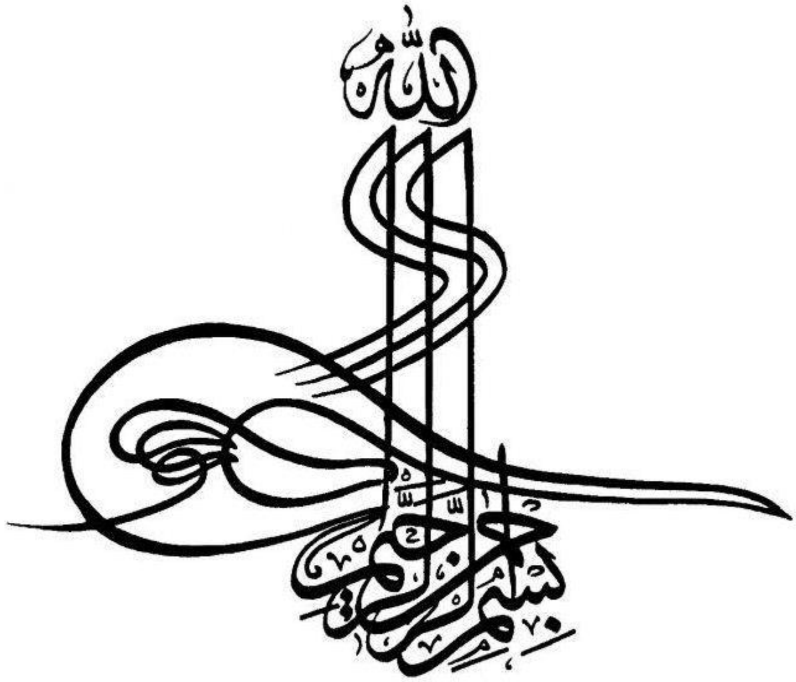

بسم الله الرحمن الرحیم

آشنایی با منطق ریاضی

(فصل اول آمار و احتمال۱ رشته ریاضی فیزیک پایه یازدهم)

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- حل تمامی تمرین‌ها ،کاردرکلاس ها و فعالیت های کتاب

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی آمار و احتمال (۱)، مبحث « **آشنایی با منطـق ریاضـی** » نگـارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، بـه گونـه ایـی اسـت کـه خـلأ بـین مطالـب ارائـه شـده در کتـب درسـی و سـؤالات مطـرح شـده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالـب پرداختـه شـده و بـه همـین منظـور از مثـال‌هـا و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتوانـد موفقیـت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیـران فرهیختـه و گـران قـدر، موجـب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس ۱

آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده ای به آن منطق نمادین[۱] نیز می گویند، دستور زبان ریاضی، یا مطالعۀ ساختار جمله هایی است که در ریاضی به کار برده می شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند . همچنین علم منطق را علم قوانین نتیجه گیری یا بررسی اصول و روش هایی است که برای جدا کردن استدلال های درست از استدلال های نادرست به کار می برند.

امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به کار گرفته می شود. در این درس، کار ما بسیار شبیه بیان قواعد دستور زبان معین است.

گزاره

استدلال های سادۀ زیر را در نظر بگیرید:

۱) فقط روزهای دوشنبه نانوایی محله ی ما تعطیل است.

امروز نانوایی محله ما تعطیل است.

نتیجه: امروز دوشنبه است.

۲) تیم ملی فوتبال ایران، یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی می رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی رود.

[۱] Symbolic Logic

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می رود.

۳) اگر وضعیت آلودگی هوا ناسالم باشد، آن گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است.

۴) هیچ عدد مرکبی، عددی اول نیست .

۴ عددی مرکب است.

نتیجه: ۴ عددی اول نیست .

این استدلال از چند جملهٔ خبری به دست می آید، اگر دو جملهٔ اول این استدلال را درست در نظر بگیریم، در این صورت، نتیجه گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می رسد. در منطق ریاضی به دو جملهٔ خبری نخست، مفروضات استدلال و به جملهٔ خبری سوم، نتیجهٔ استدلال گفته می شود. یک استدلال می تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه ، مفروضات استدلال اند .

یک استدلال زمانی معتبر است که اگر فرض های آن درست باشند، نتیجه نیز درست باشد .

گزاره : به جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده ، دارای ارزش درست یا نادرست (راست[۲] یا دروغ[۳]) باشد، گزاره[۴] می گوییم. معمولاً گزاره ها را با حروف P ، q ، r ... نمایش می دهند .

---

۲ Truth
۳ False
٤ Proposition

مثال:جملات زیر همگی گزاره هستند.

الف) ایران کشور آسیایی است.

ب) ماست سیاه است.

ج)یازده عددی زوج است.

ارزش گزاره :درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا « T » و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف « ن» یا « F » نمایش می دهیم.

نکته :یک گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد.

نکته:جمله های پرسشی ، امری و عاطفی (نشان دهندهٔ احساسات) دعائی ، آرزویی و نظایر آن گزاره محسوب نمی شود ؛ زیرا خبری را بیان نمی کنند همچنین نمی توان حکم به درستی یا نادرستی آنها نمود فقط جمله های خبری هستند که دو ارزش بیشتر ندارند یا قطعاً راست هستند یا قطعاً دروغ می باشند.

مثال: جمله های زیر هیچ خبری را بیان نمی کنند؛ بنابراین گزاره محسوب نمی شوند.

بیا.

نرفته ای؟

الهی خوشبخت شوی

ای کاش جوان بودم

چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)

لطفاً در کلاس را ببندید. (امری)

اینجا آشپز کیست ؟ (پرسشی)

نکته :ارزش درستی یا دروغ بودن یک گزاره گاهی معلوم نیست مانند گزاره های زیر

الف) نیوتن ظهر روز قبل از مرگش سرفه کرد.

ب)درکهکشان های دیگر،حیات وجود دارد.

ج)« هر عدد زوج بزرگ تر از ۲ را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت[۵]»؛

مانند :

$$۴ = ۲ + ۲; ۶ = ۳ + ۳; ۸ = ۳ + ۵; ۱۰ = ۵ + ۵; ۱۲ = ۵ + ۷$$

گزارهٔ (ج)یک حدس در ریاضیات است. این حدس تاکنون اثبات نشده است ؛ از طرفی هم برای آن مثال نقضی یافت نشده است. در هر صورت ، این گزاره فقط یک ارزش دارد. اگر ارزش این گزاره درست نباشد ، پس ارزش آن حدس، نادرست است.

حدس :حدس ها در ریاضیات به مسائل حل نشده ای می گویند که پروندهٔ آنها در جهان علم باز است. این گونه مسائل علاوه بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است ، تاکنون هم برای آنها مثال نقضی پیدا نشده است ، حدس گلدباخ نمونه ای از این مسائل است

[۵] حدس گلد باخ

مثال: از بین جمله های زیر، گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

الف) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید ، برابر با $\frac{۱}{۳}$ است. گزاره هست. و ارزش آن درست است.

ب)ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم . گزاره نیست

پ) آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟ گزاره نیست

ت) هر عدد فرد بزرگ تر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت . گزاره هست و ارزش آن نامعلوم می باشد

ث)هر معادله درجه دوم دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد . گزاره هست و ارزش آن نادرست است.

ج)صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است . گزاره هست .

مثال: کدام یک از جملات زیر گزاره هستند .

۱) ۳۷ عددی فرد است . گزاره هست

۲) $-۴ < -۷$. گزاره هست

۳) $۱۰^{۱۳}$ عدد بزرگی است . گزاره نیست

۴) $۲^{۱۰۰} + ۱$ عدد اول است . گزاره هست

۵)هزارمین عدد اول ۷۳۵۴۲۱ است . گزاره هست .

۶) گل سرخ زیباست . گزاره نیست

۷) سعدی شاعر خوبی است . گزاره نیست

۸) به به چه باغ زیبایی. گزاره نیست

۹) لطفاً کتاب هایتان را باز کنید . گزاره نیست

۱۰) چه هوای خوبی! گزاره نیست

۱۱) اینجا آشپز کیست ؟ گزاره نیست

۱۲)لطفاً درب کلاس را ببندید . گزاره نیست

مثال: از جملات زیر کدام گزاره است ، ارزش گزاره ها را در صورت امکان مشخص کنید .

الف) خیام پزشک ایرانی است . گزاره هست و نادرست

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. گزاره هست و درست

پ) $۶ < ۵ + ۳$. گزاره هست و درست

ت) تخته سیاه را پاک کنید . گزاره نیست

ث) $\{۱\} \in \{۲,۳,۴\}$.گزاره هست و نادرست

ج) چه باران شدیدی می آید . گزاره نیست

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. گزاره هست و نادرست

ح) $R \not\subset \emptyset$ گزاره هست و نادرست

خ) $Z \in \sqrt{۲}$ گزاره هست و نادرست

د) عدد $۸ + ۵^{۹}$ عددی اول است . گزاره هست

ذ) به امید کامیابی شما . گزاره نیست

ر) آمار ، مجموعه ای از اعداد ، ارقام و اطلاعات است. گزاره هست

بیشتر بدانیم:

آیا هر جمله ی خبری، به صرف خبری بودن آن، استحقاق حضور در این گنجینه را دارد؟ انتظاری که از یک جمله ی خبری داریم این است که وقتی توسط کسی بیان می شود دارای یکی، و فقط یکی، از دو ارزش راست یا دروغ باشد. طبیعی است جمله های خبری دو پهلو را نخواهیم پذیرفت . اما مگر می شود جمله ای واجد خبر باشد و نه ارزش راست داشته باشد نه دروغ ، یا هم ارزش راست داشته باشد هم دروغ؟

جملاتی هستند که خبری را بیان می کنند اما راست یا دروغ بودن آن ها بستگی به زمان و مکان مطرح شدن آن ها دارد. مثلاَ جمله ای خبری مانند " هوا سرد است" بستگی به این دارد که کی و کجا گفته شود. به علاوه ، ما تعریف درستی از سرد بودن نداریم و لذا درستی این جمله نسبی است؛ نسبت به مکان ، زمان و تعریف ما از سرد بودن هوا. از طرف دیگر جملاتی خبری وجود دارند که تعاریف به کار رفته در آن ها کاملاَ مشخص است ولی دانش ما در حدی نیست که بتوانیم درستی یا نادرستی آن ها را تشخیص دهیم. مثلاَ این جمله ی خبری که " در مریخ حیات وجود دارد " به خودی خود درست یا نادرست است، گرچه دانش کنونی ما پاسخ دقیقی به درستی یا نادرستی آن نمی دهد.

