حسابان (۱)

مؤلف:

شاپور مددپور

پایه‌ی یازدهم

کم‌رنگ‌ترین قلمها از قوی‌ترین حافظه‌ها پایدارترند • خردادماه ۱۳۹۶

madad_sh@yahoo.com

فهرست مطالب

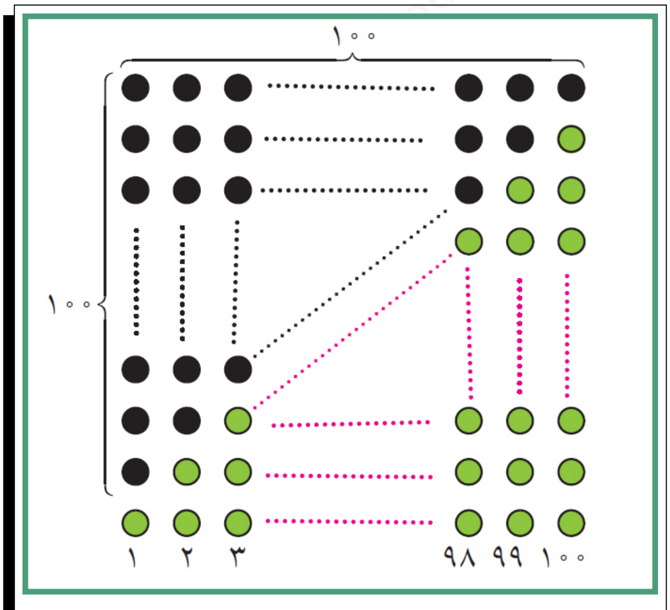
فصل ۱

جبر و معادله

۱.۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱.۱.۱ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی یا عددی

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آن ها می‌خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند.



شکل ۱.۱: مجموع اعداد طبیعی از یک تا صد

در حالی که دانش‌آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به‌دست می‌آورد و به معلم ارائه می‌کند. آیا شما هم می‌توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل صفحه‌ی قبل می‌تواند ایده‌ای برای این کار به شما بدهد.

فعالیت ۱.۱.۱. از شکل (۱.۱) چگونه می‌توان استفاده کرد و جمع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورد؟

حل: با توجه به چیدمان بالا دو بار مجموع اعداد طبیعی یک تا صد را نوشته‌ایم. اگر مجموع اعداد یک تا صد را S فرض کنیم داریم:

$$۲S = ۱۰۰ \times ۱۰۱ \hookrightarrow S = ۵۰۵۰$$

■

از الگوی فعالیت فوق می‌توان برای محاسبه‌ی مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n به صورت زیر استفاده کرد.

می‌دانیم جملات دنباله عددي به صورت $a = t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{n-1}, t_n = L$ بودند. برای پیدا کردن مجموع جملات آن به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم جمله‌ی آخر آن $L = t_n$ باشد پس داریم:

$$\begin{cases} S_n = (a) + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + (L-d) + (L) \\ S_n = (L) + (L-d) + (L-2d) + (L-3d) + \cdots + (a+d) + (a) \end{cases}$$

$$2S_n = \overbrace{(a+L) + (a+L) + (a+L) + \cdots + (a+L)}^{n \text{ مرتبه}}$$

$$2S_n = n(a+L) \to \quad S_n = \frac{n}{2}(a+L) \quad but \quad L = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

دستور ۱

$$S_n = \frac{n}{2}(a+L)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

مثال ۱.۱.۱

مجموع ۱۱ جمله از دنباله‌ی عددی $-5, -1, 3, \dots$ را بیابید.

