

حل معادله

روش تجزیه: برخی از معادله ها به کمک تجزیه به روش های زیر حل می شوند.

الف) فاکتور گیری:

$$x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0 \rightarrow x=0, x=-3$$

ب) اتحاد مربع تفاضل و مجموع دو جمله ای:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$$

پ) اتحاد مزدوج:

$$x^2 - 25 = 0 \rightarrow \begin{cases} (x-5)(x+5) = 0 \rightarrow x=5, x=-5 \\ x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5 \end{cases}$$

ت) اتحاد جمله ی مشترک:

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \rightarrow (x+3)(x-7) = 0 \rightarrow x=-3, x=7$$

نکته: برای نوشتن معادله ی درجه دوم که ریشه های مشخص دارد از اتحاد جمله مشترک استفاده می کنیم.

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۵ و -۲ باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases} x=5 \rightarrow x-5=0 \\ x=-2 \rightarrow x+2=0 \end{cases} \rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

نکته: در معادله ی $(x+a)^2 = k$

الف) اگر $k < 0$ باشد، معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

ب) اگر $k = 0$ باشد، معادله ریشه ی مضاعف دارد.

پ) اگر $k > 0$ باشد، معادله دو ریشه ی حقیقی دارد.

روش دوم: مربع کامل:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

۱. ابتدا قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می کنیم.

۲. اگر ضریب x^2 مخالف ۱ (یک) باشد دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می کنیم.

۳. با مقایسه قسمت دوم عبارت سمت راست با $2ab$ ، قسمت دوم را در ۲ ضرب و تقسیم می کنیم. با این کار جمله اول و دوم اتحاد مشخص می شود.

۴. سپس مربع جمله دوم را به طرفین تساوی اضافه می کنیم.

۵. به کمک اتحاد عبارت سمت چپ را به اتحاد تبدیل می کنیم.

۶. به کمک ریشه گیری معادله را حل می کنیم.

مثال: معادله ی روبرو را به روش تشکیل مربع حل کنید.

$$09126605143$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

پاسخ:

$$9x^2 + 3x = 2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9} \rightarrow 2ab = \frac{1}{3}x, (x \div 2) \rightarrow 2ab = 2x \cdot \frac{1}{6}x = 2x \cdot \frac{1}{6}x, (\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}) \rightarrow$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \rightarrow (x + \frac{1}{6})^2 = \frac{8+1}{36} = \frac{9}{36} \rightarrow x + \frac{1}{6} = \pm \frac{3}{6} \rightarrow x_1 = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$x_2 = -\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

روش کلی:

برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به روش زیر عمل می کنیم.

❖ ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را بدست می آوریم.

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \Delta}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است که برابر است با $x = -\frac{b}{2a}$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب ندارد.

مثال: معادله ی زیر را به روش فرمول کلی حل کنید.

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

پاسخ:

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 - 7}{6} = -2$$

نکته: اگر یکی از جواب های یک معادله ی درجه ۲ معلوم باشد، جواب دوم را به روش « تقسیم » می توان بدست آورد.

مثال: اگر $x=1$ یکی از ریشه های $2x^2 + 3x - 5 = 0$ باشد ریشه ی دیگر را بیابید.

پاسخ:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0, \div (x-1) \rightarrow (x-1)(2x+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 2x+5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

مسائل کاربردی:

09126605143

برای حل معادله های شامل عبارت های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت های معادله مخرج مشترک گیری، معادله ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ بدست می آید. با شرط $Q(x) \neq 0$ وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ سپس ریشه های معادله را بدست می آوریم. از بین ریشه های بدست آمده آنهایی قابل قبول هستند که در مخرج $Q(x)$ تعریف شده باشند.