قسمت جالب تر بحث مربوط به جملاتی است که تعاریف به کار رفته در آن ها کاملاَ مشخص است و دانش ما در تعیین درستی یا نادرستی آن ها کافی است اما خود جمله ذاتاَ دارای این مشکل است که می تواند هم درست و هم نادرست یا نه درست و نه نادرست باشد. ممکن است این امر به نظر عجیب بیاید ، اما به جمله ی زیر توجه کنید :

جمله ای که در حال نوشتن آن هستیم دروغ است.

واضح است که مشکلی در تعبیر راست و دروغ بودن این جمله نداریم و درستی آن وابسته به زمان و مکان نیست اما با این حال نمی توان آن را راست دانست چون اگر راست باشد دروغ بودن خود را نتیجه خواهد داد، و به علاوه نمی توان آن را دروغ دانست چون دروغ بودن آن راست بودنش را نتیجه می دهد.

الگوریتم تشکیل جدول درستی

۱. اسم گزاره ها را به ترتیب حروف الفبایی می نویسیم $(...,r,q,p)$

۲. تعداد سطرهای لازم را به دست می آوریم ($\text{تعداد سطرها} = ۲^{\text{تعداد گزاره ها}}$) . در ستون مربوط به آخرین گزاره(گزاره سمت راست)، به تعداد سطرهای حساب شده، یک در میان T و F بنویسید.

P	q
	T
	F
	T
	F

نکته :با توجه به اینکه هر گزاره می تواند یکی از دو ارزش « د» یا « ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب ، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت ، تعداد سطرهای جدول ارزش های آن برابر است با:

$$\underbrace{۲ \times ۲ \times ... \times ۲}_{n \text{ بار}} = ۲^n$$

۳. به ستون سمت چپ برگشته و به جای اینکه یک در میان یک T و یک F بنویسید ، یک در میان دو تا T و دو تا F بنویسید.

P	q
T	T
T	F
F	T
F	F

۴. در صورت لزوم ، این فرایند را برای متغیرهای باقیمانده با دو برابر کردن تعداد T ها و F ها نسبت به ستون سمت راست ، جهت یک بار در میان نوشتن تکرار می کنیم .

مثال:

هر گزاره دارای ارزش درست و نادرست است؛ بنابراین ، **هر گزارهٔ مانند p** فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه رو می گیرد.

p
د
ن

ارزش های دو گزارهٔ p و q ، طبق جدول روبه رو چهار حالت دارد.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ارزش های سه گزاره p، q و r، طبق جدول روبه رو ۸ = $۲^۳$ سطردارد .

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

گزاره نما

فعالیت: عبارت های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف)a عددی فرد است.

ب)در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پ)حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است . $(۳x + ۲y = ۶)$

۱)ارزش کدام یک از جملات بالا را می توانید تعیین کنید ؟ هیچ کدام

۲)اگر به جای متغیر در جملهٔ « a عددی فرد است» قرار دهیم a=۳ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید .

درست است

اگر در آن a=۴ قرار دهیم ، در این صورت ارزش آن چیست؟ نادرست است

۳)اگر در جملهٔ « ب» قرار دهیم $A = \{۱,۲,۳\}$ در این صورت ، ارزش گزاره حاصل درست می شود

۴)اگر در جملهٔ « ب» قرار دهیم $A = \{۱\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل ، نادرست است .

۵) اگر در جملهٔ « پ» قرار دهیم $x = ۰$ و $y = ۳$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $y = ۱$ و $x = ۱$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

در ریاضیات اکثر جملات به صورت گزاره نیستند . در بسیاری موارد با جملاتی سرو کار داریم که درستی آن ها به مقادیر متغیرهای به کار رفته بستگی دارد.

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره نما** نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها ، یک متغیر ، دو متغیره و ... می نامیم .

مثال : عبارات ریاضی زیر، همه گزاره نما هستند.

الف) $x + ۴ = ۳$

ب) مجموع اولین n عدد فرد ، مساوی $n^۲$ است.

ج) اگر $x < ۳$ ، آن گاه ، $x^۲ = -۱$

د) $x + y = ۴$

ه) اگر $x < y$ ، آن گاه ، $x^۲ < y^۲$

و) $x + y = ۴$ ، اگر و تنها اگر، $y = ۴ - x$

دامنهٔ متغیر گزاره نما

در هر گزاره نما به مجموعهٔ مقادیری که می توان آنها را به جای متغیر های آن قرار داد، تا اینکه گزاره نما به گزاره تبدیل شود، **دامنهٔ متغیر[۶] گزاره نما** می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

[۶] Domain of Variable

مثال: دامنه متغیر گزاره نماهای زیر را مشخص کنید.

الف) دامنهٔ متغیر گزاره نمای « P عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی

ب) دامنهٔ متغیر گزاره نما ی « x عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح

پ) دامنهٔ متغیر گزاره نمای« $۴x^۲ + x - ۵ = ۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی

در هر گزاره نما ، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آنها، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب** گزاره نما[۷] می گویند و آن را با حرف S نمایش می دهند و همواره داریم :

$S \subseteq D$

مثال: دامنهٔ متغیر گزاره نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک از آنها را مشخص کنید .

الف) x مضرب ۷ است . $(D = Z)$ $S = \{۰, \pm۷, \pm۱۴, \pm۲۱, \dots\}$

ب) $۱۵x^۲ - ۷x - ۸ = ۰$. $(D = R)$ $S = \left\{ ۱ , -\frac{۸}{۱۵} \right\}$

پ)تاس را پرتاب می کنیم و $P(\{x\}) = \frac{۱}{۶}$. $(D = \{ ۱,۲, \dots ,۶\}$ $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

مثال: دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره نماهای زیر، مجموعهٔ اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است . جواب $\{۰,۱, ۴, ۱۶, ۲۵, \dots\}$

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است .

جواب

---

[۷] Answer set

$$\{\dots, -۱۴, -۹, -۴, ۱, ۶, ۱۱, ۱۶, \dots\}$$

پ) $\frac{۲x+۱}{۳} \leq -۱$

جواب: $\frac{۲x+۱}{۳} \leq -۱ \overset{\times ۳}{\Rightarrow} ۲x + ۱ \leq -۳ \to ۲x \leq -۴ \to x \leq -۲$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \{-۲, -۳, -۴, \dots\}$$

ت) $\{n(n + ۱) = ۰ \mid n \in W\}$

جواب :

$$\begin{cases} n = ۰ \\ n + ۱ = ۰ \to n = -۱ \ \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \text{جواب} = \{۰\}$$

نقیض یک گزاره :

نقیض یک گزاره ،گزاره ای است که ارزش گزاره ی اول را نفی می کند .

نقیض گزارهٔ P به صورت $\sim p$ نوشته می شود و آن را « چنین نیست که p » می خوانیم . اگر ارزش گزارهٔ p درست باشد . در این صورت ، ارزش گزارهٔ $\sim P$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد ، ارزش نقیض آن درست است . به علامت «$\sim$» ناقض گفته می شود و « چنین نیست که» خوانده می شود .

مثال: نقیض گزارهٔ « ۲ عددی گنگ است» را می توان به صورت های زیر نوشت .

« چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد » یا « ۲ عددی گنگ نیست»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می گیرد ، به صورت روبه روست :

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید .

۱) ۷ عددی فرد است (درست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ ۷ عددی فرد نیست (نادرست)

۲) ۳۱ عددی اول است (درست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ ۳۱ عددی اول نیست (نادرست)

۳) $۱۰^۵ = ۱۰^۳ + ۱۰^۲$ (نادرست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ $۱۰^۵ \neq ۱۰^۳ + ۱۰^۲$ (درست)

۴) $۳ + ۴ = \sqrt{۹ + ۱۶}$ (نادرست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ $۳ + ۴ \neq \sqrt{۹ + ۱۶}$ (درست)

۵) $۳ > ۷$ (درست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ $۳ \leq ۷$ (نادرست)

۶) ۲ عددی گنگ است(نادرست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ ۲ عددی گنگ نیست(درست)

۷) $۳ \leq ۴$(نادرست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ $۳ > ۴$(درست)

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۸) $a \in \{b, c, d\}$ (نادرست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ $a \notin \{b, c, d\}$(درست)

۹) ابولوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی است(درست) $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ ابولوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی نیست .

(نادرست)

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید .

الف) $\sqrt{۱۰} < ۱۰$ ب) $۳ \leq \frac{۱۵}{۳}$ پ) $۳ \in \{۱,۲,۵\}$ ت) $۲^۲ + ۲^۳ = ۲^۵$

الف) $P: (\sqrt{۱۰} < ۱۰) \Longrightarrow \sim p: (\sqrt{۱۰} \geq ۱۰)$

ب) $p: \left(\frac{۱۵}{۳} \leq ۳\right) \Rightarrow \sim p: \left(\frac{۱۵}{۳} > ۳\right)$

پ) $p: (۳ \in \{۱,۲,۵\}) \Longrightarrow \sim p: (۳ \notin \{۱,۲,۵\})$

ت) $p: (۲^۲ + ۲^۳ = ۲^۵) \Longrightarrow \sim p : (۲^۲ + ۲^۳ \neq ۲^۵)$

تذکر: ممکن است تصور شود که نقیض گزاره ی اکنون شب است این باشد که اکنون روز است، اما این به هیچ وجه با تعریف ما سازگار نیست چرا که در حقیقت در این دیدگاه از نقیض گزاره ، ما به نوعی دانش خود در مورد روز و شب را به عنوان دو مفهوم متضاد هم دخیل کرده ایم . به علاوه نقیض شب بودن را نمی توان روز بودن دانست ، چرا که ممکن است اکنون نه شب باشد و نه روز . بهترین و ساده ترین راه برای بیان نقیض گزاره ی اکنون شب است این است که بگوییم چنین نیست که اکنون شب است یا به طور معادل بگوییم که اکنون شب نیست.