حل:

$$-5, -1, 3, \dots$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \hookrightarrow S_{11} = \frac{11}{2}(2(-5) + (11-1)4) = 165$$

■

مثال ۱.۲.۱

مجموع چندجمله از دنباله‌ی عددی $-5, -1, 3, \dots$ مساوی ۱۶۵ می‌شود؟

حل:

$$-5, -1, 3, \dots$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \hookrightarrow 165 = \frac{n}{2}(2(-5) + (n-1)4)$$

$$\hookrightarrow 165 = \frac{n}{2}(4n - 14) \hookrightarrow 2n^2 - 7n - 165 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بعد از حل معادله داریم}} \boxed{n = 11}\ , n = -7/5 \text{ غ.ق.ق}$$

■

تمرین ۱.۱.۱. نشان دهید $1 + 2 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1) \times 2] = \frac{n}{2}[2n] = n^2$$

■

مثال ۱.۳.۱

دنباله‌ی اعداد طبیعی را به‌گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که هر گروه به عدد مجذور کامل به صورت زیر ختم شود.

$$(۱), (۲, ۳, ۴), (۵, ۶, ۷, ۸, ۹), (۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶), \cdots$$

مجموع ارقام جملات گروه mاُم را به‌دست آورید.

حل: ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که هر دسته با چه عددی شروع می‌شود. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دسته‌ی اول با $۱ + ۰^۲$ و دسته‌ی دوم با $۱ + ۱^۲$ و به همین ترتیب دسته‌ی mاُم با $۱ + (m-۱)^۲$ شروع و به $m^۲$ ختم می‌شود. حال تعداد جملات دسته‌ی mاُم را به دست می‌آوریم.

$$t_n = a + (n-۱)d \hookrightarrow m^۲ = (m-۱)^۲ + ۱ + (n-۱) \hookrightarrow \boxed{n = ۲m - ۱}$$

پس داریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a+L) = \frac{۲m-۱}{۲}\left((m-۱)^۲ + ۱ + m^۲\right) = (۲m-۱)(m^۲ - m + ۱)$$

■

تمرین ۲.۱.۱. اعداد فرد را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), (۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹), \cdots$$

در این دسته‌بندی تعداد جملات گروه nاُم برابر n است. مجموع اعداد گروه صدم را حساب کنید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

مثال ۱.۴.۱

در دنباله‌های عددی زیر چند جمله‌ی مشترک سه‌رقمی داریم؟

$$۴, ۷, ۱۰, \cdots \qquad ۱, ۵, ۹, \cdots$$

حل: ابتدا جملات دنباله‌ها را ادامه می‌دهیم تا اولین جمله‌ي مشترك به وجود آید: ■

$$۴, ۷, ۱۰, \boxed{۱۳}, \cdots \qquad ۱, ۵, ۹, \boxed{۱۳}, \cdots$$

قدر نسبت دو دنباله به ترتیب ۴, ۳ می‌باشد و ك.م.م آنها برابر ۱۲ است .پس فرم جملات مشترك دو دنباله به فرم $۱۲n + ۱۳$

$$۱۰۰ \le ۱۳ + ۱۲n \le ۹۹۹ \xrightarrow{-۱۳} ۸۷ \le ۱۲n \le ۹۸۷ \xrightarrow{\div ۱۲} ۷/۲۵ \le n \le ۸۲/۲۵$$

پس n می‌تواند یکی از اعضاء مجموعه‌ی زیر باشد. $\{8, 9, 10, \cdots, 82\}$ که در نتیجه ۷۵ جمله‌ی مشترک داریم.

تمرین ۳.۱.۱. مجموع صد جمله‌ی مشترک اولیه‌ی دنباله‌های زیر را به دست آورید.

$$16, \boxed{21}, 26, 31, \cdots \qquad\qquad 17, \boxed{21}, 25, 29, \cdots$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

۲.۱.۱ مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

جملات دنباله‌ی هندسی به صورت $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, t_n = aq^{n-1}, \ldots$ بودند. برای یافتن مجموع جملات آن به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم جمله آخر آن $L = t_n$ باشد پس داریم:

$$q \times \{S_n = (a) + (aq) + (aq^2) + (aq^3) + \cdots + aq^{n-1} \quad , \quad q \neq 1$$

$$qS_n = (aq) + (aq^2) + (aq^3) + \cdots + aq^n$$

$$qS_n - S_n = aq^n - a \to S_n(q-1) = a(q^n - 1) \to S_n = \frac{a(q^n-1)}{(q-1)}$$

$$S_n = \frac{(aq^n - a)}{(q-1)} = \frac{(aqq^{n-1} - a)}{(q-1)} = \frac{(Lq-a)}{(q-1)} \to S_n = \frac{(Lq-a)}{(q-1)}$$

دستور ۲

$$S_n = \frac{(Lq-a)}{(q-1)} \qquad\qquad S_n = \frac{a(q^n-1)}{(q-1)}$$

توجه

توجه کنید که در حالت $a = 1, \ q = 1$ مجموع n جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ی هندسی $S_n = na$ می‌باشد و نیازی به فرمول فوق نیست.

