

فصل سوم

تابع

درس اول : مفهوم تابع

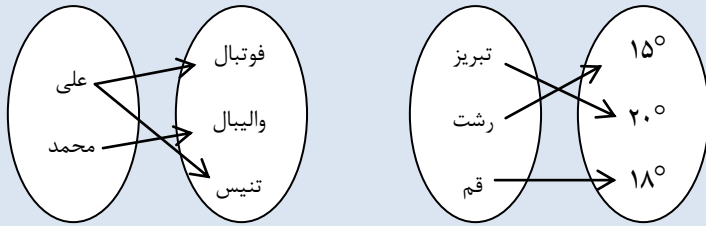
درس دوم : ضابطه تابع

درس سوم : تابع خطی و نمودار آن

درس چهارم : تابع درجه دوم نمودار آن

درس اول : مفهوم تابع

به ارتباط هر دو مجموعه داده شده زیر توجه کنید :



سوال : در ارتباط دو مجموعه دوم آیا یک شهر می تواند هم زمان دارای دو دمای مختلف باشد ؟ در ارتباط دو مجموعه اول آیا یک شخص می تواند هم زمان به دو ورزش علاقه مند باشد ؟

تابع : رابطه ای است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مولفه های اول یکسان نباشد . (مولفه اول را متغیر مستقل و مولفه دوم را متغیر وابسته می نامند)

هر تابع را می توان به روش های مختلفی بیان کرد : نمودار پیکانی ، جدولی، زوج مرتبی ، نمودار مختصاتی و توصیفی

نمایش پیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی										
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	1	1	2	4	3	9	4	16
x	y													
1	1													
2	4													
3	9													
4	16													
			<p>f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ توان چهارم آن را نسبت می دهد</p>											
		<p>f = { (سنا, علی) و (فوتبال, رضا) } { (سنا, رضا) و (والیبال, آرش) } { (کشتی, حمید) و (تیراندازی, علی) }</p>												

تشخیص تابع

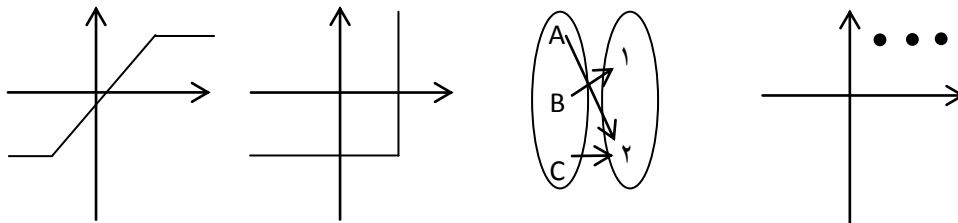
۱) زوج مرتبی : زمانی تابع است که مولفه های اول یکسان نباشند ، اگر بودند ، مولفه های دوم نیز یکسان باشند .

۲) نمودار پیکانی : زمانی تابع است که از هر عضو مجموعه اول ، فقط یک پیکان خارج شود .

۳) نمودار مختصاتی : زمانی تابع است که هر خط عمودی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند .

مثال : هرگاه $f = \{(3, a^2 - 2a), (5, b^3 - 1), (3, 3), (a + 6, 36), (5, 26)\}$ تابع باشد ، $a + b$ را بیابید ؟

مثال : چند تا از نمودار های زیر تابع هستند ؟



مثال : کدام رابطه یک تابع است ؟

$$f = \{(-1, 2), (3, -1), (3, 2)\} \quad g = \{(\sqrt{2}, 2), (1, 1), (3, -2)\} \quad h = \{(1, -4), (3, -1)\}$$

مثال : کدام رابطه یک تابع نیست ؟

الف) رابطه ای که به هر شخص روز تولد آن را نسبت می دهد .

ب) رابطه ای که به هر شخص نمره ریاضی ترم اول آن را نسبت می دهد .

