



نسبت و تناسب

باستان‌شناسان چگونه از ریاضی استفاده می‌کنند؟

در سال ۲۰۰۱ میلادی، باستان‌شناسان
جمجمه‌ی یک تمساح ماقبل تاریخ به طول
یک متر و هشتاد سانتی‌متر را کشف
کردند. با استفاده از نسبت و تناسب، آن‌ها
توانستند طول این تمساح را ۱۲ متر
برآورد کنند

منبع: مجله‌ نشنال جغرافی

REAL-LIFE CAREERS

How Does a Paleontologist Use Math?
In 2001, paleontologists discovered a 6-foot skull of a prehistoric crocodile called SuperCroc. By using proportions, they estimated its total length as 40 feet.

Source: National Geographic

Math
Research

For information about a career as a paleontologist, visit:
msmath2.net/careers





سال تحصیلی جدید، مسئله‌های جدید، راه‌حل‌های جدید

معلم ریاضی وارد کلاس شد و پس از معرفی خود گفت: "سال جدید تحصیلی بر همه شما مبارک باد! امیدوارم امسال سالی پر از موفقیت برای شما باشد." سپس از لزوم درس خواندن و یادگیری ریاضی برایمان گفت و در آخر، اضافه کرد: "امسال روش یادگیری متفاوتی داریم. شما خودتان باید مفاهیم ریاضی را در ذهنتان بسازید؛ این کار را هم به کمک یکدیگر و با اجرا کردن فعالیت‌هایی که برایتان در نظر گرفته‌ایم، انجام خواهید داد. پس از اینکه او قوانین کلاس را برایمان توضیح داد و دانش‌آموزان خودشان را معرفی کردند و دلیل انتخاب شاخه فنی و حرفه‌ای را برای ادامه تحصیل توضیح دادند، گفت: "اجازه بدهید کارمان را شروع کنیم."

شما در سال‌های گذشته با اندازه‌گیری آشنا شده‌اید. در ادامه، دو گیره کاغذ در اندازه‌های مختلف را به ما نشان داد و گفت: "طول گیره بزرگ $\frac{1}{5}$ برابر طول گیره کوچک است." سپس به هر یک از دانش‌آموزان به طور تصادفی یک گیره داد و گفت: "برای جلسه آینده طول و عرض کتاب ریاضی، طول و عرض یک کاغذ A4، و طول چند شیء دیگر را در منزل با گیره‌ای که دارید اندازه بگیرید. ظاهراً کاری ساده بود که در دوره ابتدایی هم آن را انجام داده بودیم. با خودم گفتم: اگر همه تکالیف ریاضی امسال به همین سادگی باشند، نمره ریاضی‌ام ۲۰ خواهد شد!"

اما در خانه وقتی خواستم اندازه‌گیری‌ها را انجام دهم، متوجه شدم که گیره‌ام را در مدرسه جا گذاشته‌ام. به علی زنگ زدم تا ببینم او می‌تواند کمکی کند، ولی متوجه شدم اندازه گیره او با گیره من متفاوت است. البته علی راه‌حلی برای مشکل من پیشنهاد کرد.

فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا متوجه شوید راه‌حل علی چه بوده است.



فعالیت ۱

۱. در جدول زیر، ستون اول اندازه‌ای را بر حسب گیره بزرگ و ستون دوم همان اندازه را بر حسب گیره کوچک نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.



اندازه بر حسب گیره‌های کوچک	اندازه بر حسب گیره‌های بزرگ
۰	۰
۲	
۴	
۶	

۲. در زیر، نموداری رسم کنید که رابطه بین اندازه بر حسب گیره‌های بزرگ و اندازه بر حسب گیره‌های کوچک را نشان دهد.



۳. اگر طول کتاب $8\frac{1}{4}$ و عرض آن $4\frac{2}{3}$ گیره بزرگ باشد، به کمک نمودار، طول و عرض کتاب را بر حسب گیره کوچک پیدا کنید.