مثال ۱.۵.۱

دردنباله‌ی هندسی $-۳, ۶, -۱۲, \ldots$ مجموع ۵ جمله‌ی اولیه‌ی این دنباله را بیابید.

حل:

$$-۳, ۶, -۱۲, \ldots$$

$$S_n = \frac{a\left(q^n - ۱\right)}{(q-۱)} \to S_۵ = \frac{(-۳)\left((-۲)^۵ - ۱\right)}{(-۲-۱)} = (-۲)^۵ - ۱ = -۳۳$$

■

نکته‌ی ۱.۱.۱

اگر در دنباله‌ی هندسی $|q| < ۱$ آنگاه داریم:

$$\lim_{n \to \infty} \left(q^n\right) = ۰$$

و با جای‌گذاری در فرمول مجموع جملات دنباله‌ی هندسی داریم:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a\left(q^n - ۱\right)}{(q-۱)} = \frac{-a}{q-۱} = \frac{a}{۱-q}$$

که در واقع حد مجموع جملات در بی نهایت به دست می‌آید.

دستور ۳

فرمول حدمجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی	$S = \frac{a}{۱-q}$

مثال ۱.۶.۱

حد مجموع جملات دنباله‌ی هندسی $۱, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \ldots$ را بیابید.

حل: چون $|q| < ۱$, $q = \frac{۱}{۳}$ است پس داریم:

$$S = \frac{a}{۱-q} \hookrightarrow S = \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

و این بدان معنی است که:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n} = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \cdots + \frac{۱}{۳^n} + \cdots = \frac{۳}{۲}$$

■

مثال ۱.۷.۱

حد مجموع $A = ۱ + \sqrt{۲} + ۴ + ۲ + ۷ + ۲\sqrt{۲} + \cdots + ۱۹ + ۸\sqrt{۲}$ را بیابید.

حل: ابتدا به جملات یکی در میان توجه کنید:

$$A_1 = 1 + 4 + 7 + \cdots + 19$$
$$A_2 = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2}$$

که اولی دنباله‌ی عددی با قدر نسبت ۳ و ۷ جمله دارد و دومی دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\sqrt{2}$ و با ۷ جمله می‌باشد و داریم:

$$A_1 = 1 + 4 + 7 + \cdots + 19 \rightarrow S_7 = \frac{7}{2}\left[2(1) + (7-1)3\right] = 70$$
$$A_2 = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2} \rightarrow S_7 = \frac{\sqrt{2}\left(1-\left(\sqrt{2}\right)^7\right)}{1-\sqrt{2}} = 15\sqrt{2} + 14$$
$$A = A_1 + A_2 = 70 + 15\sqrt{2} + 14 = 84 + 15\sqrt{2}$$

■

فعالیت ۲.۱.۱. می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه‌ی اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه‌ی دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه‌ی سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟[1]

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تست ۱.۱.۱. موجی بر روي نیم دایره‌ي بالاي یک محور با قطر اولیه‌ي یک واحد ،حرکت می‌کند .هربار که به محور برخورد می‌کند ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود.اندازه‌ي محیط این نیم دایره‌هاي متوالی ،دنباله‌اي از اعداد حقیقی است.مجموع این دنباله‌ها کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

[1] این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.