ترکیب گزار ها

همان گونه که در علم حساب ، چهار عمل اصلی را بر روی اعداد ، اعمال و اعداد جدیدی به دست می آوریم در حساب گزاره ها نیز می توانیم گزاره ها را با استفاده از برخی حروف پیوندی ، ترکیب و گزاره های جدیدی به دست آوریم . به عنوان مثال « عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است» این گزاره از دو بخش تشکیل شده است که اگرحرف p را برای نمایش گزاره « عدد ۲ زوج است» و حرف q را برای نمایش گزاره « عدد ۵ مضرب ۳ است» به کار ببریم آنگاه عبارت مزبور را به صورت pوq می نویسیم . در این مثال حرف « و » برای

ترکیب دو گزاره به منظور تشکیل گزاره واحد به کار رفته است که درست یا نادرست بودن آن به هر یک از گزاره های p و q بستگی دارد.

نکته : از ترکیب دو یا چند گزاره ساده به وسیلهٔ رابط های گزاره ای (ادات ربط) ، گزاره های مرکب به دست می آیند .

رابط های گزاره ای: رابط های گزاره ای عبارتند از « **و**» ، « **یا** » ، « **اگر –آنگاه** » ، « **اگر و تنها اگر** » که گزاره های ساده را به هم وصل می کند .

مثال: گزاره های زیر همگی مرکب هستند.

الف)عدد ۲ زوج است **یا** عدد ۵ مضرب ۳ است .

ب)عدد ۲ زوج است **و** عدد ۵ مضرب ۳ است

پ)اگر عدد ۲ زوج باشد ، **آن گاه** عدد ۵ مضرب ۳ است .

ت) عدد ۲ زوج است **اگر و تنها اگر** عدد ۵ مضرب ۳باشد.

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

p: $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

q: ۲ عددی اول نیست .

گزارهٔ مرکب « $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزارهٔ ساده p و q با ربط منطقی « یا » تشکیل شده است ، ترکیب فصلی دو گزاره می گوییم . هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزارهٔ مرکب « p و q » را که به صورت « $p \vee q$» می نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می گوییم . در اینجا به رابط منطقی «V» **فاصل** گفته می شود .

مثال: گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید:

« پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید، **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید»

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزارهٔ مرکب بالا درست است. اگر مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید ، آن گاه ارزش گزارهٔ مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزارهٔ مرکب درست است.

گزارهٔ مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین، ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشد و در بقیهٔ حالات ، ارزش $p \vee q$ درست است.به عبارت دیگر ترکیب فصلی وقتی درست است که حداقل یک گزاره سازهای آن درست باشد در غیر این صورت نادرست است. جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال: از ترکیبات فصلی زیر همه، به جز چهارمی، درست اند:

– ماست سفید است یا خروس دو پا دارد.

–ماست سفید است یا خروس سه پا دارد.

– ماست سیاه است یا خروس دو پا دارد.

– ماست سیاه است یا خروس سه پا دارد.

مثال : کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

الف) $(۵ < ۷) \vee ((-۳)^۲ = ۹)$

ب) ۹۳ عددی فرد یا عددی اول است.

پ) $(۵^۴ = ۱۲۵) \vee (۲^۹ = ۵۱۲)$

ت) $(۳ + ۵)! = ۳! + ۵! \vee \left(\sqrt{۳^۲ + ۵^۲} = ۳ + ۵\right)$

ث) $(۲ = ۰) \vee (۵ > ۳)$

حل الف) ارزش گزارهٔ $(۷ < ۵)$ درست است و ارزش گزارهٔ $(-۳)^۲ = ۹$ نیز درست است ، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی درست است.

ب) ارزش گزارهٔ « ۹۳ عددی فرد است.» درست و ارزش گزارهٔ « ۹۳ عددی اول است .» نادرست است. پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی درست است.

پ) ارزش گزارهٔ «$۱۲۵ = ۵^۴$» نادرست است و ارزش گزارهٔ « $۵۱۲ = ۲^۹$» درست است . پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی درست است.

ت) ارزش گزارهٔ « $۵! + ۳! = (۵ + ۳)!$» نادرست است ، زیرا $۱۲۶ \neq ۴۰۳۲۰ \Longrightarrow ۱۲۰ + ۶ \neq ۸!$ و ارزش گزارهٔ $\sqrt{۳۴} = ۸ \Longrightarrow ۵ + ۳ = \sqrt{۹ + ۲۵}$ نیز نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی نیز نادرست است.

ث)درست

مثال: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a \times b = ۰$ در این صورت $a = ۰$ یا $b = ۰$ یعنی:

$$a, b \in R, a \times b = ۰ \Longrightarrow (a = ۰) \vee (b = ۰)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله ها استفاده می کنیم:

$$x^۲ + ۷x = ۰ \Longrightarrow x(x + ۷) = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \text{ یا } x + ۷ = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۷$$

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزارهٔ مرکب « $p \wedge q$» که خوانده می شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می گوییم . در اینجا به رابط منطقی «$\wedge$» **عاطف** گفته می شود .

مثال: ارزش گزاره های مرکب زیر رامشخص کنید .

– ماست سفید است و ۲+۳ برابر ۵ است (درست)

P (درست) $\wedge$ q (درست)

– ماست سفید است و ۲+۳ برابر ۴ است (نادرست)

P (درست) $\wedge$ q (نا درست)

– ماست سیاه است و ۲+۳ برابر ۵ است . (نادرست)

P (نا درست) $\wedge$ q (درست)

– ماست سیاه است و ۲+۳ برابر ۴ است (نادرست)

P (نا درست) $\wedge$ q (نا درست)

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشند و در بقیهٔ حالات $p \wedge q$ نادرست است.

جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت روبه رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	**د**
د	ن	**ن**
ن	د	**ن**
ن	ن	**ن**

مثال:

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد	ماه شهریور ۳۱ روز دارد	د	د	د	د
عدد ۲ اول نیست	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	عدد ۵ مرکب است	د	ن	د	ن
۲ عددی مرکب است	عدد ۷ مضرب ۴ است	ن	ن	ن	ن
(۷−)اول است	۵ عددی اول است	ن	د	د	ن

مثال: کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

الف) عدد ۱۴۴ بر ۴ و ۳۶ بخش پذیر است.   ب) رم پایتخت ایتالیا و یکی از شهرهای ایران است.

پ) $(-۵ < -۳) \wedge (۵ < ۴)$ ت) $(\sqrt{۰/۰۱} > \sqrt{۰/۰۴}) \wedge \left(۲^{۳^۲} > (۲^۳)^۲\right)$

ث) $\{۲,۳,۴\} \ni ۱) \vee \left(\frac{۳}{۶} \neq \frac{۱}{۲}\right)$

حل الف) گزارهٔ اول یعنی « ۱۴۴ بر ۴ بخش پذیر است» درست و گزارهٔ دوم یعنی « ۱۴۴ بر ۳۶ بخش پذیر است» نیز درست است ، در نتیجه ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی نیز درست است .

ب) گزارهٔ اول « رم پایتخت ایتالیا است. » درست و گزارهٔ دوم « رم یکی از شهرهای ایران است.» نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عاطفی نادرست است.

پ) ارزش گزارهٔ « $-۳ > -۵$» نادرست و ارزش گزارهٔ «$۴ > ۵$» درست است. پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی نادرست است.

ت) گزارهٔ $۰/۱ > ۰/۲ \Leftarrow \sqrt{۰/۰۱} > \sqrt{۰/۰۴}$ دارای ارزش درست است و گزارهٔ $۵۱۲ > ۶۴ \Leftarrow ۲^۹ > ۸^۲ \Leftarrow ۲^{۳^۲} > (۲^۳)^۲$ نیز دارای ارزش نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی نادرست است.

ث) نادرست

تذکر : از الفاظ که از نظر منطقی مترادف عطف است لفظ « اما – ولی» است. مثلاً گزاره ی « ۷ فرد است ولی اول نیست به معنی « ۷ فرد است و ۷ اول نیست» می باشد که البته گزاره ای نادرست است.

مثال : مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$(۲x-y)^۲+(x-۱)^۲=۰$$

حل: چون $(x-۱)^۲\geq ۰$ و $(۲x-y)^۲\geq ۰$ بنابراین، تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$[(۲x-y)^۲=۰]\wedge[(x-۱)^۲]=۰\Rightarrow\begin{cases}۲x-y=۰\\x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}\Rightarrow y=۲$$

مثال : مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

آ) $(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۰$ ب) $|۲x-۳|+|x+y|=۰$

پ) $x^۲+۲x+۱+y^۲=۰$

۱۸ آ)

$$(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۰$$

چون $(x-۳)^۲\geq ۰$ و $(y+۱)^۲\geq ۰$ پس تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x-۳)^۲=۰)\wedge((y+۱)^۲=۰)\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۰\Rightarrow x=۳\\\wedge\\y+۱=۰\Rightarrow y=-۱\end{cases}$$

نتیجه : این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=۲$ و $y=-۱$ باشد .

ب) چون $|x+y|\geq ۰$ و $|۲x-۳|\geq ۰$، پس این تساوی وقتی برقرار است که:

$$(|۲x-۳|=۰)\wedge(|x+y|)=۰\Rightarrow\begin{cases}۲x-۳=۰\Rightarrow ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\\\wedge\\x+y=۰\Rightarrow\frac{۳}{۲}+y=۰\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=\frac{۱}{۲}$ و $y=-\frac{۳}{۲}$ باشد .

پ)

$$x^{۲} + ۲x + ۱ + y^{۲} = ۰ \Longrightarrow (x + ۱)^{۲} + y^{۲} = ۰$$

چون $y^{۲} \geq ۰$ و $(x + ۱)^{۲} \geq ۰$ پس تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x + ۱)^{۲} = ۰) \wedge (y^{۲} = ۰) \Longrightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -۱ \\ \qquad \wedge \\ y = ۰ \end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x = -۱$ و $y = ۰$ باشد .

نحوه تکمیل کردن جدول ارزش گزاره های مرکب

- چند سطر سمت چپ جدول را به گزاره های p , q , r ,... اختصاص می دهیم(با توجه به تعداد گزاره های به کار رفته در سوال) و همانند آنچه که در تشکیل جدول گزاره ها بیان کردیم ستون های مربوط به آنها را تکمیل می کنیم
- گزاره را باتوجه به اولویت بندی زیراز چپ به راست در سطراول قرار می دهیم و آنها را ارزیابی می کنیم.