مثال: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

پاسخ:

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0 \rightarrow \frac{(x-2)(x+3) - (x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)} = \frac{x^2+x-6-x^2+3x+4}{(x-4)(x+3)} = 0 \rightarrow \frac{4x-2}{(x-4)(x+3)} = 0 \rightarrow 4x-2=0 \rightarrow x=\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ق ق}$$

مثال: به ازای چه مقدار a معادله ی $\frac{x}{x-a} + \frac{x+a}{x} = \frac{7a}{2}$ دارای جواب $x=2$ است؟

پاسخ: عدد 2 را به جای x قرار می دهیم:

$$\frac{2}{2-a} + \frac{2+a}{2} = \frac{7a}{2} \rightarrow \frac{2}{2-a} + \frac{2+a}{2} - \frac{7a}{2} = \frac{4+4-a^2-14a+7a^2}{2(2-a)} = 0$$

$$6a^2 - 14a + 4 = 0 \rightarrow (a-1)(6a+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

چون هر دو جواب تعریف شده هستند پس قابل قبول اند.

مسئله های شامل معادلات عبارت های گویا:

۱- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) $x = 3$ جواب معادله $3x - 1 = 7$ می باشد.

ب) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باید $b \neq 0$ باشد.

پ) معادله $x^2 - 8 = 0$ به روش اتحاد جمله مشترک حل می شود.

ت) $x = 2, 3$ جواب معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ می باشند.

ث) معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ یک جواب دارد.

ج) مقدار Δ در معادله $4x^2 - 3x + 2 = 0$ برابر ۵- است.

۲- جمله های زیر را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) هر معادله که در آن a, b اعداد حقیقی و a مخالف صفر باشد معادله درجه اول است.

ب) روش بهتر حل معادله $x^2 - 10x + 25 = 0$ روش اتحاد است.

پ) جواب های معادله $(x - 1)^2 = 9$ برابر و هستند.

ت) اگر در معادله درجه دوم $\Delta > 0$ باشد معادله دارای می باشد.

ث) با ازای مقدار برای a در معادله $x^2 - 3x + a = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است.

ج) در معادله هایی شامل عبارت های گویا از بین ریشه های بدست آمده آن هایی را قبول می کنیم که کسر را صفر نکند.

۳- محیط مربعی که قطر آن $2\sqrt{2}$ است برابر است با :

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) ۸

۴- معادله $x^2 - 16x = 0$ به روش استفاده از راحتتر حل خواهد شد.

- (۱) عامل یابی (۲) اتحاد مزدوج (۳) اتحاد جمله مشترک (۴) اتحاد مربع دو جمله ای

۵- Δ در معادله درجه دوم با کدام عبارت برابر است؟

- (۱) $a^2 - bc$ (۲) $a^2 - 4bc$ (۳) $b^2 - ac$ (۴) $b^2 - 4ac$

۶- به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x = 1$ است؟

- (۱) -۱ (۲) +۲ (۳) -۲ (۴) +۱ و -۲

۷- قطر یک مربع $4\sqrt{10}$ است. محیط و مساحت آن را بیابید.

۸- عددی را بیابید که مربع آن از ۴ برابر آن عدد ۳ واحد بیشتر باشد؟

09126605143

$$x^2 - 10x = 0$$

۹- معادله های زیر را به روش عامل یابی (فاکتورگیری) حل کنید.

$$3a^2 - 21a = 0$$

۱۰- معادله های زیر را به روش اتحاد مربع دو جمله ای حل کنید.

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$4b^2 + 4b + 1 = 0$$

$$a - 4\sqrt{a} + 4 = 0$$

$$4y^2 + 20y + 25 = 0$$

۱۱- معادله های زیر را به روش اتحاد مزدوج و جمله مشترک حل کنید.

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$a^2 + 11a + 30 = 0$$

$$z^2 - 25 = 0$$

$$a^2 - 19 = 0$$

۱۲- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۳- و ۴ باشند.

۱۳- معادله درجه دومی بنویسید که فقط یک ریشه (۳-) داشته باشد.

۱۴- پاسخ معادله $(x + a)^2 = b$ را در حالت های مختلف بررسی کنید.