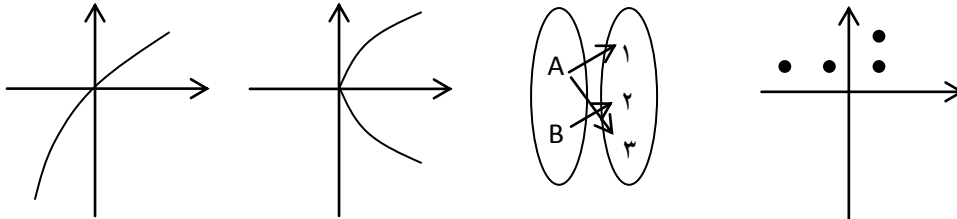
ج) رابطه ای که به هر کشور زبان رسمی آن را نسبت می دهد .

د) رابطه ای که به هر کالا قیمت آن را نسبت می دهد .

تمرین

۱. هرگاه $f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$ تابع باشد $x^2 + y^2$ را بیابید.

۲. چند تا از نمودارهای زیر تابع هستند؟



۳. کدام رابطه یک تابع است؟

$$f = \{(-2, -1), (3, 2)\} \quad g = \{(-4, 2), (1, 4), (-2, -2)\} \quad h = \{(1, 2), (\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, 6)\}$$

۴. کدام رابطه یک تابع نیست؟

الف) رابطه ای که به هر شخص علاقه او به مدل خودرو را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به هر شخص وزن آن را نسبت می دهد.

ج) رابطه ای که به هر استان مرکز آن را نسبت می دهد.

د) رابطه ای که به هر شهر نماینده آن را نسبت می دهد.

درس دوم: ضابطه تابع

ضابطه تابع: برخی اوقات یک تابع را می توان به صورت یک فرمول نمایش داد که به ازای هر x که دریافت می کند یک y تولید کند.

دامنه و برد تابع: در یک تابع به مجموعه مولفه های اول «دامنه» و به مجموعه مولفه های دوم «برد» می گویند.

تابع با دامنه A به مجموعه B را به صورت $f: A \rightarrow B$ نمایش می دهند.
 $f(x)$

مثال : توابع زیر با دامنه A داده شده اند . مجموعه برد آنها را مشخص کنید .

۱) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 3x^2 - 1$, $A = \left\{-1, \sqrt{2}, 2, 0, \frac{1}{2}\right\}$

۲) $g: A \rightarrow B$
 $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, $A = \left\{-2, 1, 2, 0, \frac{1}{2}\right\}$

۳) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$, $A = \{-1, 3, 2, 0\}$

۴) $g: A \rightarrow B$
 $g(x) = 1 - (x+2)^2$, $A = \left\{-3, -2, 1, \frac{1}{3}\right\}$

مثال : با توجه به جدول های داده شده ضابطه ای برای تابع بنویسید .