الف) نخست داخلی ترین پرانتز را قرار می دهیم و آن را ارزیابی می کنیم

ب)برای داخلی ترین پرانتزاولویت انجام محاسبات به صورت زیر است:

۱. در مرحله نخست $\sim$ انجام می شود.

۲. در مرحله بعد اعمال $\vee$ و $\wedge$ ، از چپ به راست انجام می شود.

۳. در پایان اعمال $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$ ، از چپ به راست انجام می شود.

مثال : جدول ارزش هر مورد را رسم کنید .

الف) $p \vee (\sim q \vee p)$

p	q	$\sim q$	$\sim q \vee p$	**$p \vee (\sim q \vee p)$**
د	د	ن	د	**د**
د	ن	د	د	**د**
ن	د	ن	ن	**ن**
ن	ن	د	د	**د**

ب) $(p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim p \vee r$	**$(p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$**
د	د	د	د	ن	د	**د**
د	د	ن	د	ن	ن	**د**
د	ن	د	د	ن	د	**د**
د	ن	ن	د	ن	ن	**د**
ن	د	د	د	د	د	**د**
ن	د	ن	د	د	د	**د**
ن	ن	د	ن	د	د	**د**
ن	ن	ن	ن	د	د	**د**

پ) $\sim (p \vee \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	**$\sim (p \vee \sim q)$**
د	د	ن	د	**ن**
د	ن	د	د	**ن**
ن	د	ن	ن	**د**
ن	ن	د	د	**ن**

ت) $\sim (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	**د**
د	ن	د	د	**ن**
ن	د	ن	ن	**د**
ن	ن	د	ن	**د**

گزاره های هم ارز منطقی

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim (\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت ، با ارزش گزاره p مقایسه کنید .

حل:

p	$\sim P$	$\sim (\sim p)$
د	ن	**د**
ن	د	**ن**

همان طور که ملاحظه می کنید ، در هر حالت از جدول ، ارزش p با ارزش $\sim (\sim p)$ یکسان است. در این حالت می گوییم : دو گزاره p و $\sim (\sim p)$ هم ارز منطقی هستند و می نویسیم : $\sim (\sim p) \equiv p$.

در حالت کلی اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند می نویسیم : $p \equiv q$ و می خوانیم : p هم ارز است با q

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره ها، نشان دهید که گزاره های $\sim(p \vee q)$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم ارز منطقی هستند. یعنی: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	**ن**	ن	ن	**ن**
د	ن	د	**ن**	ن	د	**ن**
ن	د	د	**ن**	د	ن	**ن**
ن	ن	ن	**د**	د	د	**د**

همان طور که ملاحظه می کنید ، همهٔ حالت های ارزش دو گزارهٔ $\sim(p \vee q)$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ یکسان اند در منطق ریاضی به این هم ارزی **قانون دمورگان** گفته می شود . درحقیقت با توجه به قانون دمورگان نقیض گزاره فصلی را به دست آورده ایم

نقیض گزاره فصلی: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

تذکر: در تشکیل جدول ارزش گزاره های هم ارزمنطقی ابتدا سمت چپ هم ارزی را مطابق آنچه که در تشکیل جدول ارزش گزاره ها بیان کردیم قرار می دهیم سپس سمت راست را قرار می دهیم.

مثال : با توجه به جدول ارزش گزاره ها نشان دهید که $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

همان طور که ملاحظه می کنید ، همهٔ حالت های ارزش دو گزارهٔ $\sim (p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ یکسان اند در منطق ریاضی به این هم ارزی نیز **قانون دمورگان** گفته می شود . درحقیقت با توجه به قانون دمورگان نقیض گزاره عطفی را نیز به دست آورده ایم

نقیض گزاره عطفی: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید .

الف) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

نقیض: ۲ عدد زوج نیست و عدد π گویا نیست

ب)خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

نقیض:خورشید به دور زمین نمی چرخد یا سنندج مرکز کردستان نیست.

مثال : جدل ارزش گزاره ی $\sim p \vee p$ را تشکیل دهید.

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	**د**
ن	د	**د**

نکته : گزاره هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره هایی همیشه درست می نامیم یعنی گزاره ای که فقط ارزش T دارد و به صورت زیر می نویسیم

$$\sim p \vee p \equiv T$$

مثال : جدول های ارزش گزاره های زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره ها همواره درست هستند .

$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$
د	د	ن	ن	د	د	**د**
د	ن	ن	د	د	ن	**د**
ن	د	د	ن	ن	د	**د**
ن	ن	د	د	د	د	**د**

در نتیجه: $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

تمرین : به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید $p \vee T \equiv T$

مثال : جدول ارزش گزاره ی $\sim p \wedge p$ را تشکیل دهید.

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	**ن**
ن	د	**ن**

نکته: گزاره هایی نظیر $(p \wedge \sim q)$ را همیشه نادرست می نامیم یعنی گزاره ای که فقط ارزش F دارد . و به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\sim p \wedge p \equiv F$$

مثال : جدول ارزش گزاره ی $\sim p \wedge (q \wedge p) \equiv F$ را تشکیل دهید.

p	q	$q \wedge p$	$\sim p$	$\sim p \wedge (q \wedge p)$
د	د	د	ن	**ن**
د	ن	ن	ن	**ن**
ن	د	ن	د	**ن**
ن	ن	ن	د	**ن**

تمرین: به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید $p \vee F \equiv P$

تمرین: به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهیدترکیب فصلی دارای خاصیت های جابه جایی و شرکت پذیری است.

به عبارت دیگر :

الف) $p \vee q \equiv q \vee p$

ب) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

تمرین: به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید ترکیب عطفی دارای خاصیت های جابه جایی و شرکت پذیری است . به عبارت دیگر :

الف) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ب) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

قوانین توزیع پذیری (پخشی)

الف) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	**د**	د	د	**د**
د	د	ن	د	**د**	د	ن	**د**
د	ن	د	د	**د**	ن	د	**د**
د	ن	ن	ن	**ن**	ن	ن	**ن**
ن	د	د	د	**ن**	ن	ن	**ن**
ن	د	ن	د	**ن**	ن	ن	**ن**
ن	ن	د	د	**ن**	ن	ن	**ن**
ن	ن	ن	ن	**ن**	ن	ن	**ن**

ب) $P \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	**د**	د	د	**د**
د	د	ن	ن	**د**	د	د	**د**
د	ن	د	ن	**د**	د	د	**د**
د	ن	ن	ن	**د**	د	د	**د**
ن	د	د	د	**د**	د	د	**د**
ن	د	ن	ن	**ن**	د	ن	**ن**
ن	ن	د	ن	**ن**	ن	د	**ن**
ن	ن	ن	ن	**ن**	ن	ن	**ن**

قوانین جذب

الف) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

ب) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

خواص گزاره ها:

۱-خاصیت جابجایی

الف) $q \vee p \equiv p \vee q$

ب) $q \wedge p \equiv p \wedge q$

۲-خاصیت شرکت پذیری

الف) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

ب) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

با توجه به خاصیت شرکت پذیری، ملاحظه می شود که اگر عبارتی، از گزاره هایی تشکیل شده باشد که همهٔ آن ها با استفاده از عملکرد $\vee$ $(\wedge)$ به هم پیوند خورده باشند، نیازی به نوشتن پرانتز نخواهد بود.

۳- خاصیت پخش پذیری

الف) $(p \wedge q) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (q \vee r)$

ب) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$

۴- قانون دمورگان

الف) $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q)$

ب) $\sim p \vee \sim q \equiv \sim (q \wedge q)$

۵- خاصیت خود توانی

الف) $p \equiv p \vee p$

ب) $p \equiv p \wedge p$

۶. خاصیت همانی: اگر T نشانهٔ گزارهٔ همیشه درست یعنی گزاره ای که فقط ارزش T دارد و F نشانهٔ گزارهٔ همیشه نادرست باشد:

الف) $p \equiv p \vee F$ الف) $T \equiv P \vee T$

ب) $F \equiv p \wedge F$ ب) $P \equiv p \wedge T$

۷. خاصیت متمم

الف) $T \equiv p \vee \sim \mathrm{p}$

ب) $F \equiv p \wedge \sim \mathrm{p}$

۸ خاصیت جذبی

الف) $p \equiv p \vee (p \wedge q)$

ب) $p \equiv p \wedge (p \vee q)$

۹ . خاصیت نقیض دو گانه

$\sim (\sim p) \equiv p$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می شود «اگر p آن گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می گوییم . در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می نلمیم .

گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$» را به صورت های « p شرط کافی برای q است » و « q شرط لازم برای p است» می خوانیم.

مثال: گزارهٔ شرطی « اگر یک چهار ضلعی مستطیل باشد ، آن گاه دو قطرش مساویند .» را به دو شکل مختلف دیگر بنویسید.

پاسخ:

۱-مستطیل بودن یک چهار ضلعی شرط کافی برای مساوی بودن قطرهای آن است.

۲-مساوی بودن قطرهای یک چهار ضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.

مثال : فرض کنید پدر کیان به او گفته است که « اگر در درس آمار و احتمال نمره ی ۲۰ بگیری آنگاه برایت یک دو چرخه خواهم خرید»

تحلیل گزاره های به این شکل ، حرف پیوندی جدیدی به نام حرف شرطی را نتیجه می دهد حالت های مختلف را بررسی می کنم.

الف) $\underbrace{\text{کیان در درس آمار و احتمال نمره ۲۰ گرفته}}_{p(\text{درست})}$ و $\underbrace{\text{آن گاه پدر وی برای او دو چرخه خرید}}_{q(\text{درست})}$ (درست)

ب) کیان درس آمار و احتمال نمره ۲۰ گرفته آنگاه پدر وی برای او دوچرخه نخرید (نادرست)

$\underbrace{\hspace{6cm}}_{p\,(\text{درست})}$ $\underbrace{\hspace{6cm}}_{q\,(\text{نادرست})}$

پ) کیان درس آمار و احتمال نمره ۲۰ نگرفته آنگاه پدرش برای او دوچرخه خرید (درست)

$\underbrace{\hspace{6cm}}_{p\,(\text{نادرست})}$ $\underbrace{\hspace{6cm}}_{q\,(\text{درست})}$

در این حالت نیز جواب درست است چون اگر می گفت **فقط** اگر در درس آمار و احتمال نمره ۲۰ بگیری برایت دو چرخه خواهم خرید جواب نادرست می شد در اینجا گفته اگر درس آمار و احتمال نمره ۲۰ بگیری دو چرخه برایت خواهم خرید که نمره ۲۰ نگرفته ولی باز اگر پدرش برایش دو چرخه بخرد ایرادی ندارد.

