعی کنار هم نباشند.

ه) هیچ دو کتاب ریاضی کنار همپنباشند.

و) حداقل دو کتلب ریاضی کنار هم باشند.

ز) حداکثر دو کتاب ریاضی کنار هم باشند.

مثال۱۱: با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳ و ۴ چند عدد هفت رقمی می توان ساخت به طوری که ارقام زوج و فرد یک در میان قرار بگیرند؟

۱) ۳ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

نکته : جایگشت با مکان های شرط دار :

ابتدا حالت های مربوط به مکان های شرط دار و سپس بقیه حالت ها را مشخص می کنیم.

مثال۱۲: تعداد جایگشت های حروف کلمه EARNEST را طوری بیابید که :

الف) حروف N در وسط باشد. (انسانی ۹۱)

ب) حروف E در ابتدا و انتها باشند.

مثال۱۳: با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه چهار حرفی (با معنی یا بی معنی) می توان ساخت به طوری که با حرف نقطه دار شروع شود؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

مثال۱۴: با ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶ :

الف) چند عدد چهار رقمی زوج می توان ساخت؟

ب) چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام متمایز می توان ساخت؟

ج) چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و مضرب ۵ می توان ساخت؟

د) چند عدد چهار رقمی فرد با ارقام متمایز و بزرگتر از ۴۰۰۰ می توان ساخت؟

مثال۱۵: چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ (کنکور تجربی ۹۲)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

مثال ۱۶: چند عدد چهار رقمی زوج و بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۱۷۹۲ ۲) ۱۲۳۲ ۳) ۳۵۰۰ ۴) ۳۴۹۹

مثال۱۷: با ارقام ۰، ۰، ۰، ۲، ۲، ۳، ۵ و ۵ :

الف) چند عدد فرد هشت رقمی می توان ساخت؟

ب) چند عدد فرد هشت رقمی مضرب ۵ می توان ساخت؟

فصل ۶ : شمارش

درسنامه۳: ترکیب

✓درسنامه ۲ مربوط به جایگشت بود که به اون ترتیب یا تبدیل هم میگن، چون ترتیب در این مسائل مهم و تأثیر گذاره. مثل عدد سازی و کلمه سازی و...! بچه ها از شما پنهون نباشه این جایگشت **r** شئ از **n** شئ یه فرمول هم داشت که من اونجا عمدا نگفتم چون برای حل سوال لازمش نداشتیم و مسقیما با اصل ضرب سوالات رو حل میکردیم، که سریعتر و راحتر بود. اما اینجا فرمولش رو آوردم . برعکس «جایگشت» که دراون ترتیب مهمه، «ترکیب» رو داریم که ترتیب در اون مهم نیست :

نکته: فرمول جایگشت و ترکیب **r** شئ از **n** شئ

الف) جایگشت یا ترتیب یا تبدیل

تعداد جایگشت های r شی از n شی متمایز که ترتیب در آن مهم باشد، برابر است با :

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تذکر: **همانطور که در بالا گفته شد، معمولاً در حل مسائل به جای استفاده از فرمول فوق از همان اصل ضرب و فاکتوریل استفاده می کنیم.**

ب) ترکیب

تعداد روش های انتخاب r شی از n شی متمایز که ترتیب در آن مهم نباشد، برابر است با:

$$\binom{n}{r}=C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{و} \quad p(n,r)=\binom{n}{r}\times r! \quad \text{و} \quad C(n,r)=\frac{p(n,r)}{r!}$$

مثال۱۸: به چند طریق می توان از بین ۱۰ دانش آموز ۳ نفر را :

ب) برای شرکت در المپیادهای ریاضی، فیزیک و شیمی انتخاب کرد؟ (برای سه شغل مختلف

الف) برای یک اردو (یا انجمن) انتخاب کرد؟

مثال۱۹: $C(n\,,r) = ۳۵$ و $p(n\,,r) = ۲۱۰$ باشد، n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

مثال۲۰: اگر $\frac{p(n\,,۴)}{C(n-۱\,,۴)} = ۲۶$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

نکته : چند ویژگی در ترکیب:

الف) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ ← مثال : $\binom{۱۰}{۴} = \binom{۱۰}{۶} = \frac{۱۰!}{۶!\,۴!}$

ب) $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ ← $a = b$ یا $a + b = n$

ج) $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+۱} = \binom{n+۱}{r+۱}$

نکته : روش های سرعتی در محاسبه برخی ترکیب ها :

۱) $\binom{n}{n} = \binom{n}{۰} = ۱$ ← $\binom{۵}{۵} = \binom{۵}{۰} = ۱$

۲) $\binom{n}{۱} = \binom{n}{n-۱} = n$ ← $\binom{۵}{۴} = \binom{۵}{۱} = ۵$

۳) $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\binom{n}{۳} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}$