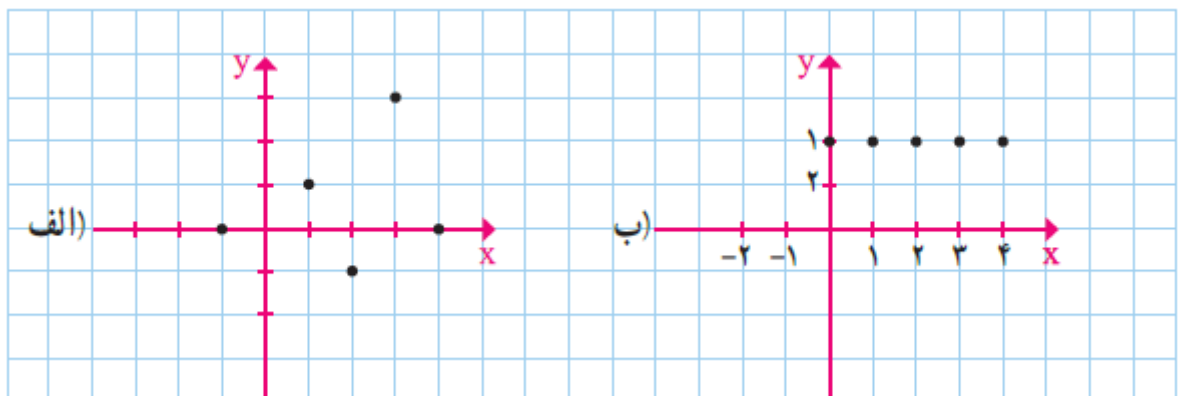
۱	۲	۳	۴	۵
۱	۴	۹	۱۶	۲۵

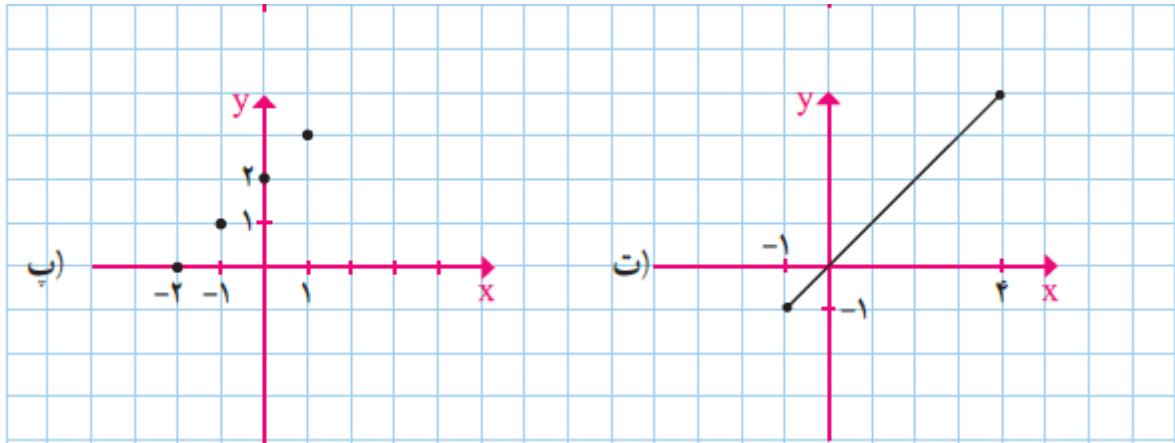
۰	۱	۲	۳	۴
۱	۳	۹	۲۷	۸۱

-۲	-۱	۰	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۶

۲	۳	۴	۵	۶
۵	۷	۹	۱۱	۱۳

مثال : دامنه و برد را مشخص کنید و در صورت امکان یک ضابطه برای هر نمودار بنویسید .





مثال : نمودار مختصاتی توابع زیر را رسم کنید .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 3x - 1$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = -2$$

مثال : ضابطه تابعی را بنویسید که به هر عدد طبیعی ، مربع آن منهای یک را نسبت می دهد .

تمرین

۱. توابع زیر با دامنه A داده شده اند . مجموعه برد آنها را مشخص کنید .

$$1) \quad f : A \rightarrow B$$

$$f(x) = x^2 + x, \quad A = \left\{ -1, \sqrt{2}, 2, i, \frac{1}{2} \right\}$$

$$2) \quad g : A \rightarrow B$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x}, \quad A = \left\{ -2, 1, 2, \frac{1}{2} \right\}$$

۳) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$, $A = \{-1, 3, 5, 6\}$

۴) $g: A \rightarrow B$
 $g(x) = 2(x-3)^2$, $A = \left\{2, 1, 5, \frac{1}{2}\right\}$

۲. با توجه به جدول های داده شده ضابطه ای برای تابع بنویسید .

۱	۲	۳	۴	۵
۱۱	۲۱	۳۱	۴۱	۵۱

۰	۱	۲	۳	۴
۰	۱	۸	۲۷	۶۴

-۱	۰	۱	۲	۳
۴	۵	۶	۷	۸

۲	۳	۴	۵	۶
-۲	-۳	-۴	-۵	-۶

۳. نمودار مختصاتی توابع زیر را رسم کنید .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x + 1$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 1$

۴. ضابطه تابعی را بنویسید که به هر عدد صحیح ، مکعب آن به اضافه ۲ را نسبت دهد .