۴. نسبت طول گیره بزرگ به طول گیره کوچک را بنویسید. چگونه می‌توانید با داشتن طول بر حسب گیره بزرگ، از این نسبت برای پیدا کردن طول اشیا بر حسب گیره کوچک استفاده کنید؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد که هرگاه دو مقدار با ضریب ثابتی با یکدیگر متناسب باشند، با استفاده از نمودار رابطه بین آن‌ها می‌توان با داشتن مقدار یکی، مقدار دیگری را بدون ضرب یا تقسیم به دست آورد. نسبت‌های $1/5$ به 1 یا 3 به 2 را می‌توان با عدد کسری $\frac{3}{4}$ نشان داد. با توجه به جدول بالا می‌توانیم بفهمیم که در مقابل هر 2 گیره بزرگ، 3 گیره کوچک و در مقابل هر 4 گیره بزرگ، 6 گیره کوچک داریم. این ارتباط را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = K$$

$$6 = 4K \quad \text{یا} \quad 3 = 2K$$

K نسبت طول گیره بزرگ به طول گیره کوچک را نشان می‌دهد که آن را "ضریب تبدیل واحد" یا "ضریب تبدیل طول با واحد گیره بزرگ به طول با واحد گیره کوچک" می‌نامند.

در حالت کلی، دو نسبت a به b و c به d مساوی‌اند، هرگاه برای یک عدد مانند K ، داشته باشیم:

$$c = Kd \quad \text{و} \quad a = Kb \quad \text{یا} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = K$$

مثال (۱) الف - ۲۵۰ سانتی‌متر چند متر است؟

ب - ۳۴ سانتی‌متر چند متر است؟

پ - ۰/۰۱ سانتی‌متر چند متر است؟

اگر طول شیئی برابر A متر باشد، همین طول برابر $۱۰۰A$ سانتی‌متر است. نسبت $\frac{A}{۱۰۰A} = \frac{۱}{۱۰۰}$ ضریب تبدیل سانتی‌متر به متر است. برای داشتن درک بهتر به تساوی زیر دقت کنید.

$$\frac{\text{متر}}{\text{سانتی‌متر}} \times \text{سانتی‌متر} = \text{متر}$$

این تساوی به معنای آن است که اگر نسبت متر به سانتی‌متر را تشکیل دهیم ضریبی به دست می‌آید که با ضرب در طول بر حسب سانتی‌متر، همان طول را بر حسب متر به دست می‌دهد. پس داریم:

$$\frac{۱}{۱۰۰} \times ۲۵۰ = ۲/۵ \quad \text{الف-}$$

$$\frac{۱}{۱۰۰} \times ۳۴ = ۰/۳۴ \quad \text{ب-}$$

$$\frac{۱}{۱۰۰} \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۰۱ \quad \text{پ-}$$

مثال (۲) الف - ۲۵۰ متر چند سانتی‌متر است؟

ب - ۰/۴ متر چند سانتی‌متر است؟

پ - $\frac{۴}{۷}$ متر چند سانتی‌متر است؟

در این حالت، باید معکوس نسبت در مثال (۱) را حساب کنیم. اگر طول شیئی برابر A متر باشد، همین طول برابر $100A$ سانتی متر است. نسبت $\frac{100A}{A} = 100$ ضریب تبدیل متر به سانتی متر است (برای درک بهتر به تساوی: سانتی متر = متر $\times \frac{\text{سانتی متر}}{\text{متر}}$ توجه کنید). پس داریم:

$$100 \times 250 = 25000 \quad \text{الف-}$$

$$100 \times 0.4 = 40 \quad \text{ب-}$$

$$100 \times \frac{4}{7} = \frac{400}{7} \quad \text{پ-}$$

مثال‌های بالا نشان می‌دهند که در محاسبه ضریب تبدیل دو واحد به یکدیگر، این نکته که کدام واحد را به کدام واحد می‌خواهیم تبدیل کنیم، مهم است و اگر جای واحدها را با هم عوض کنیم، ضریب تبدیل معکوس می‌شود. مثلاً، ضریب تبدیل متر به سانتی متر، ۱۰۰ است ولی ضریب تبدیل سانتی متر به متر، $\frac{1}{100}$ است.

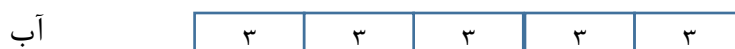
مثال ۳) برای تهیه ۷ لیوان شربت، ۵ لیوان آب را به ۲ لیوان شربت غلیظ اضافه می‌کنیم. اگر بخواهیم با ۶ لیوان شربت غلیظ، شربتی با همان مقدار شیرینی درست کنیم، چند لیوان آب باید به آن اضافه کنیم؟ این مسئله را می‌توانیم به سه روش حل کنیم.

روش رسم شکل

اگر در برابر ۲ لیوان (واحد) شربت غلیظ، ۵ لیوان (واحد) آب نیاز داشته باشیم، به معنای آن است که در برابر هر ۲ واحد شربت غلیظ، به ۵ واحد آب نیاز داریم.