نکته : وقتی $\binom{n}{r}$ بیشترین مقدار را دارد که r وسط باشد :

اگر n زوج باشد $r=\frac{n}{۲}$ ← و اگر n فرد باشد ← $r=\frac{n\pm ۱}{۲}$

✓ *میدونم نکات بالا یه جورین، واسه همین براتون فیلمش رو هم گذاشتم. برای درک نکات بالا حتما فیلم آموزش ترکیب رو ببینید.*

مثال۲۱: از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی و ۲دانش آموز انسانی ، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار در یک آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که:

الف) یک نفر از آنها دانش آموز تجربی باشد؟

ب) لااقل یک نفر از آنها دانش آموز تجربی باشد؟

ج) لااقل دو نفر از آنها دانش آموز تجربی باشند؟

د) حداکثر یکی از آنها تجربی باشد؟

ه) حداکثر دو نفر آنها تجربی باشد؟

و) از هر رشته ایی حداقل یک نفر بین آنها باشد؟

ز) هر سه هم رشته ایی نباشند؟

مثال۲۲: اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و در هر ردیف ۴ صندلی باشد، به چند طریق ۳ دانش آموز سال اول و ۲ دانش آموز سال دوم می توانند روی آنها بنشینند به طوری که اولی ها در ردیف دوم باشند؟

۱) ۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۸۰

مثال۲۳: با ارقام ۱، ۲، ۳، ... ۸ و ۹ به چند طریق می توان یک عدد پنج رقمی ساخت به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟ (ریاضی۹۴ داخل)

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰ ۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

مثال۲۴: به چند طریق می توان از بین ۱۰ پرسش موجود، ۸ پرسش را انتخاب کرد به طوری که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟ (ریاضی ۸۹ داخل)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵

مثال ۲۵ : پنج حرف از هشت حرف کلمه ی BUSINESS را با جایگشت های متمایز در کنار هم قرار می دهیم. تعداد گروه‌هایی که هر سه S در آنها موجود باشند، کدام است؟ (سراسری انسانی ۹۲ داخل)

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۴۰

نکته : مسئله لنگ کفش ها

برای انتخاب k لنگه کفش از بین n جفت کفش به طوری که هیچ کدام جفت نباشند، کافی است ابتدا k جفت کفش از n جفت انتخاب کرده و در تعداد حالتهای انتخاب یک لنگه از هر جفت انتخابی ضرب کنیم.

مثال۲۶: به چند طریق می توان از بین ۵ جفت کفش متمایز، ۳ لنگه کفش طوری انتخاب کرد که هیچ کدام با هم جفت نشوند؟

۱) ۴۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۲۴۰

مثال۲۷: از هر یک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند به چند طریق می توان سه دانش آموز انتخاب کرد به طوری که:

الف) دو به دو غیر هم مدرسه ای باشند؟ (کنکور سراسری تجربی ۹۲)

ب) هیچ کدام هم مدرسه ای نباشند و برای ۳ مسابقه مختلف انتخاب شده باشند؟

ج) لااقل دونفر آنها هم مدرسه ای باشند؟

د) هر سه هم مدرسه‌ای نباشند؟

مثال۲۸: از هر یک از ۸ مدرسه علاقه مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفره (۲نفر در مقابل ۲نفر) انتخاب شده اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود به طوری که دونفر هم یار هم از یک مدرسه باشند؟ (ریاضی ۹۲ خارج)

۱) ۴۲۰۰ ۲) ۵۴۰۰ ۳) ۵۶۰۰ ۴) ۶۳۰۰

نکته : مسئله گروه بندی کردن (اِفراز کردن)

برای گروه اول به تعداد مورد نیاز از کل انتخاب می کنیم و برای بقیه گروه ها، به ترتیب از تعداد باقی مانده تعداد لازم را انتخاب می کنیم. فقط باید توجه کرد اگر k گروه یکسان باشند و بدون نامگذاری، باید بر $k!$ تقسیم کرد.

مثال۲۹: به چند طریق می توان ۸ نفر را به دو تیم سه نفره و یک تیم دو نفره تقسیم کرد؟

۱) ۵۶۰ ۲) ۲۸۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۷۰

مثال۳۰: به چند طریق می توان ۶ عدد اسباب بازی متمایز را بین سه بچه با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ (انسانی ۹۳ داخل)

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

مثال۳۱: به چند طریق می توان مجموعه ی $A = \{a ,b ,c ,d\}$ را به دو زیر مجموعه ی غیر تهی افراز کرد؟ (اولاً اشتراک نداشته باشند، ثانیاً اجتماع آنها A شود)؟

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

نکته : مسئله تعداد زیر مجموعه ها

الف) تعداد کل زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با : $\binom{n}{r}$

ب) تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با : 2^n

چون هر عضو دو حالت دارد، می تواند عضو زیر مجموعه باشد یا نباشد.