درس سوم: تابع خطی و نمودار آن

تابع خطی: هر تابع که پس از ساده شدن به صورت $y = mx + h$ در آید را تابع خطی می نامند. که m شیب خط و h عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور عرض ها) نامیده می شود .



مثال : ضابطه تابع محیط مستطیل هایی که طول آنها ۳ واحد بیشتر از عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید . آیا تابع خطی است ؟

مثال : ضابطه تابع مساحت مستطیل هایی که طول آنها ۳ برابر عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید . آیا تابع خطی است ؟

مثال : هزینه ثابت تولید کالایی ۸ میلیون تومان است و به ازای هر کالای تولیدی ۲ میلیون تومان نیاز است . ضابطه تابع هزینه را بر حسب تعداد تولید بنویسید . آیا تابع خطی است ؟ هزینه تولید ۵۰ کالا چقدر است ؟

نوشتن معادله خط :

الف) با داشتن شیب و نقطه (x_1, y_1) از خط می توان معادله خط را به صورت مقابل نوشت : $y = m(x - x_1) + y_1$

ب) با داشتن دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از خط ، می توان شیب خط را به صورت مقابل حساب کرد : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

سپس با فرمول قبل و انتخاب یکی از این نقاط ، معادله خط را نوشت .

مثال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و دارای شیب $m = -2$ باشد .

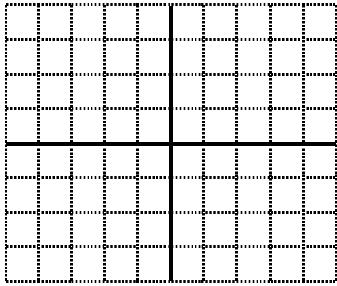
مثال : معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(-1, 8)$ و $(2, 2)$ بگذرد .

مثال : معادله خطی را بنویسید که $f(2) = 3$ ، $f(1) = -2$ باشد . سپس مقدار $f(3)$ را بیابید .

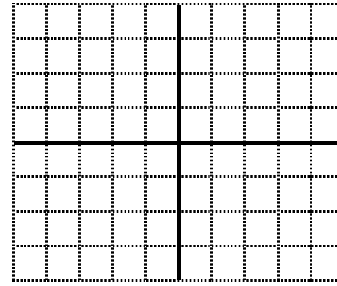
رسم تابع خطی : دو مقدار دلخواه برای x در نظر گرفته و دو مقدار برای y می یابیم . در این صورت مختصات دو نقطه از تابع بدست می آید که با مشخص کردن آنها در دستگاه مختصات و وصل کردن و امتداد دادن خط رسم می شود .

مثال : توابع خطی زیر را رسم کنید .

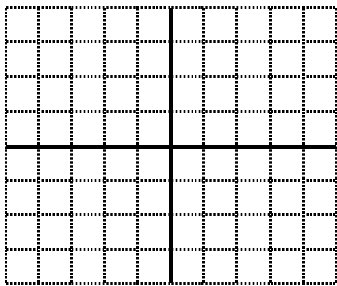
$$y = 2x - 3$$



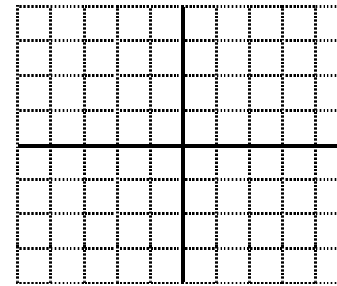
$$y = \frac{2}{3}x + 1$$



$$y + 3x = 2$$



$$y = \frac{-1}{2}x - 2$$



تمرین

۱. ضابطه تابع محیط مستطیل هایی که طول آنها ۳ برابر عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید. آیا تابع خطی است؟