تمرین‌هایی برای فصل ۱.۱

تمرین ۴.۱.۱. جمله‌ي اول و هشتم يك دنباله‌ی عددي به ترتيب ۲− و ۱۹ مي‌باشد نسبت مجموع ۵۰ جمله‌ي اوليه‌ي دنباله به مجموع ۵۰ جمله‌ي بعدي از دنباله كدام است؟

حل:

$$\left.\begin{matrix} t_۱ = a = -۲ \\ t_۸ = ۱۹ \end{matrix}\right\} t_n = a + (n-۱)\,d \to ۱۹ = (-۲) + (۸-۱)\,d \to d = ۳$$

$$\frac{S_{۵۰}}{S_{۱۰۰} - S_{۵۰}} = ?$$

$$s_{۵۰} = \tfrac{۵۰}{۲}\left[۲\,(-۲) + (۵۰-۱)\,۳\right] = ۲۵\,(۱۴۳) = ۳۵۷۵$$

$$S_{۱۰۰} = \tfrac{۱۰۰}{۲}\left[۲\,(-۲) + (۱۰۰-۱)\,۳\right] = ۵۰\,(۲۹۳) = ۱۴۶۵۰$$

$$\frac{S_{۵۰}}{S_{۱۰۰} - S_{۵۰}} = \frac{۳۵۷۵}{۱۱۰۷۵}$$

■

تمرین ۵.۱.۱. اگر مجموع n جمله‌ي نخست يك دنباله حسابي $s_n = \frac{n^۲}{۲} - ۳n$ باشد جمله‌ي سوم آن كدام است؟

دستور ۴

فرمول به‌دست آوردن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی عددی بر حسب مجموع جملات آن	$t_n = S_n - S_{n-۱}$

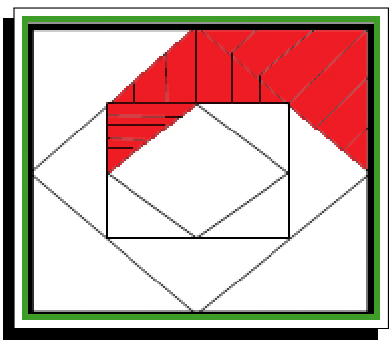
حل: می‌دانیم: $t_n = S_n - S_{n-۱}$ پس داریم:

$$t_n = S_n - S_{n-۱} = \left(\frac{n^۲}{۲} - ۳n\right) - \left(\frac{(n-۱)^۲}{۲} - ۳\,(n-۱)\right) = \frac{۲n-۷}{۲}$$

$$t_۳ = \frac{۶-۷}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

■

تمرین ۶.۱.۱. مربعی به ضلع ۴ سانتیمتردر اختیار داریم وسط اضلاع این مربع را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدید به دست آید یکی از بخشهای مثلث شکل کناری را رنگ می‌زنیم اگر این عمل را تا بینهایت ادامه دهیم در نهایت مجموع مساحتهای ناحیه‌ی رنگی را به دست آورید مساحت این ناحیه چه کسری ازمساحت مربع است؟ به نمودار توجه کنید.



حل: دنباله‌ی مساحتهای مثلث‌های به وجود آمده را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
&S = 4 \times 4 = 16 \\
&\frac{S}{8}, \frac{S}{16}, \cdots \to 2, 1, \frac{1}{2}, \cdots \Rightarrow a = 2 \quad q = \frac{1}{2} \quad |q| < 1 \\
&S = \frac{a}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4
\end{aligned}
$$

■

تمرین ۷.۱.۱. احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹۹ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوقِ او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

حل: الف) دنباله‌ی پولهای اضافه شده او در روزهای متوالی به صورت روبرو است.

$$
1000, 1000 \times \frac{99}{100}, \ldots
$$

$$
1000, 990, 980/1, \ldots
$$

این دنباله یک دنباله‌ی هندسی است با قدر نسبت $q = 0/99$ که جمله‌ی بیستم آن مورد نظر است.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} \\
S_{20} &= \frac{1000\left(1-(0/99)^{20}\right)}{1-0/99} = 18209/30624
\end{aligned}
$$

ب)

$$
q = \frac{99}{100}, \ |q| < 1 \hookrightarrow S = \frac{1000}{1-0/99} = 100000
$$

و این یعنی اینکه در بینهایت مجموع پول او به ۱۰۰۰۰۰ نزدیک می‌شود. ■

تمرین ۸.۱.۱. برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن ها نصف می‌شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