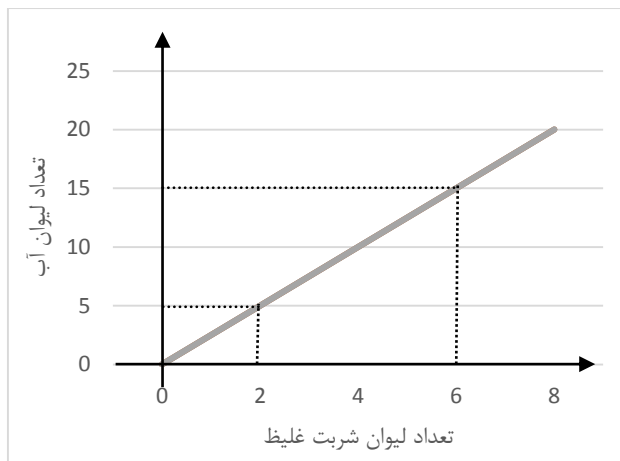
بنابراین، در برابر ۶ لیوان شربت غلیظ (که ۲ واحد ۳ تایی است)، به ۱۵ لیوان آب (که ۵ واحد ۳ تایی است) نیاز داریم؛ یعنی:





روش رسم نمودار

رابطه این دو کمیت^۱ را می‌توان با نمودار زیر نشان داد:



روش عملیات جبری

با توجه به اینکه مقدار شربت غلیظ و آب کمیت‌های متناسب‌اند، این تبدیل را می‌توان به شکل زیر نیز در نظر گرفت:

$$\frac{\text{لیوان آب}}{\text{لیوان شربت غلیظ}} \times \text{لیوان شربت غلیظ} = \text{لیوان آب}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{6} = K \quad \text{یا}$$

$$x = 6K = \frac{5}{2} \times 6 = 15 \quad \text{پس:}$$



کار در کلاس

۱. آیا دو نسبت ۴۲ به ۸۸ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی‌اند؟

بله؛ k برابر است با

خیر؛ نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با نسبت ۴۲ به و k برابر است با

^۱ مفاهیمی مانند وزن و جرم و بار الکتریکی و فشار هوا و نظایر آنها را "کمیت‌های فیزیکی و مفاهیمی مانند طول و مساحت و حجم و نظایر آنها را" کمیت‌های هندسی" می‌نامند.

۲. آیا دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی‌اند؟

بله؛ k برابر است با

خیر؛ نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت به

۳- در یک روزنامه عکس‌ها با ابعاد ۶×۵ چاپ می‌شوند. در مرحله صفحه‌آرایی تصمیم گرفته شد عکس‌ها با طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس‌ها چقدر باید باشد؟

کمیت‌های متناسبی که تا اینجا بررسی کردیم، همگی از یک جنس بودند و واحد اندازه‌گیری آن‌ها قابل تبدیل به یکدیگر نیز بود. برای مثال، نسبت طول به عرض یک پنجره، نسبت بین دو طول است و هر دو با واحد متر یا سانتی‌متر قابل اندازه‌گیری هستند یا نسبت مخلوط کردن شربت غلیظ و آب، نسبت بین دو حجم است و هر دو بر حسب حجم یک لیوان قابل اندازه‌گیری هستند. ولی در زندگی روزمره با کمیت‌های متناسبی سر و کار داریم که از یک جنس نیستند و واحدهای اندازه‌گیری آن‌ها را نیز نمی‌توانیم به یکدیگر تبدیل کنیم. مثلاً برای ماشینی که با سرعت ثابت در حال حرکت است، مسافت پیموده شده با زمان سپری شده متناسب است. در محاسبه نسبت بین مسافت طی شده و زمان سپری شده، مسافت از جنس طول است و با واحدهایی مانند متر اندازه‌گیری می‌شود؛ در حالی که زمان از جنس دیگری است و با واحدهایی مانند ثانیه اندازه‌گیری می‌شود. مثالی دیگر، قیمت میوه‌هاست که متناسب با وزن آن‌هاست. در محاسبه نسبت بین قیمت میوه‌ها به وزن آن‌ها، قیمت از جنس "پول" است و با واحدهایی مانند "تومان" اندازه‌گیری می‌شود؛ در حالی که وزن از جنس "نیرو" است و با واحدهایی مانند "کیلوگرم" اندازه‌گیری می‌شود. در این حالت‌ها، مقدار نسبت، به واحدهای اندازه‌گیری برای هر کدام از کمیت‌ها انتخاب شده، بستگی دارد.



فعالیت ۲

در میدان تره‌بار، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۶۰۰۰ تومان است.

۱. نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن، برابر است با: تومان به کیلوگرم سیب‌زمینی.