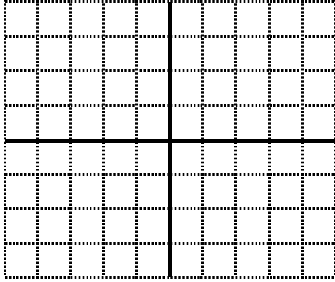
۲. ورودی ثابت یک باغ وحش برای اردوی دانش آموزی ۲۰ هزار تومان است و به ازای هر دانش آموز ۲ هزار تومان به این هزینه اضافه می شود. ضابطه تابع هزینه را بر حسب تعداد دانش آموزان بنویسید. آیا تابع خطی است؟ به ازای ۳۰ دانش آموز چند تومان باید پرداخت شود؟

۳. معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(1, 5)$, $(-1, -1)$ بگذرد.

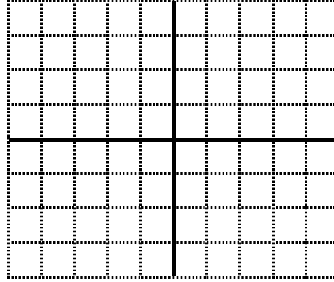
۴. معادله خطی را بنویسید که $f(-2) = 5$, $f(1) = -4$ باشد. سپس مقدار $f(0)$ را بیابید.

۵. توابع خطی زیر را رسم کنید .

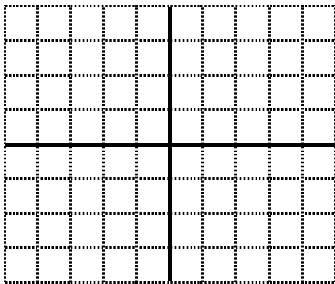
$$y = x - 3$$



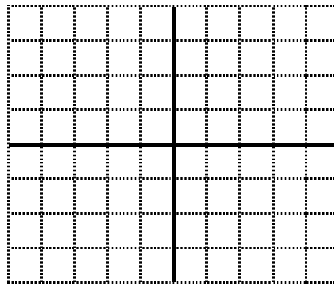
$$y = \frac{3}{5}x + 1$$



$$y - x + 4 = 0$$



$$y = \frac{-1}{3}x + 2$$



درس چهارم : تابع درجه دوم و نمودار آن

تابع درجه دوم (سهمی) : هر تابع که پس از ساده شدن به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد را تابع درجه دوم می نامند . ($a \neq 0$)

مثال : ضابطه تابع مساحت مستطیل هایی که طول آنها ۳ واحد بیشتر از عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید . این تابع چه نوع تابعی است؟

مثال : قیمت فروش کالایی بر حسب تعداد فروش به صورت $y = 200 - 2x$ است . ضابطه در آمد حاصل از فروش x کالا را بنویسید . چه نوع تابعی داریم ؟ در آمد حاصل از فروش ۲۰ کالا چقدر است ؟

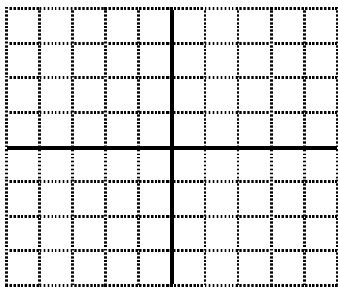
رسم تابع درجه دوم: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره به صورت $\sqrt{a > 0}$ یا $\wedge_{a < 0}$ است.

رأس سهمی: اگر مقدار $x_0 = \frac{-b}{2a}$ را یافته و درون تابع قرار دهیم نقطه (x_0, y_0) بدست آمده را رأس سهمی می نامند که در واقع در شکل \wedge مختصات پایین ترین نقطه و در شکل \wedge مختصات بالاترین نقطه است.

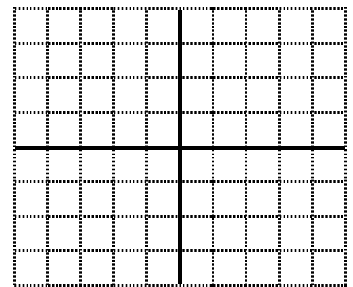
برای رسم سهمی ابتدا x_0 دو مقدار x در طرفین آن در نظر گرفته و با جایگذاری در تابع مقدار y آنها را می یابیم سپس با داشتن این سه نقطه تابع را رسم می کنیم.