حل: راه اول: پس از گذر از هر لایه شدت تابش نصف می‌شود پس دنباله کاهش شدت به صورت زیر است:

$$
\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots
$$

اما اگر شدت ۹۹ درصد کاهش یابد به این معنی است که جمله‌ی nام آن از $\frac{1}{100}$ کمتر شود پس

$$
\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \hookrightarrow 2^n > 100 \hookrightarrow n > 6 \quad \min(n) = 7
$$

راه دوم: با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله‌ی هندسی داریم:

$$
\begin{aligned}
&S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \hookrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100} \\
&\hookrightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \hookrightarrow 2^n > 100 \to n > 6 \quad \min(n) = 7
\end{aligned}
$$

■

تمرین ۹.۱.۱. با استفاده از دستور محاسبه‌ی مجموع جملات دنباله‌ی هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

۱. $x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1\right)$

۲. $x^n + 1 = (x+1)\left(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots - x + 1\right)$، n فرد است

حل: اثبات ۱) برای اثبات این اتحاد دنباله‌ی

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, x^{n-1}$$

را در نظر می‌گیریم و مجموع جملات این دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت x را محاسبه می‌کنیم:

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, x^{n-1}$$

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$S_n = \frac{1\left(x^n - 1\right)}{x-1} \hookrightarrow S_n\left(x-1\right) = x^n - 1 \hookrightarrow$$

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1\right)$$

قسمت دوم مشابه قسمت قبل و به عهده‌ی شما که در آن دنباله‌ی

$$1, -x, x^2, \ldots, x^{n-3}, -x^{n-2}, x^{n-1}$$

را در نظر می‌گیریم و مجموع جملات این دنباله هندسی با جمله اول یک و قدر نسبت $-x$ را محاسبه کنید. ■

قسمت دوم. حل: به عهده‌ی شما

■

✓

تمرین ۱۰.۱.۱. با استفاده ازتمرین قبل در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

حل:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right) = a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right) =$$

$$a^n\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right) =$$

$$a^{n-1} \times a \times \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right) =$$

$$(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

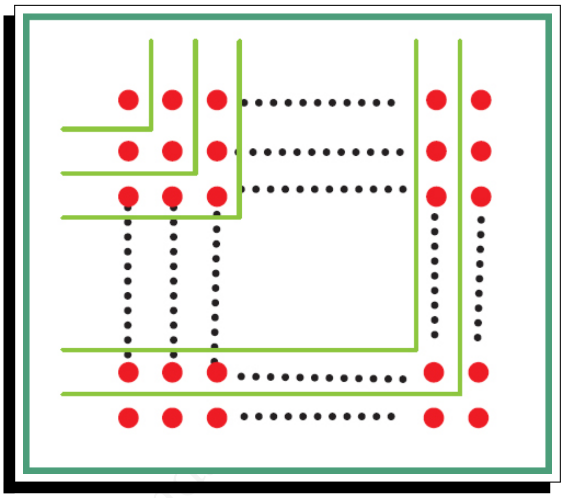
■

تمرین ۱۱.۱.۱. در دنباله‌ی حسابی $۵, ۸, ۱۱, \ldots$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۲.۱.۱. به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$



حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۳.۱.۱. در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

حل: می‌دانیم $۱۰^۶$ گرم معادل یک تن است. پس داریم:

$$S_{۶۴} = ۲^{۶۴} - ۱ > ۲^{۶۳} > (۲^۷)^۹ = (۱۲۸)^۹ > (۱۰^۲)^۹ = ۱۰^{۱۲} \times ۱۰^۶$$

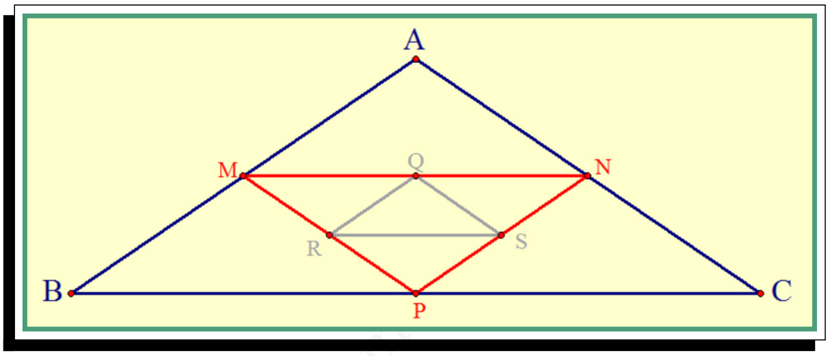
■

تمرین ۱۴.۱.۱. در ۲۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۱۵. یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۱۶. برای عددی حقیقی a و عدد طبیعی n فرض کنید؛