۲. نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر است با تومان به ۱ کیلوگرم سیب‌زمینی.

این نسبت نشان می‌دهد که با تومان می‌توان ۱ کیلوگرم سیب‌زمینی خرید.



۳. نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن، برابر است با: کیلو گرم سیب زمینی به تومان.

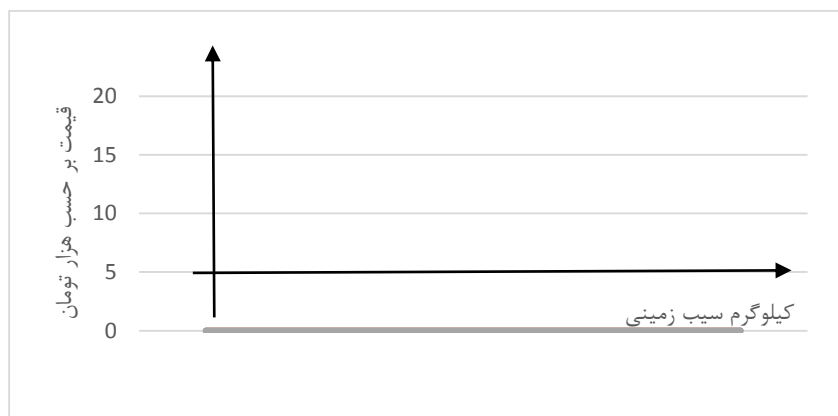
۴. نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن برابر است با کیلوگرم سیب زمینی به ۱ تومان.

این نسبت نشان می دهد که با ۱ تومان می توان کیلوگرم سیب زمینی خرید.

۵. برای پیدا کردن قیمت ۵ کیلوگرم سیب زمینی، رابطه زیر را کامل کنید.

$$\frac{۵ \text{ کیلوگرم سیب زمینی}}{\text{..... تومان}} = \frac{۳ \text{ کیلوگرم سیب زمینی}}{\text{..... تومان}}$$

۶. نمودار رابطه بین مقدار سیب زمینی و قیمت آن ها را رسم کنید.



۵. شیب این خط چه چیزی را نشان می دهد؟

فعالیت ۲ نشان می دهد که نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن مقداری ثابت است و این نسبت نشان دهنده آن است که قیمت ۱ کیلوگرم سیب زمینی چند تومان است. برعکس، نسبت هر مقدار سیب زمینی به قیمت آن مقداری ثابت است و این نسبت نشان دهنده آن است که با ۱ تومان، چه مقدار سیب زمینی می توان خرید.

نسبت دو کمیت متناسب غیر هم جنس را "نرخ" می نامند.

مثال ۴) قیمت پنیر متناسب با وزن آن است. فرض کنید قیمت ۳ کیلو پنیر ۶۰ هزار تومان باشد.

الف - نرخ وزن پنیر به قیمت آن چقدر است و چه چیزی را نشان می دهد؟

ب- نرخ قیمت پنیر به وزن آن چقدر است و چه چیزی را نشان می دهد؟

واحد اندازه گیری وزن پنیر را کیلوگرم انتخاب می کنیم و واحد قیمت را هزار تومان در نظر می گیریم. نرخ قیمت پنیر (بر حسب هزار تومان) به وزن آن برابر $\frac{۶۰}{۳} = ۲۰$ است که نشان می دهد قیمت هر کیلوگرم پنیر ۲۰ هزار تومان است.

بر عکس، نرخ وزن پنیر به قیمت آن $\frac{3}{6}$ است که همان $\frac{1}{2}$ است. این نرخ نشان می‌دهد که با هزار تومان، $\frac{1}{4}$ کیلو گرم (۵۰ گرم) پنیر می‌توان خرید.

مثال ۵) بنزین مصرفی یک ماشین و مسافت طی شده، دو کمیت متناسب‌اند. برخی ماشین‌ها مسافت ۴۵ کیلومتر را با مصرف ۳ لیتر بنزین طی می‌کنند.

الف- نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ب- نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین (با واحدهای انتخاب شده) $\frac{45}{3}$ است که برابر است با ۱۵. این نرخ نشان می‌دهد که این ماشین با مصرف هر لیتر بنزین ۱۵ کیلومتر را طی می‌کند.

برعکس، نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده برابر است با $\frac{3}{45}$ ، که نشان می‌دهد برای طی کردن ۱ کیلومتر، چند لیتر بنزین مصرف می‌شود.

