

# فصل دوم

## معادله درجه دوم

درس اول : مفهوم معادله

درس دوم : حل معادله درجه دوم

درس سوم : معادلات گویا

## درس اول : مفهوم معادله

**معادله :** به یک تساوی از عبارت های جبری که فقط به ازای مقادیر خاصی درست باشد ، معادله گفته می شود و به آن مقادیر جواب معادله یا ریشه معادله می گویند .

معادله ای که پس از ساده شدن به صورت  $ax+b=0$  در آید را معادله درجه اول می نامند که با روش حل آن آشنا هستیم.

سوال : بدون حل معادله  $5(x+2) = 7x - 4$  بگویید آیا  $x=3$  جواب معادله است ؟  $x=7$  چطور ؟

مسئله : در یک طرف کفه ترازویی ۳ کیلو سیب و در طرف دیگر آن ۴ کمپوت آناناس کاملاً هم وزن به علاوه یک وزنه ۱ کیلویی قرار دارد ، معادله ای برای یافتن وزن هر کمپوت بنویسید و آن را حل کنید .

مسئله : سن پدر علی ۳ برابر سن علی است . ۱۰ سال پیش سن پدرش از دو برابر سن فعلی علی ۵ سال بیشتر بود . به کمک معادله سن علی را بیابید .

مسئله : عددی وجود دارد که اگر از ۵ برابرش ۴ را کم کنیم از ۳ برابر خودش ۲ واحد بیشتر می شود به کمک معادله آن عدد را بیابید .

مسئله : طول مستطیلی از عرض آن ۳ واحد بیشتر است ، اگر مساحت آن ۲۳۸ باشد ، به کمک معادله ، طول و عرض مستطیل را بیابید .

## تمرین

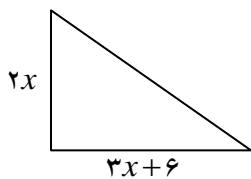
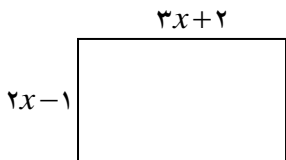
۱. حاصل جمع سه عدد طبیعی متوالی ۴۲ است. به کمک معادله، آن سه عدد را بیابید.

۲. به کمک معادله عددی را بیابید که اگر دو برابر آن را از ۳ کم کنیم، حاصل پنج برابر آن عدد شود.

۳. طول مستطیلی ۳ برابر عرض آن است، اگر محیط آن ۲۴ باشد به کمک معادله، طول و عرض مستطیل را بیابید.

۴. پدری ۳۸ سال و پسرش ۸ سال دارد. به کمک معادله حساب کنید پس از چند سال سن پدر سه برابر سن پسرش خواهد شد.

۵. مساحت دو شکل زیر برابر هستند. به کمک معادله طول وتر مثلث را بیابید.



## درس دوم : حل معادله درجه دوم

معادله درجه دوم : معادله ای که پس از ساده شدن به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  در آید را معادله درجه دوم می نامند .

## روش اول : تجزیه

در این روش عبارت را به کمک فاکتور گیری ، اتحاد مزدوج ، اتحاد مربع و یا اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم و از این نکته استفاده می کنیم " هرگاه حاصل ضرب دو عبارت صفر شود حداقل یکی از آنها صفر است " و تک تک عبارات حاصل را برابر صفر قرار داده و ریشه ها را می یابیم .

مثال : معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید .

الف )  $5x^2 - 20x = 0$

ب )  $25x^2 + 10x + 1 = 0$

ج )  $4t^2 - 9 = 0$

د )  $9x^2 + 9x + 2 = 0$

ه )  $x^2 - x - 12 = 0$

مثال : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۳ و ۴ باشد .

روش دوم : مربع کامل

$$A^2 = a \Rightarrow \begin{cases} A = a \\ A = -a \end{cases} \quad \text{الف) اگر عبارت مربع باشد داریم :}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \overset{\text{توان 2}}{\underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0 \quad \text{ب) اگر عبارت مربع نبود به روش مقابل آن را مربع می کنیم :}$$

منفی ثابت

توجه : در صورتی که  $x^2$  ضریب غیر از یک داشته باشد باید تمام جملات را بر آن ضریب تقسیم کنیم .

مثال : معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید .

الف)  $(2x-1)^2 = 4$

ب)  $x^2 + 4x = 12$

ج)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$

ج)  $(3x+1)^2 = 0$

د)  $x^2 + 2x + 3 = 0$

ه)  $a^2 + 3a - 10 = 0$

روش سوم: روش کلی (روش دلتا)

در این روش ابتدا ضرایب  $a, b, c$  را که در معادله به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  است مشخص می کنیم.

سپس مبین معادله یعنی  $\Delta = b^2 - 4ac$  را حساب می کنیم.

سپس به کمک فرمول  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  ریشه ها را می یابیم.