ت) کیان در درس آمار و احتمال نمره ۲۰ نگرفته آنگاه پدرش برایش دو چرخه نخرید (درست)

$\underbrace{\hspace{6cm}}_{p\,(\text{نادرست})}$ $\underbrace{\hspace{6cm}}_{q\,(\text{نادرست})}$

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	**د**
د	ن	**ن**
ن	د	**د**
ن	ن	**د**

مثال : گزارۀ مرکب $p \Rightarrow q$ را « اگر هوا آفتابی باشد آنگاه به مسافرت خواهیم رفت» در نظر می گیریم . از نظر ما این قرار (گزاره) چه وقت نقیض می شود (دروغ) ؟ بدیهی است که این قرار فقط در حالتی که هوا، آفتابی باشد (p راست باشد) و ما به مسافرت نرویم نقیض شده است. در نتیجه ستون نهایی جدول ارزش $p \Rightarrow q$ به جز حالتی که p راست و q دروغ باشد در هر حالتی باید ارزش درست داشته باشد . معمولاً بحث بر سر سطر سوم این جدول است. تصور اکثر افراد بر این است که اگر مقدمه ی یک ترکیب شرطی نادرست باشد و نتیجه ای که گرفته می شود درست باشد نباید ارزش ترکیب را درست دانست . اجازه دهید با ذکر مثالی موضوع را روشن سازیم.

مثال: فرض کنیم p گزاره ی "باران می آید" و q گزاره ی " زمین خیس می شود" باشد . ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ را می توان به صورت " اگر باران بیاید آن گاه زمین خیس می شود" بیان کرد . در حالتی که باران بیاید و زمین خیس شود ، ارزش گزاره ی مرکب درست است و بحثی در کار نیست . همچنین در حالاتی که باران بیاید و زمین خیس نشود یا باران نیاید و زمین خیس نشود هم موضوع روشن است. اما بحث بر سر آن است که چرا در حالتی که باران نیامده است ولی زمین خیس است ارزش $p \Rightarrow q$ درست تلقی می شود . آیا در صورتی که چنین وضعیتی اتفاق افتد مثال نقضی برای گزاره ی شرطی ما محقق شده است؟ به تفاوت بین دو جمله ی زیر دقت کنید :

اگر باران بیاید آن گاه زمین خیس می شود.

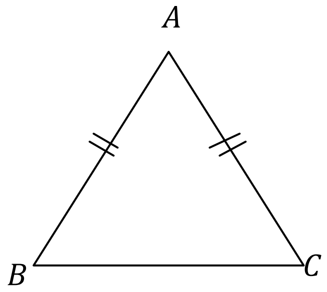
فقط اگر باران بیاید ، زمین خیس می شود.

واضح است که اگر جمله ی دوم را گفته باشیم ، باران نیامده باشد و زمین خیس باشد، آن گاه می توان به جمله ی ما ایراد گرفت.

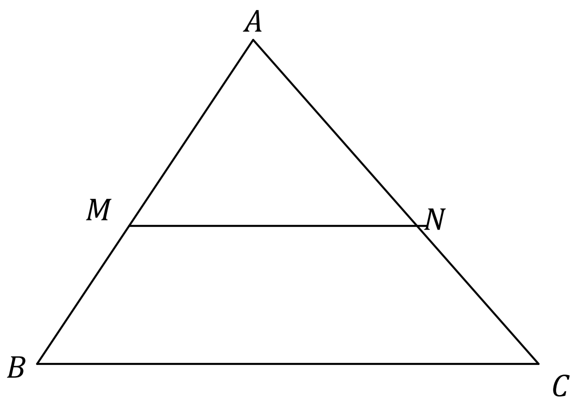
تا به حال در ریاضیات و هندسه با گزاره های شرطی بسیاری مواجه بوده اید، در زیر چند نمونه می آوریم .

مثال: اگر مثلثی متساوی الساقین باشد. آن گاه دو زاویهٔمجاور به قاعده برابرند .

$$\overset{\Delta}{\widehat{ABC}} : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$



مثال: اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم : $MN \parallel BC$ آن گاه $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}$



مثال: $a^2 \le b^2 \Rightarrow (a \le b) \wedge (a \ge -b)$

مثال: $a^2 \ge b^2 \Rightarrow (a \ge b) \vee (a \le -b)$

مثال: اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد ، آن گاه $A \subseteq S$

با توجه به جدول گزاره شرطی می توان نتایج زیر را گرفت:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

نکته: ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

مثال: ارزش گزارهٔ « اگر ۲ زوج است ، آنگاه۱۶ =۲۳ »چیست ؟نادرست است.

مثال: ارزش گزارهٔ « اگر ۲ زوج است ، آنگاه۵۲۳۶۸۴۴۵۳ = ۲۳۰ »چیست؟نادرست است.(دقت کنیم عدد ۲۳۰ حتما عددی زوج می شود یعنی در اینجا تالی نادرست است)

مثال: $\underbrace{-۳ < -۲}_{ن} \Rightarrow \underbrace{۳ < ۲}_{د}$ گزارهٔ کلی نادرست است.

> **نکته:** هرگاه ارزش P (مقدم) نادرست باشد، آن گاه ارزش گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می گویند : ارزش « $p \Rightarrow q$» به **انتفای مقدم** درست است.

مثال: ارزش گزاره ی « اگر $\underbrace{\text{۲ فرد است}}_{ن}$ آنگاه $\underbrace{۴۳۲۱۹۶۳۷۱ = ۷^{۱۸}}_{\text{د یا ن}}$» چیست ؟ به انتفای مقدم درست است.

مثال: ارزش گزارهٔ « اگر ۲ فرد است ، آنگاه۵۲۸۶۴۸۳۵۸ = $۲^{۳۰}$ »چیست؟به انتفای مقدم درست است.

مثال: ارزش گزارهٔ « اگر ۲ فرد است ، آنگاه ۵ > ۲» چیست ؟به انتفای مقدم درست است.

مثال: ارزش گزارهٔ « اگر ۲ فرد است ، آنگاه ۵ < ۲» چیست ؟به انتفای مقدم درست است.

نکته: هرگاه ارزش q (تالی) درست باشد، آن گاه ارزش گزارهٔ مرکب «$p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ p(مقدم) بستگی ندارد.

مثال : $\underbrace{\text{۴۳ عدد اول است}}_{\text{د}} \Rightarrow \underbrace{۳^{۱۱} = ۵۷۴۹۶۳}_{\text{د یا ن}}$ گزاره شرطی درست است.چون تالی درست است

مثال: کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

الف)اگر ۴۰۰ بر ۱۰ بخش پذیر باشد، آن گاه ۴۰۰ بر ۵ نیز بخش پذیر است.

ب) $\left(\frac{۱}{۴}\right) < \left(\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲} > \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$

پ) $\sqrt{۰/۵} > \sqrt{۰/۷} \Rightarrow ۰/۵ < ۰/۷$

ت) $۲^{۵} = ۶۴ \Rightarrow ۲^{۶} = ۱۲۸$

ث) اگر عدد ۴ فرد باشد ، آن گاه ۴ مربع کامل نیست.

پاسخ: الف) در این ترکیب شرطی ، مقدم درست است و تالی نیز درست است ، لذا گزارهٔ شرطی نیز درست است.

ب) مقدم درست و تالی نادرست است، بنابراین گزارهٔ شرطی نادرست است.

پ)با توجه به این که مقدم نادرست و تالی درست است ، بنا به انتفای مقدم ترکیب شرطی درست است.

ت) با توجه به این که مقدم نادرست و تالی نادرست است ، بنا به انتفای مقدم ترکیب شرطی درست است.

ث)درست (انتفای مقدم)

مثال: نشان دهید که گزاره های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارزی منطقی اند.

$\sim p \vee q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	q	p
د	ن	**د**	د	د
ن	ن	**ن**	ن	د
د	د	**د**	ن	ن
د	د	**د**	د	ن

مثال : جدول ارزش گزاره ای مرکب $\sim p \Rightarrow (p \wedge q)$ را رسم کنید .

$\sim p \Rightarrow (p \wedge q)$	$p \wedge q$	$\sim p$	q	p
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	ن	د	د	ن
ن	ن	د	ن	ن

مثال : به کمک جدول ارزش گزاره ها ثابت کنید :

$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د	د	د

نکته: گزارهٔ « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

مثال: قضیهٔ شرطی « اگر a و b دو عدد گویا باشند ، آن گاه $a+b$ گویا است. » را در نظر بگیرید .

الف) عکس قضیهٔ شرطی را بنویسید . ب) آیا عکس آن نیز یک قضیهٔ شرطی است؟ چرا؟

حل الف) عکس قضیه : اگر $a+b$ گویا باشد ، آن گاه a و b دو عدد گویا هستند .

ب) خیر ، مثال نقض :

عدد ۲ گویا است. $a + b = ۱ + \sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۲} = ۲$

در نتیجه $a + b = ۲$ گویا است ولی $a = ۱ + \sqrt{۲}$ و $b = ۱ - \sqrt{۲}$ گنگ هستند.

مثال: با توجه به جدول ارزش گزاره های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

مثال: ثابت کنید اگر $a \in Z$ و $a^۲$ عددی فرد باشد ، آن گاه a عددی فرد است.

حل: به جای اثبات این حکم ، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده تر است).

$$\left(\text{عددی فرد است } a^۲ \Rightarrow \text{عددی فرد است } a\right) \equiv (\text{عددی زوج است } a \Rightarrow \text{عددی زوج است } a^۲)$$

اگر a عددی زوج باشد ، یعنی $a = ۲k$ خواهیم داشت :

$$a^۲ = (۲k)^۲ = ۴k^۲ = ۲\underbrace{(۲k^۲)}_{k' \in z'} = ۲k'$$

در نتیجه $a^۲$ عددی زوج است.