۱۵- معادله های درجه دوم زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$1 - 4a = 4a^2$$

$$2z^2 - 8z - 10 = 0$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 + 4x = 36$$

۱۶- معادله های زیر را به روش کلی حل کنید.

$$5x^2 + 10x = 0$$

$$a^2 + a + \frac{1}{4} = 0$$

$$6x^2 + 17x + 5 = 0$$

$$3y^2 + 12y + 12 = 0$$

فایده‌های



| | | |
|----------|--|----------|
| <p>۲</p> | <p>درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) هر معادله به صورت $ax + b = 0$ یک معادله درجه اول است. ب) عددی که دو برابر آن با مربعش برابر باشد خود ۲ است. پ) معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ به روش اتحاد جمله مشترک قابل حل است. ت) معادله $\frac{Q(x)}{P(x)}$ وقتی جواب دارد که $P(x) = 0$ باشد.</p> | <p>۱</p> |
| <p>۲</p> | <p>هر یک از جملات زیر را با اعداد یا کلمات مناسب کامل کنید. الف) برای اینکه عبارت $\frac{5a-3}{a+5}$ تعریف شده باشد باید a مخالف باشد. ب) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای جواب است. پ) برای اینکه معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنیم باید مقدار را اضافه و کم کنیم. ت) اگر ۵ برابر عددی را با مربع آن جمع کنیم حاصل ۲۴ خواهد شد. آن عدد است.</p> | <p>۲</p> |
| <p>۲</p> | <p>گزینه ی مناسب را انتخاب کنید. A) مساحت یک مربع 8 cm^2 است. محیط آن کدام است. الف) ۲ (ب) $8\sqrt{4}$ (ب) $8\sqrt{2}$ (ت) $2\sqrt{8}$ B) ریشه های معادله $x^2 - 81 = 0$ عبارتند از : الف) ۹ (ب) -۹ (پ) $-9, +9$ (ت) $-9, -81$ C) معادله $4x^2 + 5x - 4 = 0$ به صورت مربع کامل برابر است با : الف) $\left(x + \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{89}{64}$ (ب) $\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{64}{89}$ (پ) $\left(x + \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$ (ت) $\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{64}{25}$ D) به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{-x}{x-a}$ دارای جواب $x = 2$ است. الف) -۴ (ب) +۴ (پ) -۲ (ت) +۲</p> | <p>۳</p> |

| | | |
|-------------|--|----|
| 09126605143 | عددی را بیابید که وقتی مربع آن را از نصف آن کم کنیم حاصل برابر ۶۰ خواهد بود. | ۴ |
| ۱ | | |
| ۱ | قطر مربعی $\sqrt{10}$ می باشد . محیط آن مربع چقدر خواهد بود؟ | ۵ |
| ۲/۵ | هر یک از معادله های زیر را به کمک تجزیه و اتحاد حل کنید. الف) $x^2 - 25 = 0$ ب) $x^2 + 6x + 9 = 0$ پ) $x^2 - 2x - 8 = 0$ ت) $x^2 - 2x + 1 = 0$ ث) $(x - 4)^2 = 7$ | ۶ |
| ۱ | معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۳ و -۱ باشد. | ۷ |
| ۲ | معادله های درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید. الف) $x^2 + 8x + 12 = 0$ ب) $5x^2 - 10x + 3 = 0$ | ۹ |
| ۲ | جواب معادله های زیر را در صورت وجود به روش کلی به دست آورید. الف) $4x^2 - 5x - 6 = 0$ ب) $-x^2 - 2x - 3 = 0$ | ۱۰ |

| | | | |
|-------------|---|----------------------------------|----|
| 09126605143 | $\frac{x+3}{x} - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{5}{x+2}$ | معادله گویای روبه رو را حل کنید. | ۱۱ |
| ۲ | <p>به ازای چه مقدار a معادله $\frac{x-a}{a} - \frac{a}{x-a} = \frac{x}{x+1}$ دارای جواب $x = 5$ است؟</p> | | ۱۲ |
| ۱/۵ | <p>تفاضل معکوس دو عدد فرد متوالی برابر $\frac{2}{143}$ است. آن دو عدد کدامند؟</p> | | ۱۳ |