مثال: معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

الف)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$

ب)  $x^2 + 4x - 12 = 0$

ج)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$

د)  $x^2 + 2x + 3 = 0$

ه)  $a^2 + 3a - 10 = 0$

مسئله: برای یک عکس ۵ در ۱۲ می خواهیم یک قاب عکس بسازیم به طوری که مساحت قاب عکس ۱۲۶ شود و عکس دقیقاً در وسط قاب قرار بگیرد. به کمک معادله، طول و عرض قاب عکس را بیابید.

## تمرین

۱. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف)  $4x^2 - 16x^2 = 0$

ب)  $16x^2 - 4x - 6 = 0$

ج)  $x^2 + 5x + 4 = 0$

۲. معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف)  $(x-1)^2 = 25$

ب)  $x^2 + 4x = 0$

ج)  $9x^2 - 9x - 10 = 0$

۳. معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

الف)  $3x^2 + x - 6 = 0$

ب)  $x^2 + 4x + 4 = 0$

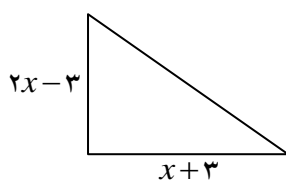
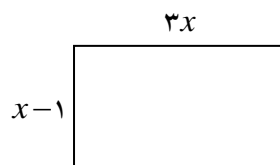
ج)  $x^2 - 2x - 3 = 0$

۴. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۲- و ۳ باشد.

۵. عددی وجود دارد که اگر در خودش ضرب شود از خودش ۱۲ واحد بیشتر می شود، به کمک معادله این عدد را بیابید.

۶. به کمک معادله عددی طبیعی بیابید که حاصل ضرب عدد قبل و بعد از آن ۲۴ شود.

۷. مساحت دو شکل زیر برابر هستند. به کمک معادله طول و عرض مستطیل را بیابید.





## درس سوم : معادلات گویا

**حل معادلات گویا :** ابتدا همه عبارات را به یک سمت تساوی آورده و با جمع و تفریق کردن عبارات آن را به یک کسر تبدیل می کنیم . سپس فقط صورت کسر را مساوی صفر قرار داده و جواب ها را به دست می آوریم . از بین جواب های بدست آمده فقط آنهایی قابل قبول هستند که مخرجی را صفر نکنند .

مثال : معادلات زیر را حل کنید .

$$\text{الف) } \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$$

$$\text{ب) } \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$\text{ج) } \frac{24}{10+x} + 1 = \frac{24}{10-x}$$

$$\text{د) } \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$ه) \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

مثال : به ازای چه مقدار  $a$  ، معادله  $\frac{a}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$  دارای جواب  $x=2$  است .

مثال : گلدان نقره ای داریم که نسبت وزن نقره به مس آن ۸ است . استاد قلم کار این گلدان را ذوب و پس از افزودن ۱۰۰ گرم مس به آن ، گلدان جدیدی می سازد که  $\frac{4}{5}$  وزن آن نقره است . وزن گلدان قبل از ذوب شدن چقدر بوده است ؟

مثال : دو چاپگر تعدادی تراکت را ۴ ساعت چاپ می کنند ، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند ، چاپگر قدیمی تر این کار را ۳ ساعت دیرتر از چاپگر جدید تمام می کند . هر کدام به تنهایی در چند ساعت این کار را تمام می کنند ؟

مثال : یک کیک بین تعدادی میهمان به مقدار مساوی تقسیم شد و یک نفر به مهمانان اضافه شد و کیک را دوباره تقسیم کردند و اینبار به هر یک  $\frac{1}{6}$  کمتر رسید . در ابتدا مهمانان چند نفر بوده اند ؟

## تمرین

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) 
$$\frac{2y+2}{2x-2} - \frac{5}{y^2-1} = \frac{2y-3}{2x+2}$$

ب) 
$$\frac{k}{2-k} + \frac{2}{k} = 5$$

ج) 
$$2 + \frac{5}{3x-1} = \frac{-2}{(3x-1)^2}$$

۲. به ازای چه مقدار  $a$  ، معادله  $\frac{1}{t-1} + \frac{(1+t^2)^2 + 13}{k} = \frac{3t}{t+1}$  دارای جواب  $x = -2$  است.

۳. اگر بخواهیم ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب نمک ۴ درصد را به محلول ۸ درصد تبدیل کنیم ، چند کیلو گرم نمک باید اضافه کنیم ؟

۴. دو کارگر کاری را ۱۸ روزه انجام می دهند ، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند ، کارگر اول این کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم تمام می کند . هر کدام به تنهایی در چند روز این کار را تمام می کنند ؟

۵. با ۱۲۰۰ تومان می توان تعدادی اسباب بازی مشابه خرید و با ۱۰۰ تومان تخفیف با همان پول ۴ اسباب بازی بیشتر می توان خرید . قیمت اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است ؟