مثال: ثابت کنید هر گاه n عددی صحیح و $n^{۲}$ مضرب ۳ باشد ، آن گاه n نیز مضرب ۳ است .

حل: به جای اثبات این حکم عکس نقیض آن را ثابت می کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده تر است).

($n^{۲}$ مضرب ۳ نیست) $\Longrightarrow$ (n مضرب ۳ نیست) $\equiv$ (n مضرب ۳ است $\Longrightarrow$ $n^{۲}$ مضرب ۳ است)

اگر n مضرب ۳ نباشد یعنی $n \neq ۳k$ خواهیم داشت

$$n^{۲} \neq (۳k)^{۲} \Longrightarrow n^{۲} \neq ۹k^{۲} = ۳(۳k^{۲}) = ۳k'$$

در نتیجه $n^{۲}$ مضرب ۳ نیست

مثال: ثابت کنید هر گاه n عدد صحیح و $n^{۲}$ مضرب ۵ باشد ، آن گاه n نیز مضرب ۵ است.

به جای اثبات حکم ، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم .

(n مضرب ۵ نیست).$\equiv$(n مضرب ۵ است .) $\Longrightarrow$($n^{۲}$ مضرب ۵ است.) $\Longrightarrow$($n^{۲}$ مضرب ۵ نیست .)

در این قسمت دو روش برای اثبات داریم:

روش اول : اگر n مضرب ۵ نباشد ، یعنی $n \neq ۵k$ و خواهیم داشت :

$$n^{۲} \neq (۵k)^{۲} = ۲۵k^{۲} = ۵\underbrace{(۵k^{۲})}_{k' \in Z} = ۵k'$$

در نتیجه $n^{۲}$ مضرب ۵ نیست .

روش دوم : اگر n مضرب ۵ نباشد ، پس به صورت زیر است:

$$n = ۵k + r(۱ \leq r \leq ۴)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم.}} n^۲ = (۵k + r)^۲ = ۲۵k^۲ + ۱۰kr + r^۲ = ۵\underbrace{(۵k^۲ + ۲kr)}_{k' \in z} + r^۲$$

$$= ۵k' + r^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = ۱ \Rightarrow n^۲ = ۵k' + ۱ \ (\text{. مضرب ۵ نیست} \ n^۲) \\ r = ۲ \Rightarrow n^۲ = ۵k' + ۴ \ (\text{. مضرب ۵ نیست} \ n^۲) \\ r = ۳ \Rightarrow n^۲ = ۵k' + ۹ \ \left(\text{. مضرب ۵ نیست} \ n^۲\right) \\ r = ٤ \Rightarrow n^۲ = ۵k' + ۱۶ \ (\text{. مضرب ۵ نیست} \ n^۲) \end{cases}$$

در نتیجه در هر ۴ حالت ، $n^۲$ مضرب ۵ نیست .

قانون ادخال فاصل : $(P \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

یعنی به هر گزاره می توانیم با ترکیب فصلی هر تعداد گزاره را اضافه (ترکیب) کنیم .

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$ یا $(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T$

یعنی از ترکیب عطفی دو یا چند گزاره می توانیم هر کدام را به دلخواه نتیجه بگیریم .

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \wedge q \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

نقیض گزاره شرطی:

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره ها نشان دهید:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	**ن**	ن	**ن**
د	ن	ن	**د**	د	**د**
ن	د	د	**ن**	ن	**ن**
ن	ن	د	**ن**	د	**ن**

مثال :نقیض گزاره ی « اگر a عددی منفی باشد، آن گاه مربع آن مثبت است. »را بنویسید .

می دانیم $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ بنابراین : a عددی منفی است و مربع a مثبت نیست.

مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید .

اگر a زوج باشد ، آن گاه $a+۱$ فرد است

نقیض: a زوج است و $a+۱$ فرد نیست

تست:نقیض گزاره « اگر شبها همه قدر بودی، شب قدر بی قدر بودی» کدام است؟

۱)اگر شبی قدر باشد ، آن شب بی قدر نیست.

۲)شبی هست که قدر است ولی بی قدر نیست

۳)شبی هست که قدر نیست و بی قدر هم نیست

۴)هر شب قدر است ولی بی قدر نیست

گزینه ۴ صحیح است

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (\mathrm{q} \Rightarrow p)$ را به صورت «$p \Leftrightarrow q$» می نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می نامیم . گزارهٔ «$p \Leftrightarrow q$» را به صورت زیر می خوانیم :

« اگر p ، آن گاه q و بر عکس » ، « p شرط لازم و کافی برای q است» و « p اگر و تنها اگر q »

مثال: گزاره های زیر ، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره هاست .

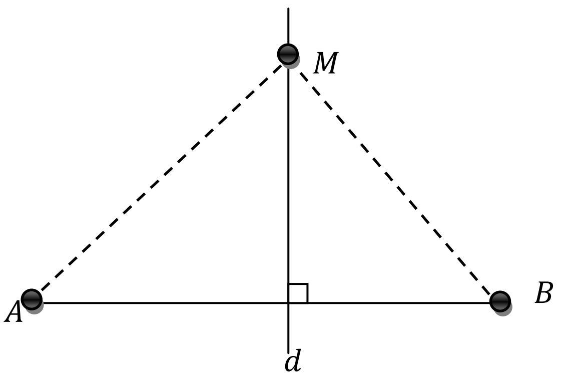
الف) ۶ عدد اول نیست $\Leftrightarrow$ ۵ < ۲

ب) ۹۹ عدد اول نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{۲}$ عددی گویاست .

پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر صفر باشد ، آن است که پیشامد تهی باشد .

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه ای واقع بر عمود منصف یک پاره خط باشد، آن است که فاصلهٔ آن نقطه تا دو سر پاره خط برابر باشد.

$$\left[M \in d(AB \text{ عمود منصف پاره خط })\right] \Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$$



فعالیت: با استفاده از جدول ارزش گزاره ها ، ارزش گزارهٔ مرکب «$p \Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow q)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	**د**
د	ن	ن	د	**ن**
ن	د	د	ن	**ن**
ن	ن	د	د	**د**

با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$، جدول ارزش گزارهٔ $q \Leftrightarrow p$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	**د**
د	ن	**ن**
ن	د	**ن**
ن	ن	**د**

نکته: ارزش گزارهٔ $q \Leftrightarrow p$ وقتی نادرست است که یکی درست و دیگری نادرست باشد.

مثال: ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید .

الف) ۲ عدد اول نیست ، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است . درست

ب) $\underbrace{-۳ < -۲}_{ن} \Leftrightarrow \underbrace{۳ > ۲}_{ن}$ درست

پ) اگر $\{b\} \in a$ آن گاه $a = b$ و بر عکس . نادرست

مثال : جدول ارزش $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow q$ را تشکیل دهید .

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	**د**
د	ن	ن	د	ن	**د**
ن	د	د	د	د	**د**
ن	ن	د	ن	ن	**د**

بنابراین گزاره همیشه درست است.

مثال :به کمک جدول ارزش گزاره ها ثابت کنید :

$p \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

p	q	r	$q \Leftrightarrow r$	$p \vee (q \Leftrightarrow r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$
د	د	د	د	**د**	د	د	**د**
د	د	ن	ن	**د**	د	د	**د**
د	ن	د	ن	**د**	د	د	**د**
د	ن	ن	د	**د**	د	د	**د**
ن	د	د	د	**د**	د	د	**د**
ن	د	ن	ن	**ن**	د	ن	**ن**
ن	ن	د	ن	**ن**	ن	د	**ن**
ن	ن	ن	د	**د**	ن	ن	**د**

هم ارزی برقرار است .

مثال : جدول های ارزش گزاره ی زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره ها همواره درست هستند .

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	**د**
د	ن	ن	د	ن	**د**
ن	د	د	د	د	**د**
ن	ن	د	ن	د	**د**

نقیض گزاره دوشرطی

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره ها نشان دهید:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	**ن**	ن	**ن**
د	ن	ن	**د**	ن	**د**
ن	د	ن	**د**	د	**د**
ن	ن	د	**ن**	د	**ن**

مثال : نقیض گزاره « شرط لازم و کافی برای آنکه عددی فرد باشد آن است که مجذور آن عدد فرد باشد »را بنویسید .

جواب:شرط لازم و کافی برای آنکه عددی فرد نباشد آن است که مجذور آن عدد فرد باشد .

یا : شرط لازم و کافی برای آنکه عددی فرد باشد آن است که مجذور آن عدد فرد نباشد.

مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید.

یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند .

نقیض گزاره برابر است با « یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع نیست اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.»

یا « یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر نباشند.»

مثال: ارزش گزاره های شرطی و دو شرطی زیر را مشخص کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف)اگر a عددی فرد باشد، آن گاه $a^۲$ فرد است.

ب) π عددی گویا است اگر و تنها اگر $\pi = ۳ / ۱۴$ باشد .

پ) اگر دو مثلث دارای مساحت های برابر باشند ، آن گاه دو مثلث همنهشت هستند .

ت) اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن گاه دو مثلث دارای مساحت های برابر می باشند .

ث) اگر یک چهار ضلعی مربع باشد ، آن گاه قطرهای آن با هم برابر ند.

ج) $(۲^۲ = ۴) \Leftrightarrow (۲^۰ = ۲)$

چ) اگر a بر b بخش پذیر باشد ، آن گاه a^n بر b^n بخش پذیر است.

حل الف) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است ، پس ارزش گزارهٔ شرطی نیز درست است.

نقیض گزارهٔ « a عددی فرد است و $a^۲$ عددی فرد نیست .»

ب) در این گزارهٔ دو شرطی ارزش گزارهٔ « π عددی گویا است .» و گزارهٔ « $\pi = ۳ / ۱۴$» نادرست است ،

پس ارزش گزارهٔ دو شرطی درست است .

نقیض گزارهٔ « π عددی گویا نیست، اگر و تنها اگر $\pi = ۳ / ۱۴$ باشد .»

یا « π عددی گویا است ، اگر و تنها اگر $\pi \neq ۳ / ۱۴$ باشد.»

پ) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست است . بنابراین ارزش گزارهٔ شرطی

نادرست است.