مثال ۶) نسبت ارزش هر پوند انگلیس به دلار آمریکا تقریباً برابر ۴ به ۳ است. ۳۰۰۰ پوند چند دلار است؟

روش رسم شکل:

اگر در برابر هر ۳ واحد پوند ۴ واحد دلار داشته باشیم:

پوند

۱	۱	۱
---	---	---

دلار

۱	۱	۱	۱
---	---	---	---

آنگاه در برابر ۳ واحد ۱۰۰۰ پوندی، ۴ واحد ۱۰۰۰ دلاری داریم؛ یعنی:

پوند

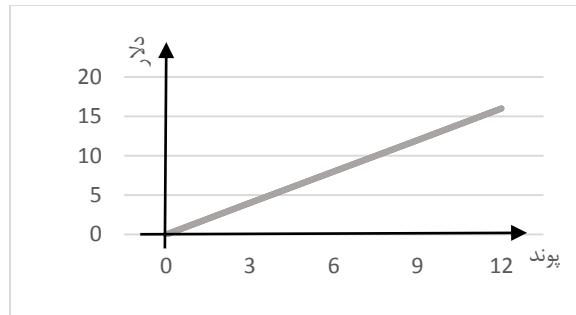
۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
------	------	------

دلار

۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
------	------	------	------

روش رسم نمودار: رابطه بین این دو کمیت را می‌توان با نمودار زیر نشان داد.





روش جبری: با توجه به اینکه ارزش دلار و ارزش پوند کمیت‌هایی متناسب‌اند، نرخ دلار به پوند به شکل زیر است.

$$\frac{4}{3} = K$$

نرخ بالا ضریب تبدیل پوند به دلار است. برای بررسی درستی این مطلب، می‌توانید به تساوی زیر توجه کنید.

$$\frac{\text{دلار}}{\text{پوند}} \times \text{پوند} = \text{دلار}$$

تساوی بالا به معنای آن است که اگر نسبت دلار به پوند را در مقداری پول بر حسب پوند ضرب کنیم، حاصل، همان مقدار پول بر حسب دلار است. بنابراین: $4000 = \frac{4}{3} \times 3000$.

برعکس، نرخ تبدیل دلار به پوند با ضریب $\frac{3}{4}$ به دست می‌آید و نشان می‌دهد هر ۱ دلار برابر $\frac{3}{4}$ پوند است.

در نمودار مثال ۳ که مثالی از نسبت است، واحدهای دو محور افقی و عمودی (لیوان به عنوان واحد اندازه‌گیری حجم) یکی هستند. ولی در مثال ۶ که مثالی از نرخ بود دیدیم که واحد محور افقی (پوند) با واحد محور عمودی (دلار) تفاوت دارد.



مثال ۷) جدول زیر قیمت یک کالا را، که در بسته‌بندی‌های مختلف عرضه می‌شود، نشان می‌دهد.

وزن	قیمت (تومان)
۵۰۰ گرم	۱۵۰۰۰
۱/۵ (کیلوگرم)	۴۲۰۰۰



۵۰۰۰۰	۲(کیلوگرم)
-------	------------

کدام یک با صرفه تر است؟

برای اینکه این قیمت‌ها به درستی مقایسه شوند، ابتدا باید هر کدام از این کمیت‌ها را با واحدهای یکسان اندازه‌گیری کنیم و سپس، نرخ هر کدام را حساب کنیم. مثلاً، وزن را با کیلوگرم و قیمت را با تومان اندازه می‌گیریم. نرخ بسته اول به روش زیر حساب می‌شود:

$$\frac{۱۵۰۰۰}{۰/۵} = ۳۰۰۰۰$$

یعنی، بسته اول کیلویی ۳۰۰۰۰ تومان است.

و بسته دوم: $۲۸۰۰۰ = ۱/۵ \div ۴۲۰۰۰$ ؛ یعنی بسته دوم کیلویی ۲۸۰۰۰ تومان است.

و بسته سوم: $۲۵۰۰۰ = ۲ \div ۵۰۰۰۰$ ؛ یعنی بسته سوم کیلویی ۲۵۰۰۰ تومان است.

بنابراین بسته سوم با صرفه تر است.



کار در کلاس

۱. نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب $\frac{۳۰ \text{ لیتر}}{۳۲۰ \text{ کیلومتر}}$ و $\frac{۲۷ \text{ لیتر}}{۳۰۰ \text{ کیلومتر}}$ است. کدام

ماشین با صرفه تر است؟

۲. بلیت‌های سینما الف در یک ساعت مانده به شروع فیلم، در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه بفروشد، ابتدا نرخ فروش بلیت در دقیقه را پیدا کنید. سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را به دست آورید.