مثال: مختصات رأس سهمی های زیر را مشخص کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

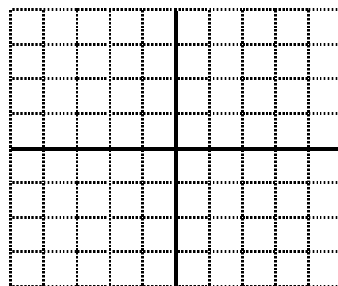
$$y = 2x^2 - 8x + 1$$



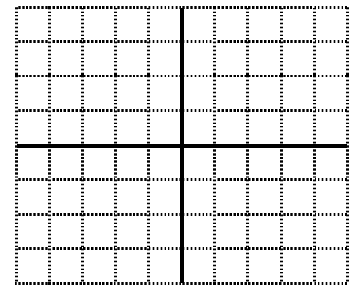
$$y = x^2 + 1$$



$$y = 2(x+1)^2 - 1$$



$$y = 3x - x^2$$



مثال: در تابع $y = 2x^2 + 4x + 3$ مینیمم (کمترین مقدار) تابع چقدر است؟

مثال: اگر تابع در آمد شرکتی $y = \frac{-1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه آن $y = 18x - 40$ باشد. ماکسیمم (بیشترین مقدار) سود چقدر

است؟



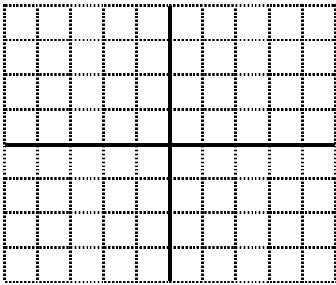
تمرین

۱. ضابطه تابع مساحت مستطیل هایی که طول آنها ۴ برابر عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید. این تابع چه نوع تابعی است؟

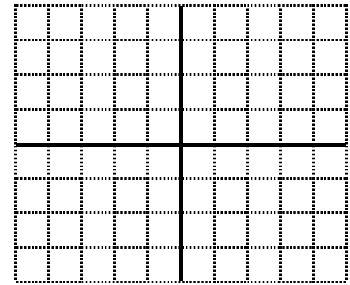
۲. قیمت فروش کالایی بر حسب تعداد فروش به صورت $y = 300 - x$ است. ضابطه در آمد حاصل از فروش x کالا را بنویسید. چه نوع تابعی داریم؟ در آمد حاصل از فروش ۵۰ کالا چقدر است؟

۳. مختصات رأس سهمی های زیر را مشخص کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

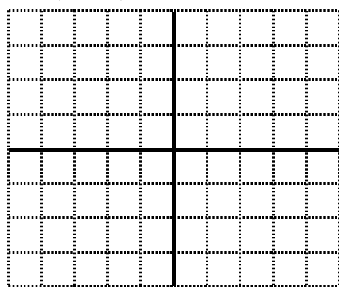
$$y = 2x^2 + 4x + 1$$



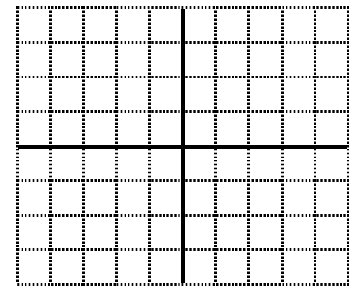
$$y = 2x^2 - 1$$



$$y = -2(x-2)^2 + 1$$



$$y = x - 2x^2$$



۴. در تابع $y = x^2 + x + 1$ مینیمم (کمترین مقدار) تابع چقدر است؟

۵. یک کالا به قیمت ۳۰۰ تومان به فروش می رسد. اگر تابع هزینه آن به صورت $y = x^2 + 50x + 200$ باشد. چند لامپ تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