نقیض گزارهٔ « دو مثلث دارای مساحت های برابر می باشند و دو مثلث همنهشت نیستند .»

ت) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است ، پس ارزش گزارهٔ شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره « دو مثلث همنهشت هستند و دو مثلث دارای مساحت برابر نیستند .»

ث)در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است ، پس ارزش گزارهٔ شرطی درست است .

نقیض گزاره« یک چهار ضلعی مربع است و قطر های آن با هم برابر نیستند.»

ج) در این گزارهٔ دو شرطی ارزش گزارهٔ « $۲^۲ = ۴$» درست و ارزش گزارهٔ « $۲^{\circ} = ۲$» نادرست است ، پس

ارزش گزارهٔ دو شرطی نادرست است.

نقیض گزاره : $(۴ \neq ۲^۲) \Leftrightarrow (۲ = ۲^{\circ})$ یا $(۴ = ۲^۲) \Leftrightarrow (۲ \neq ۲^{\circ})$

چ) در این گزارهٔ شرطی به دلیل آن که مقدم و تالی درست است، ارزش گزارهٔ شرطی درست است.

نقیض گزاره« a بر b بخش پذیر است و a^n بر b^{n} بخش پذیر نیست.»»

سورها

به جملات زیر دقت کنید:

« همهٔدانش آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده اند » . « هر گردویی گر است» . « هر مستطیلی یک مربع است ». « هر مثلث متساوی الاضلاعی یک مثلث متساوی الساقین است ». « بعضی از تیم های دستهٔ یک به دستهٔ برتر صعود می کنند ». « بعضی از اعداد اول ، زوج اند ». « بعضی از ذوزنقه ها ، مستطیل اند».

عبارت های « به ازای هر » و « به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف اند. این عبارت ها می توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند .

برای بیان عبارت ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای « به ازای هر » یا « به ازای جمیع مقادیر » از نماد $\forall$ (از حرف اول کلمه All گرفته شده است .)

و به جای « وجود دارد» یا « به ازای بعضی مقادیر » از نماد $\exists$ (از حرف اول کلمه *Exist* گرفته شده است.) استفاده می کنیم . نماد $\forall$ **سور عمومی** و **نماد $\exists$ سور وجودی** نامیده می شود .

مثال : جدول زیر را کامل کنید .

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^۲ \geq ۰$	$\forall x \in R; x^۲ \geq ۰$
برای هر عدد زوج a داریم $a = ۲k$	$\forall a \in E; a = ۲k (k \in Z)$
بعضی از اعداد زوج اول هستند $p = ۲k$	$\exists p \in p; p = ۲k \ (k \in Z)$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists m \in P; m = ۲k + ۱ \ (k \in Z)$

در جدول فوق، مجموعهٔ اعداد زوج را با E ، مجموعهٔ اعداد فرد را با O و مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش داده ایم .

گزاره های با سور عمومی

گزاره هایی مانند « هر عدد طبیعی ، یک عدد مثبت است .» و « هر مستطیلی یک متوازی الاضلاع است .» که خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت می دهند ، سور عمومی هستند.

اگر $p(x)$ را گزاره نمایی فرض کنیم که خاصیتی را برای متغیر x بیان می کند در این صورت گزارهٔ « هر x ای خاصیت p را دارا می باشد .» را به صورت مقابل نشان می دهیم : $\forall x: p(x)$

نکته: گزاره نمای شامل متغیر x که با **سور عمومی** همراه می شود ، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند؛ به عبارت دیگر **هیچ مثال نقضی نداشته باشد** .

مثال: ارزش گزارهٔ $\forall x \in R; x^۲ \geq x$

نادرست است ؛ زیرا $x = \frac{۱}{۲}$ برای آن مثال نقض محسوب می شود .

مثال : گزاره های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن ها را تعیین کنید .

الف)مربع هر عدد حقیقی ، نامنفی است.

ب)نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچک تر است.

پاسخ:الف) این گزاره درست است . $\forall x \in R: x^۲ \geq ۰$

زیرا گزاره نمایی شامل متغیر x که با سور عمومی بیان می شود ، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می شود که هر عضو از دامنهٔ متغیر در گزاره نما صدق کند و هیچ مثال نقضی نداشته باشد و این عبارت این شرایط را دارد و درست می باشد .

ب) $\forall x \in Z: \frac{x}{۲} < x$

این گزاره نادرست است ، زیرا $x=-۱$ یک مثال نقض برای این گزاره محسوب می شود . $\left(-\frac{۱}{۲} \nless -۱\right)$

مثال: کدام یک از عبارت های زیر درست اند ؟

الف) $\forall x \in Z; x(x+۱) = ۲k$ ب) $\forall x \in R; tanx \times cotx = ۱$

حل: الف) چون حاصل ضرب هر دو دو عدد متوالی صحیح ، عدد زوج است . بنابراین برای هر عضو از دامنهٔ متغیر (Z) گزاره نما به گزاره ای درست تبدیل می شود ، پس این عبارت درست است.

ب) نادرست است ؛ زیرا $x = \frac{\pi}{۲}$ گزاره نما را به گزاره ای نادرست تبدیل می کند .

گزاره های با سور وجودی

گزاره ای با سور وجودی, گزاره ای است که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت دهد .

گزارهٔ « $\exists x: P(x)$» به این معنی است که حداقل یک x وجود دارد که خاصیت p را دارا می لاشد . به عنوان مثال:

« بعضی از اعداد اول، زوج هستند .» و « بعضی از اعداد با توان زوج، فرد هستند .» گزاره هایی با سور وجودی می باشند .

نکته : گزاره نمای شامل متغیر x که با **سور وجودی** همراه می شود ، وقتی درست است که **مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد.**

مثال: گزارهٔ $\exists x \in Z; |x| - ۱ < ۰$

درست است ؛ زیرا حداقل یک عضو $x = ۰$ وجود دارد که به ازای آن ، گزاره نما به گزاره ای با ارزش درست تبدیل می شود .

مثال: کدام یک از عبارت های زیر درست اند:

الف) $\exists x \in P; x = ۲k$ ب) $\exists x \in R; x^۲ + ۱ = ۰$

حل: الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره نما $\{۲\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعهٔ جواب گزاره نما مجموعهٔ تهی است.

مثال: گزاره های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن ها را تعیین کنید .

الف)معکوس بعضی از اعداد صحیح، یک عدد صحیح است .

ب) جذر بعضی از اعداد طبیعی از خود عدد طبیعی بزرگ تر است.

پاسخ : الف) این گزاره درست است ، زیرا به ازای $x=۱$ گزاره درست است ، پس حداقل یک عضو وجود دارد که به ازای آن ، این گزاره نما به گزاره ای با ارزش درست تبدیل می شود .

$$\exists x \in Z: \frac{۱}{x} \in Z$$

ب) این گزاره نادرست است ، زیرا هیچ عضوی از اعداد طبیعی وجود ندارد که به ازای آن ، این گزاره نما به یک گزارهٔ درست تبدیل شود.

$\exists x \in N: \sqrt{x} > x$

تمرین: گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists, \forall$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید .

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم : $a^۲ < ۰$.

پ) همهٔ اعداد اول فرداند .

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $۱ - ۲x > ۵$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش ، بزرگ تر یا مساوی ۲ است .

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳ = x$.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد فرد ، اول است. نادرست ۲ عدد زوج است و اول است.

ب) $\exists x \in N; ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ نادرست $\{\ \}$

پ) $\exists x \in Z; ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ درست $x=-۱$

ت) هر عدد زوج، غیر اول است. نادرست عدد ۲ زوج اول است.

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است . درست

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. درست

چ) در فضای نمونهٔ S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $p(A) > ۱$. نادرست

ح) طول هر پاره خط، عدد حقیقی است . درست

مثال: با ذکر دلیل ، درستی یا نادرستی گزاره های سوری زیر را مشخص کنید .

الف) در آمار ، هر متغیر گسسته یک متغیر کمی است.

ب) در آمار ، هر متغیر کمی یک متغیر گسسته است.

پ) در آمار ، بعضی از متغیرهای گسسته یک متغیر کیفی هستند .

ت) در آمار، بعضی از متغیرهای کمی یک متغیر گسسته هستند .

حل الف) درست است ، زیرا تمام متغیرهای گسسته به صورت کمی گسسته می باشند .

ب) نادرست است ، زیرا متغیرهای کمی به دو شاخهٔ پیوسته و گسسته تقسیم می شوند . پس متغیر می تواند کمی پیوسته باشد ، مانند زمان مطالعه .

پ) نادرست است ، زیرا هیچ متغیر گسسته ای یک متغیر کیفی نیست ، پس مجموعه جواب تهی است.

ت) درست است ، زیرا حداقل یک متغیر کمی گسسته مانند تعداد دانش آموزان یک کلاس داریم: پس حداقل یک متغیر کمی گسسته وجود دارد و این گزاره درست می باشد .

مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید .

الف) $\forall x \in N: x(x+۱) = ۲k, (k \in N)$ ب) $\forall x \in R: \sin x + cos x = ۱$

پ) $\exists x \in Z: x^۲ + ۳x = ۰$ ت) $\exists x \in R: x^۲ + ۴ = ۰$

ث) $\forall x \in P: x = ۲k + ۱, (k \in N)$ ج) $\exists x \in Z: x^۵ + ۱ = ۰$

حل الف) چون حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی زوج است ، بنابراین برای هر عضو از دامنهٔ متغیر (N) ، گزاره نما به گزاره ای درست تبدیل می شود، پس این عبارت درست است .

ب)نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر $x = \frac{\pi}{٤}$ باشد ، گزاره نما به گزاره ای نادرست تبدیل می شود .

$$\sin\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۴} \neq ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \neq ۱ \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} \neq ۱ \Rightarrow \sqrt{۲} \neq ۱$$

پ) درست است ، زیرا دو عدد صحیح $\{۰, -۳\}$ وجود دارند که در معادله صدق می کنند ، پس مجموعه جواب گزاره نما ناتهی است.

$$x^۲ + ۳x = ۰ \Rightarrow x(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۳ \end{cases}$$

ت) نادرست است ، زیرا مجموعه جواب گزاره نما مجموعهٔ تهی است .