رابطه بین کمیت‌ها همیشه به گونه‌ای نیست که یکی مضربی از دیگری باشد. در فعالیت زیر، رابطه بین دو کمیت را بررسی می‌کنیم که نمی‌توان یکی را به شکل مضربی از دیگری نوشت.



علی و احمد با سرعت برابر در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی او ۹ دور، زده بود، احمد ۳ دور، زده بود.

۱. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	
۳	۹
	۱۲
	۱۵

۲. عددهای ستون دوم را چگونه می‌توانیم بر اساس عددهای ستون اول محاسبه کنیم؟

۳. اگر علی و احمد به طور همزمان دوچرخه سواری را شروع کرده باشند و علی ۹ دور و احمد ۳ دور زده

باشند، در باره سرعت آن‌ها چه می‌توانستیم بگوییم؟

۴. با در نظر گرفتن این حالت، جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۰
۳	۹
	۱۲
	۱۵

۵. عددهای ستون دوم را چگونه می‌توانیم بر اساس عددهای ستون اول محاسبه کنیم؟

در حالت اول، مشاهده می‌شود که رابطه بین تعداد دورهایی که علی زده با تعداد دورهایی که احمد زده است، به صورت $A = k + B$ است. در این مثال $k = 6$ و به ازای هر یک واحد افزایش در ستون اول، یک واحد افزایش در ستون دوم داریم.

در حالت دوم، این رابطه به صورت $A = kB$ است. در این مثال، $k = 3$ و به ازای هر یک واحد افزایش در ستون اول، ۳ واحد افزایش در ستون دوم داریم. حالت اول یک "رابطه جمعی" و حالت دوم یک "رابطه ضربی" است.

مثال ۸) رابطه بین سن دو نفر، یک رابطه جمعی است. چرا؟

۱) روی نقشه، هر ۲ سانتی متر نشان دهنده ۵ کیلومتر است. دو نقطه را در روی نقشه انتخاب کنید. فاصله آن‌ها را در روی نقشه چقدر است؟ فاصله واقعی آن‌ها از هم چقدر است؟



۲) مینا برای تهیه نوعی سس سالاد به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفت: یعنی ۷۵٪ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟

۳) عکاسی می‌خواهد عکسی را در ابعاد 25×35 بزرگ کند و سپس آن را روی مقوایی به طول ۵۵ سانتی متر چاپ کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

۴) علی هر ماه مقداری ثابت پول را پس انداز می‌کند. جدول زیر مقدار پس انداز او را در چند ماه نشان می‌دهد.

شماره ماه	مقدار پس انداز (هزار تومان)
۲	۳۵۰
۴	۷۰۰
۶	۱۰۵۰
۸	
۱۰	

این جدول را به سه روش رسم شکل، رسم نمودار و جبری کامل کنید.

نسبت‌های معکوس

آن روز وقتی از مدرسه به خانه رفتم، متوجه شدم که پدر و مادرم مشغول برنامه‌ریزی برای نقاشی خانه هستند. پدر گفت: با نقاش صحبت کردم. گفت که ۲ نفر را برای نقاشی خانه ما می‌فرستد. او قول داده است که ۶ روزه کار را تمام کند.

مادر پرسید: ۶ روز؟ خیلی سخت است. نمی‌توانیم تعداد کارگرها را بیشتر کنیم تا زمان کمتری طول بکشد؟ مثلاً ۳ کارگر بیایند؟

پدر جواب داد: چندان تفاوت نمی‌کند. اگر ۳ نفر بیایند، چند روز کمتر می‌شود؟

من که درس نسبت و تناسب را خوانده بودم، به سرعت وارد بحث شدم و گفتم: "من حساب می‌کنم." و بعد، تناسب زیر را نوشتم:

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{x}$$

پس از محاسبه به این نتیجه رسیدم که ۳ کارگر نقاش کارشان را ۹ روزه تمام می‌کنند! چطور شد؟ یعنی کارشان خیلی بیشتر هم طول می‌کشد!

مادرم که کمی کم‌حوصله شده بود، گفت: مثلاً تو ریاضی یاد گرفته‌ای؟ تعداد نقاش‌ها بیشتر می‌شود؛ آن وقت به جای اینکه کار زودتر تمام شود، دیرتر هم تمام می‌شود!

من که خودم هم تعجب کرده بودم و نمی‌دانستم چه اتفاقی افتاده است، گفتم: لابد زیاد با هم حرف می‌زنند و کمتر کار می‌کنند!