$$S = ۱ + a + a^۲ + a^۳ + \cdots + a^{n-۱}$$

آ. عبارت $aS - S$ را تشکیل دهید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید:

$$(a^n - ۱) = (a - ۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + a^{n-۳} + \cdots + a + ۱)$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. اگر n عددی فرد باشد با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$(a^n + ۱) = (a + ۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + a^{n-۳} - \cdots - a + ۱)$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۱۷. مجموع n جمله‌ی اولیه از دنباله‌ي زیر را تعیین کنید.

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱۱, \ldots, \underbrace{۱۱۱\ldots۱۱۱}_{n \text{ مرتبه}}$$

حل:

$$S_n = ۱ + ۱۱ + ۱۱۱ + ۱۱۱۱ + \cdots + \underbrace{۱۱۱\ldots۱۱۱}_{n \text{ مرتبه}}$$
$$۹S_n = ۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + ۹۹۹۹ + \cdots + \underbrace{۹۹۹\ldots۹۹۹}_{n \text{ مرتبه}}$$
$$۹S_n = (۱۰ - ۱) + (۱۰^۲ - ۱) + (۱۰^۳ - ۱) + (۱۰^۴ - ۱) + \cdots + (۱۰^n - ۱)$$
$$۹S_n = (۱۰ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + \cdots + ۱۰^n) - n(۱)$$
$$۹S_n = \frac{۱۰(۱۰^n - ۱)}{۱۰ - ۱} - n = \frac{۱۰(۱۰^n - ۱) - ۹n}{۹}$$
$$\xrightarrow{\text{بعد از ساده شدن داریم}} S_n = \frac{۱۰^{n+۱} - ۹n - ۱۰}{۸۱}$$

■

تمرین ۱۸.۱.۱. به کمک تمرین قبل مجموع n جمله‌ی اولیه از دنباله‌ي زیر را تعیین کنید.

$$۵, ۵۵, ۵۵۵, ۵۵۵۵, \dots, \underbrace{۵۵۵\dots۵۵۵}_{n \text{ مرتبه}}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۹.۱.۱. ضریب $x^۲$ را در عبارت زیر به‌دست آورید.

$$(۱+x)+(۱+x)^۲+(۱+x)^۳+\cdots+(۱+x)^{۲۰}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۰.۱.۱. در یک دنباله‌ي عددي اگر داشته باشیم $\frac{S_n}{S_m}=\frac{n^۲}{m^۲}$ ثابت کنید:

$$\frac{t_n}{t_m}=\frac{۲n-۱}{۲m-۱} \qquad (n\neq m)$$

حل:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d) \quad , \quad S_m=\frac{m}{۲}(۲a+(m-۱)d)$$

$$\frac{S_n}{S_m}=\frac{\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)}{\frac{m}{۲}(۲a+(m-۱)d)}=\frac{n^۲}{m^۲}\hookrightarrow(m-n)(۲a-d)=۰\xrightarrow{m\neq n}\boxed{a=\frac{d}{۲}}$$

$$\frac{t_n}{t_m}=\frac{a+(n-۱)d}{a+(n-۱)d}=\frac{\frac{d}{۲}+(n-۱)d}{\frac{d}{۲}+(m-۱)d}=\frac{۲n-۱}{۲m-۱} \qquad (n\neq m)$$

■

۲.۱ معادلات درجه‌ی دوم

در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادله‌های درجه‌ی اول و درجه دوم آشنا شدید. هر معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $a \neq 0$ $y = ax^2 + bx + c$ که جواب‌های آن در صورت وجود از رابطه‌ی $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند. در این بخش با برخی از انواع معادلات، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم و نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

تمرین ۱.۲.۱. معادله‌ی $3x^2 = 5x + 2$ را به دو روش دلتا و تجزیه حل کنید.