$x^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۴$. معادله جواب حقیقی ندارد

ث) نادرست است ، زیرا x=۲ عددی اول است ولی $۲ \neq ۲k + ۱$

ج) درست است .

$$x^۵ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۵ = -۱ \Rightarrow x = -۱$$

زیرا یک عدد صحیح وجود دارد که در معادله صدق می کند .

مثال: هرگاه $A = \{x \in Z| \; -۲ \leq x < ۲\}$ دامنهٔ متغیر باشد ، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید .

الف) مربع هر عدد حقیقی ، مثبت است. ب) مجذور هر عدد حقیقی منفی ، منفی است .

پ) هر عدد صحیحی ، گویا است. ت) مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

ث) وجود دارد عدد طبیعی مانند a به طوری که $-۲a + ۱ > ۰$

حل الف) ارزش این گزارهٔ سوری درست است ، زیرا به ازای هر $x \in A$ گزاره نما درست می باشد .

$$A = \{-۲, -۱, ۰, ۱\} \Rightarrow \begin{cases} -۲ + ۳ \leq ۴ \Rightarrow ۱ \leq ۴ \\ -۱ + ۳ \leq ۴ \Rightarrow ۲ \leq ۴ \\ ۰ + ۳ \leq ۴ \Rightarrow ۳ \leq ۴ \\ ۱ + ۳ \leq ٤ \Rightarrow ۴ \leq ۴ \end{cases}$$

ب) ارزش این گزارهٔ سوری نادرست است ، زیرا x=-۲ از دامنهٔ متغیر وجود دارد که به ازای آن ارزش گزاره نما نادرست است .

$$x = -۲ \Rightarrow ۲(-۲) + ۱ \ngtr -۳ \Rightarrow -۳ \ngtr -۳$$

پ)ارزش این گزارهٔ سوری درست است ، زیرا عضوی از دامنهٔ متغیر وجود دارد که به ازای آن ارزش گزاره نما درست است .

$$x = ۱ \Rightarrow \sqrt{۱^۲ + ۳} = \sqrt{۴} = ۲$$

ت) ارزش این گزارهٔ سوری نادرست است، زیرا هیچ عضوی از دامنهٔ متغیر وجود ندارد که ارزش گزاره نما به ازای آن درست شود .

$$A=\{-۲,-۱,۰,۱\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-۲-۱}{۲}=-\dfrac{۳}{۲} \ngeq ۱ \\ \dfrac{-۱-۱}{۲}=-\dfrac{۲}{۲} \ngeq ۱ \\ \dfrac{۰-۱}{۲}=-\dfrac{۱}{۲} \ngeq ۱ \\ \dfrac{۱-۱}{۲}=۰ \ngeq ۱ \end{cases}$$

مثال: هرگاه $A=\{x \in Z| \ ۰<x \leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد ، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید .

الف) $\exists x \in A; x+۴=۱۰$ نادرست

ب) $\forall x \in A; x+۲ \leq ۹$ درست

پ) $\exists x \in A; x+۳ \leq ۴$ درست

ت) $\forall x \in A; x+۱ \geq ۶$ نادرست

نقیض گزاره های با سور عمومی

گزارهٔ $\forall x: p(x)$ وقتی درست است که تمام اعضا ی دامنه، خاصیت *p(x)* را داشته باشند . بنابراین می توان گفت این گزاره وقتی نادرست است که حداقل یک عضو پیدا شود که خاصیت *p(x)* را نداشته باشد .

$$\sim(\forall x: P(x)) \equiv \exists x: \sim p(x)$$

مثال: ارزش و نقیض گزارهٔ مقابل را به دست آورید .

$$\forall x \in N: x+۳ \geq ۴$$

پاسخ: ارزش این گزاره درست است ، زیرا به ازای تمام اعداد طبیعی نامساوی برقرار است .

$$\sim(\forall x \in N: x+۳ \geq ۴) \equiv (\exists x \in N: \sim(x+۳ \geq ۴)) \equiv (\exists x \in N: x+۳<۴)$$

نقیض گزاره ها با سور وجودی

گزارهٔ $\exists x: P(x)$ وقتی درست است که مجموعه جوابش ناتهی باشد پس این گزاره وقتی نادرست است که مجموعه جوابش تهی باشد ، یعنی هیچ عضوی از دامنه در رابطهٔ *p(x)* صدق نکند .

$$\sim(\exists x: p(x)) \equiv \forall x: \sim p(x)$$

مثال:نقیض گزارهٔ « بعضی از اعداد اول زوج هستند .» را بیان کنید .

پاسخ: نقیض این گزاره به صورت « هر عدد اولی فرد است .» یا « تمام اعداد اول فردند .» می باشد .

مثال: ارزش و نقیض گزارهٔ مقابل را به دست آورید .

$$\exists x \in R: x^۲ + x^۴ = ۰$$

پاسخ: ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای *x=۰* معادله برقرار است ، پس مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲ + x^۴ = ۰$ ناتهی است.

$$\sim(\exists x \in R: x^۲ + x^۴ = ۰) \equiv \forall x \in R: x^۲ + x^۴ \neq ۰$$

مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید .

الف) $\forall x \in R; x^۲ > ۰$ ب) $\exists y \in R; y < ۰ \wedge y^۲ \leq ۱$

حل: الف) ارزش این گزاره نادرست است؛ چون *x=۰* مثالی نقیض برای آن است.

$$\sim(\forall x \in R; x^۲ > ۰) \equiv \exists x \in R; x^۲ \ngtr ۰ \equiv \exists x \in R; x^۲ \leq ۰$$

ب) درست است ؛ زیرا $y = -۱$ در آن صدق می کند ، پس مجموعهٔ جواب آن ناتهی است.

$$\sim(\exists y \in R; y < ۰ \wedge y^۲ \leq ۱) \equiv \forall y \in R; \sim(y < ۰ \wedge y^۲ \leq ۱)$$

$\equiv \forall y \in R; y \geq ۰ \vee y^۲ > ۱$

مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید و نفیض هر یک را بنویسید .

آ) $\forall x \in N: \frac{x+۱}{x} \geq ۲$ ب) $\forall x \in R: x^۲ - ۱ = (x-۱)(x+۱)$

پ) $\forall x \in Z: \frac{۴-x^۲}{۲+x} = ۲ - x$ ت) $\exists x \in R: \sqrt{-x} \in Z$

ث) $\exists n \in N: ۲^n > ۱۰۰۰$

حل الف) نادرست است ، زیرا $x=۲$ یک مثال نقض برای آن است . $\left(\frac{۳}{۲} \ngeq ۲\right)$

$$\sim\left(\forall x \in N: \frac{x+۱}{x} \geq ۲\right) \equiv \exists x \in N: \frac{x+۱}{x} \ngeq ۲ \equiv \exists x \in N: \frac{x+۱}{x} < ۲$$

ب) درست است ، زیرا اتحاد مزدوج می باشد و به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

$$\sim\left(\forall x \in R: x^۲ - ۱ = (x-۱)(x+۱)\right) \equiv \exists x \in R: x^۲ - ۱ \neq (x-۱)(x+۱)$$

پ)نادرست است ، زیرا به ازای $x=-۲$ مخرج کسر صفر شده و عبارت تعریف نشده است .

$$\sim\left(\forall x \in Z: \frac{۴-x^۲}{۲+x} = ۲ - x\right) \equiv \exists x \in Z: \frac{۴-x^۲}{۲+x} \neq ۲ - x$$

ت) درست است ، زیرا به ازای $x=۰$ زیر رادیکال برابر صفر شده و متعلق به اعداد صحیح است، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim\left(\exists x \in R: \sqrt{-x} \in Z\right) \equiv \forall x \in R: \sqrt{-x} \notin Z$$

ث) درست است، زیرا به ازای $n \geq ۱۰$ نامساوی برقرار می شود .

$n = ۱۰ \Longrightarrow (۲^{۱۰} = ۱۰۲۴ > ۱۰۰۰)$

$\sim(\exists n \in N: ۲^n > ۱۰۰۰) \equiv \forall n \in N: ۲^n \ngtr ۱۰۰۰ \equiv \forall n \in N: ۲^n \leq ۱۰۰۰$

مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in R; \frac{x^۲-۱}{x-۱} = x + ۱$ نادرست $x=۱$ ب) $\forall n \in N; (۲^{۲^n} + ۱) \in p$

پ) $\forall x \in (-\infty, ۰); x - \frac{۱}{x} \leq -۲$ نادرست $x=-۱$ ت) $\exists y \in R; \frac{y-۳}{۵} = ۰$ درست $y=۳$

مثال : نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید:

الف) $\exists y \in R: y < ۰ \wedge y^۲ \leq ۱$

یادآوری: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\forall y \in R: y \geq ۰ \vee y^۲ > ۱$

ب) $\forall x \in N: (x = ۲k) \Longrightarrow (x \in P)$

یادآوری: $\sim(p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ $\exists x \in N: (x = ۲k) \wedge (x \notin P)$

پ) $\forall x \in N, \exists y \in N: x > y$

$\exists x \in N, \forall y \in N: x \leq y$

ت) $\forall x \in R, \forall y \in N: x > \sqrt{y}$

$\exists x \in R, \exists y \in N: x \leq \sqrt{y}$

ث) $\forall x \in R: ۱ < x < ۲$

$\exists x \in R: \sim(x > ۱ \wedge x < ۲) \equiv \exists x \in R: (x \leq ۱ \vee x \geq ۲)$

ح) $\exists x \in R: (x^{۲} = ۲) \Leftrightarrow (x > \sqrt{x})$

یادآوری: $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$:

$\forall x \in R: (x^{۲} \neq ۲) \Leftrightarrow (x > \sqrt{x})$

خ) $(\exists x \in R: x > ۱) \vee (\forall x \in R: x^{۲} > ۰)$

$(\forall x \in R: x \leq ۱) \wedge (\exists x \in R: x^{۲} \leq ۰)$

خواندنی: سور به معنای باور یا حصار یا دیوار گرداگرد شهر است و سور ها قلمرو اعضای مورد بحث را مشخص می کنند . کلمهٔ سوره در قران کریم هم به همین معنا استفاده شده است . « سوره» از سور گرفته شده است و به مجموعه آیاتی گفته می شود که ابتدا و انتهای آن مشخص باشد .