فردای آن روز با سوالی که در ذهنم ایجاد شده بود، به کلاس ریاضی رفتم و از معلم سوال کردم:

آیا تعداد نقاش‌هایی که یک ساختمان را رنگ می‌کنند با زمان اتمام کار، کمیت‌هایی متناسب هستند؟

معلم جواب داد: بله.

با خود گفتم، پس چرا جوابی که من دیروز به پدر و مادرم دادم، منطقی به نظر نمی‌آمد؟ بعد هم ماجرا را برای معلم تعریف کردم. طبق معمول، او با طرح یک فعالیت، جواب من را داد.

برای پر کردن مخزن آبی ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوله‌های آب کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به طور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

(۱) اگر ۴ شیر آب، همزمان، به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ معلم لبخند زنان به من گفت: "حواست باشد که شیرهای آب با هم حرف نمی‌زنند!"

(۲) اگر ۸ شیر آب هم‌زمان به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

(۳) نمودار زیر را رسم کنید:



- رابطه بین تعداد شیرهای باز آب و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.
- به کمک نمودار، زمانی را که لازم است تا مخزن با ۶ شیر پر شود، پیدا کنید.

نمودار فعالیت ۴ رابطه بین دو کمیت متناسب را نشان می‌دهد که بر خلاف کمیت‌هایی که قبلاً با آن‌ها آشنا شده‌ایم، با افزایش مقدار یکی از آن‌ها، مقدار دیگری کاهش می‌یابد.

اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر نیز افزایش (یا کاهش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطه مستقیم دارند؛ اما اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر کاهش (یا افزایش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطه معکوس دارند.

پس از انجام دادن این فعالیت گفتم: پس رابطه تعداد نقاش‌ها با روزهای کار یک رابطه معکوس است؟

معلم گفت: بله. جواب را پیدا کردی!

گفتم: حالا چطور باید تعداد روزهای کار را بر حسب تعداد نقاش‌ها پیدا کنم؟

معلم گفت: فرض کن نقاشی ساختمانی را در ۱۲ روز رنگ می‌کند. این نقاش در هر روز چه کسری از ساختمان را رنگ می‌کند؟

گفتم: جواب دادن به این سوال آسان است. این نقاش هر روز $\frac{1}{12}$ کل خانه را رنگ می‌کند که در ۱۲ روز همه خانه رنگ می‌شود.

معلم پرسید: حالا اگر تعداد نقاش‌ها ۲ نفر باشد، چند روز طول می‌کشد تا کل ساختمان رنگ شود؟

جواب دادم: هر کدام روزانه $\frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کند؛ پس با هم روزی $\frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کنند. بنابراین، با هم در ۶ روز خانه را رنگ خواهند کرد.

معلم گفت: حالا اگر تعداد نقاش‌ها ۳ نفر باشد، چند روز طول می‌کشد تا کل ساختمان رنگ شود؟

جواب دادم: هر کدام روزانه $\frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کند؛ پس ۳ نفر با هم، روزی $\frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کنند. بنابراین، ۳ نفر با هم در ۴ روز خانه را رنگ خواهند کرد.

معلم گفت: می‌بینی که حاصل ضرب تعداد نقاش‌ها در تعداد روزهای لازم برای تمام کردن نقاشی خانه شما، مقدار ثابت ۱۲ است. زیرا کل این کار نیازمند ۱۲ روز کار یک نقاش است و تعداد نقاش‌ها را به هر نسبت افزایش دهیم، تعداد روزهای مورد نیاز به همان نسبت کاهش می‌یابد؛ به گونه‌ای که حاصل ضرب تعداد نقاش‌ها در تعداد روزهای مورد نیاز، عدد ثابت ۱۲ شود.

وقتی دو کمیت با هم رابطه معکوس دارند، به جای اینکه نسبت بین آن‌ها عدد ثابتی باشد، حاصل ضربشان عددی ثابت است. در مسئله بالا،

$$1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$$

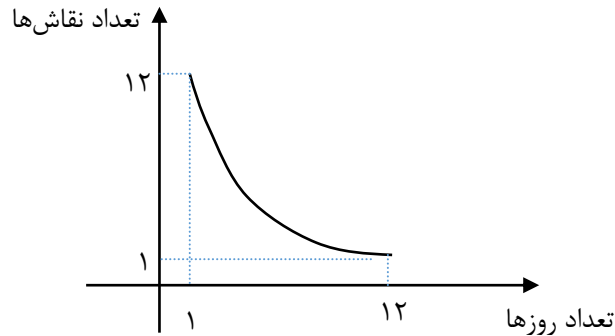
اگر a و b مقادیر متناظر دو کمیت باشند که با هم رابطه معکوس دارند، مقدار $K = a \times b$ ثابت است و اگر c و d دو مقدار متناظر دیگر از همین دو کمیت باشند، داریم:

$$K = a \times b = c \times d$$

$$a = \frac{K}{b}, \quad c = \frac{K}{d}$$

در مسئله بالا $K = 2 \times 6 = 12$ و داریم: $c = \frac{12}{3} = 4$

برای درک بهتر رابطه بین این دو کمیت، نمودار رابطه بین آنها را رسم می‌کنیم.