حل: به عهده‌ی شما

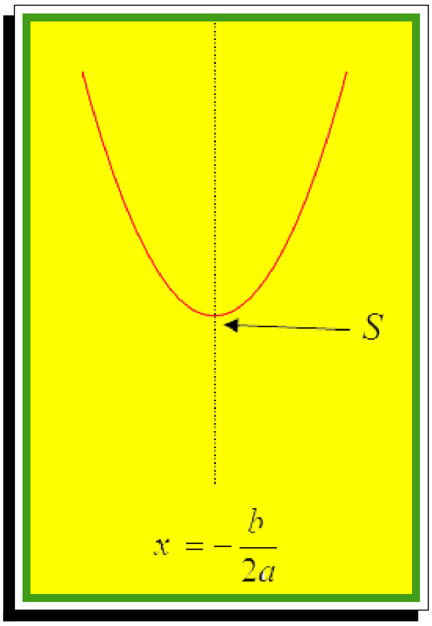
✓ ■

تمرین ۲.۲.۱. اگر $x = -1$ یک ریشه از معادله‌ی $4x^2 - ax - 7 = 0$ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

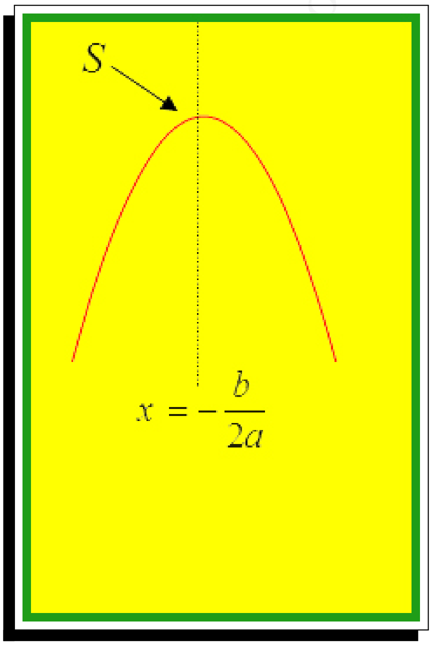
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

اگر $a > ۰$ باشد نمودار تابع $a \neq ۰$ $y = ax^۲ + bx + c$ به فرم زیر است.



که در این حالت $x = -\frac{b}{۲a}$ معادله‌ی محورتقارن سهمی و $\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ مختصات رأس و نیز نقطه‌ی مینیمم سهمی است.
اگر $a < ۰$ باشد نمودار تابع فوق به فرم زیر است.



که در این حالت $x = -\frac{b}{۲a}$ معادله‌ی محورتقارن سهمی و $\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ مختصات رأس و نیز نقطه‌ی ماکزیمم سهمی است.

نکته‌ی ۲.۱.۱

در تابع فوق اگر $x = ۰$ باشد تقاطع نمودار با محور yها و اگر $y = ۰$ باشد تقاطع نمودار با محور xها یا همان ریشه‌ها یا صفرهای تابع درجه‌ی دوم به دست می‌آید.

مثال ۲.۱.۱

معادله‌ی محور تقارن تابع

$$S=\left\{(x,y)\,\middle|\,x,y\in\mathbb{R},\text{۲}y-\text{۲}x^{\text{۲}}-\text{۲}x+\text{۴}=\text{۰}\right\}$$

را به دست آورید و تابع را رسم کنید.

حل: با مرتب کردن تابع داریم:

$$\text{۲}y-\text{۲}x^{\text{۲}}-\text{۲}x+\text{۴}=\text{۰}\hookrightarrow \text{۲}y=\text{۲}x^{\text{۲}}+\text{۲}x-\text{۴}\hookrightarrow y=x^{\text{۲}}+x-\text{۲}$$