نتیجه : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

مثال ۳۲: مجموعه‌ی $A = \{a ,b ,c ,d ,e$ و $f \}$:

الف) چند زیر مجموعه دارد؟

ب) چند زیر مجموعه دارد به طوری که حتما شامل عضو a باشند اما شامل عضو c و f نباشند؟

ج) چند زیر مجموعه چهار عضوی دارد؟

د) چند زیر مجموعه چهار عضوی دارد به طوری که حتماً شامل عضو b باشد اما شامل عضو c نباشد.

نکته : تعداد تابع ها از A به B : $A \Rightarrow B$

کافی است مولفه های اول را از دامنه داده شده نوشته و تعداد حالت های ممکن برای مولفه های دوم را در هم ضرب کنیم.

مثال ۳۳: اگر $A = \{۱ ،۲ ،۳و۴\}$ و $B = \{۱ ،۲ ،۳ ،۴ و ۵\}$:

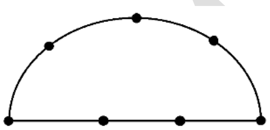
الف) چند تابع از A به B می توان نوشت؟

ب) چند تابع از A به B می توان نوشت به طوری که $f(۱) \neq ۳$ و $f(۴) = ۲$ باشد؟

نکته : حذف حالت های نامطلوب (اصل تفریق)

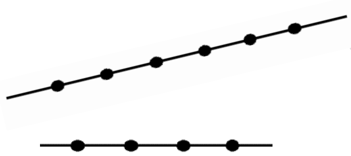
مثال ۳۴: تاسی را دو مرتبه پرتاب می کنیم، در چند حالت ممکن است مرتبه دوم عددی بزرگتر بیاید؟

۱) ۱۸   ۲) ۱۵   ۳) ۱۲   ۴) ۶



مثال ۳۵: با هفت نقطه شکل مقابل چند مثلث متمایز می توان ساخت؟

۱) ۳۵   ۲) ۳۴   ۳) ۳۱   ۴) ۳۰



مثال ۳۶: با ۱۰ نقطه شکل مقابل:

الف) چند مثلث متمایز می توان ساخت؟

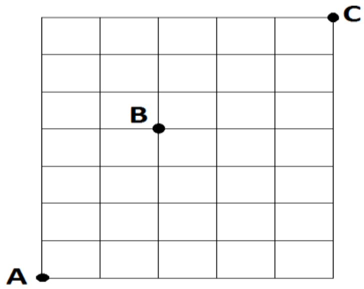
ب) چند چهارضلعی محدب می توان ساخت؟

نکته : تعداد کوتاهترین مسیرها در صفحه شطرنجی $m\times n$:

$$\frac{(m+n)!}{m!\times n!}$$

برای رفتن از A به B وقتی کوتاهترین مسیر طی می شود که فقط حرکت به راست و بالا باشد.

مثال ۳۷: با توجه به صفحه شطرنجی مقابل می خواهیم در کوتاهترین مسیر ممکن از A به C برویم به طوری که حتماً از B عبور کنیم. به چند طریق این حرکت امکان پذیر است؟



۱) ۳۵ ۲) ۳۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۷۵

شمارش تعداد مربع ها و مستطیل ها در صفحه شطرنجی

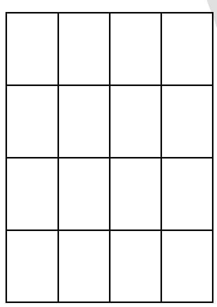
تعداد مربع ها در یک صفحه شطرنجی $n \times n$ برابر است با:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تعداد مستطیل ها در یک صفحه شطرنجی $n \times m$ برابر است با:

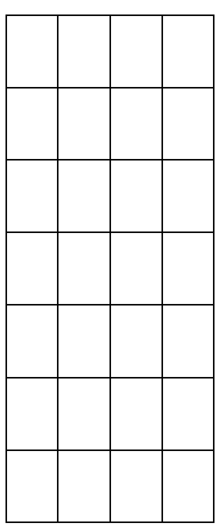
$$(1+2+\dots+n)(1+2+\dots+m) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{یا} \quad \binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$$

مثال ۳۸: در شکل مقابل چند مربع دیده می شود؟



۱) ۱۶ ۲) ۳۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

مثال ۳۹: در شکل مقابل چند مستطیل وجود دارد که مربع نباشند؟



۱) ۲۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۲۰ ۴) ۱۸۰