مثال) محمود هر شب ۳ صفحه از کتابی را مطالعه می‌کند. او کتاب را در ۲۰ روز تمام می‌کند. اگر محمود بخواهد کتاب را در ۱۵ روز تمام کند، هر شب باید چند صفحه از آن را بخواند؟ به‌سادگی می‌توان دریافت که برای کاهش زمان مطالعه کتاب، باید تعداد صفحاتی که هر شب محمود مطالعه می‌کند، افزایش یابد. در این مثال، دو کمیت زمان و تعداد صفحات مطالعه شده در هر شب، با هم رابطه معکوس با هم دارند.

$$\text{در این وضعیت } K = 3 \times 20 = 60 \text{ و داریم: } C = \frac{60}{15} = 4$$



کار در کلاس

- ۱) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطه معکوس داشته باشند.
- ۲) با در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.
- ۳) شمعی به طول ۱۴ سانتی‌متر را روشن می‌کنیم. این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی‌متر کوتاه می‌شود. الف) اگر لحظه روشن کردن شمع را زمان صفر در نظر بگیریم، رابطه بین زمان و طول شمع را بنویسید. ب) با افزایش و گذر زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟



مسائل

۱ - جاهای خالی را پر کنید.

- نسبت دو کمیت متناسب که از یک جنس نیستند نامیده می شود.

- دو کمیت A و B را در نظر بگیرید. اگر با افزایش هر واحد از A ، یک واحد از B افزایش می یابد، دو کمیت رابطه دارند.

۲ - تعیین کنید کدام یک از نسبت ها " نرخ " است.

الف (نسبت مسافتی که یک اتومبیل طی کرده است، به زمان سپری شده.

ب (نسبت وزن یک نوع میوه بر حسب گرم و بر حسب کیلوگرم .

پ (نسبت وزن یک نوع میوه بر حسب کیلوگرم به قیمت آن بر حسب تومان.

۳- اگر ضریب تبدیل واحد A به B عدد $\frac{2}{3}$ باشد، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف (۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟

ب (۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟

پ (ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بنویسید.

تد (رابطه بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.

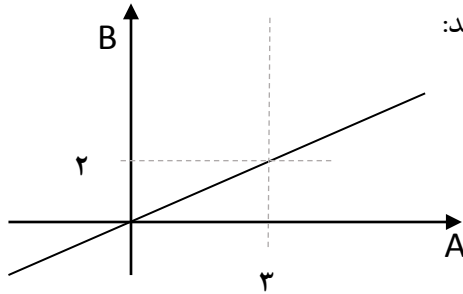
۴ - جدول زیر نوعی کالا را نشان می دهد که در سه اندازه کوچک ، متوسط و بزرگ بسته بندی شده است.

نوع	وزن (کیلو)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱۲۰۰		
متوسط	۴	۳۰۰۰		
بزرگ	۱۵	۱۰۰۰۰		

الف (جدول را کامل کنید.

ب (به $39/5$ کیلو از کالای مورد نظر نیاز داریم. از کدام بسته بندی بخریم که مقرون به صرفه تر باشد؟





۵ - نمودار مقابل رابطه بین کمیت A و کمیت B را نشان می دهد:

الف (ضریب تبدیل A به B و B به A را بنویسید.

ب (۱ واحد از A معادل چند واحد از B است؟

پ (۳ واحد از B معادل چند واحد از A است؟

۶ - از میان کمیت‌های متناسب زیر، کدام مستقیم و کدام معکوس است؟

الف (وزن یک کالا و قیمت آن؛

ب (تعداد شیر هایی که یک حوض آب را پر می کنند و زمان پر شدن حوض؛

پ (زمان مکالمه با تلفن همراه و هزینه آن؛

ت (تعداد مشتریان در یک بانک به زمان انتظار آنها با فرض برابری زمان سرویس دهی؛

ث (وزن بسته پستی و هزینه ارسال بدون در نظر گرفتن هزینه ثابت؛

ج (تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیه بارهای یک انبار؛

چ (درآمد حاصل از دریافت عوارضی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می کنند.