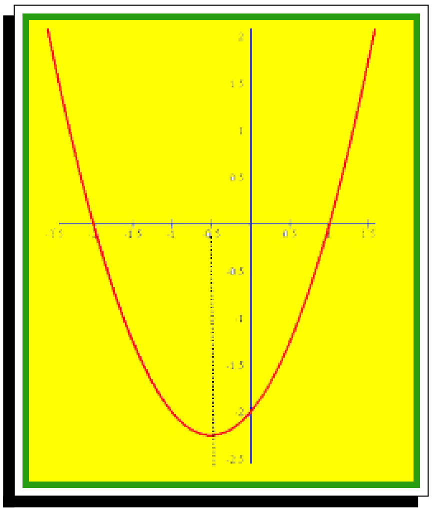
$$x=\text{۰}\hookrightarrow y=-\text{۲}\ \ ,y=\text{۰}\hookrightarrow (x=\text{۱},x=-\text{۲})$$

$$x=-\frac{b}{\text{۲}a}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}\,(\text{۱})}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\hookrightarrow y=\left(-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}}+\left(-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)-\text{۲}=\frac{-\text{۹}}{\text{۴}}=-\text{۲/۲۵}$$

$$S\left|\begin{array}{l}-\text{۰/۵}\\ -\text{۲/۲۵}\end{array}\right.$$

■

x	-1	$-0/5$	0
y	-2	$-2/25$	-2



مثال ۲.۲.۱

اگر $x=\text{۲}$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^{\text{۳}}-x^{\text{۲}}-\text{۴}x+\text{۴}$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل: از آن‌جا که $\boxed{x=۲}$ یکی از صفرهای تابع است چند جمله‌ای نظیر آن عاملی به صورت $x-۲$ دارد. با تقسیم $p(x)$ بر $x-۲$ داریم؛

$$\begin{array}{l} x^۳-x^۲-۴x+۴=\left(x-۲\right)\left(x^۲+x-۲\right) \\ \underline{-x^۳+۲x^۲} \\ \quad x^۲-۴x \\ \quad \underline{-x^۲+۲x} \\ \qquad -۲x+۴ \\ \qquad \underline{۲x-۴} \\ \qquad\quad ۰ \end{array}$$

پس داریم؛

$$x^۲+x-۲=(x+۲)(x-۱)=۰\hookrightarrow \boxed{x=۱},\boxed{x=-۲}$$

■

نکته‌ی ۲.۲.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $a\neq ۰$, $ax^۲+bx+c=۰$ اگر مجموع ضرایب صفر شود یعنی $a+b+c=۰$ یکی از ریشه‌ها یک و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

مثال ۲.۳.۱

ریشه‌های معادله‌ی $۹۹x^۲-۹۳x-۶=۰$ را بیابید.

حل:

$$a+b+c=۰\rightarrow x_۱=۱,x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۶}{۹۹}=-\frac{۲}{۳۳}$$

■

نکته‌ی ۲.۳.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $a\neq ۰$, $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $b=a+c$ یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

مثال ۲.۴.۱

ریشه‌های معادله‌ی $۹۹x^۲+۹۳x-۶=۰$ را بیابید.

حل:

$$b=a+c\rightarrow x_۱=-۱,x_۲=-\frac{c}{a}=\frac{۶}{۹۹}=\frac{۲}{۳۳}$$

■

نکته‌ی ۲.۴.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $a \neq 0$ ، $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع و ضرایب ریشه‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$S = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = \frac{c}{a}$$

اثبات:

$$ax^2 + bx + c = 0 \, , a \neq 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = x_1 + x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 . x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) . \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

■

دستور ۵

فرمول به‌دست آوردن جمع و ضرب ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی دوم

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
$P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

توجه

به جای ریشه‌های x_1, x_2 معمولاً α, β یا x', x'' نیز به کار می‌رود.

دستور ۶

در معادله‌ی درجه‌ی دوم اگر مجموع ریشه‌ها S و حاصلضرب ریشه‌ها P باشد؛ $(\Delta \geq 0)$

$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$
$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$
$(\alpha - \beta)^2 = S^2 - 4P$
$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

مثال ۲.۵.۱

اگر α, β ریشه‌هاي معادله‌ي درجه‌ی دوم $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند بدون حل آن حاصل مقادیر زیر را بیابید.

$$\alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3, (\alpha - \beta)^2, |\alpha - \beta| , \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}, \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta, \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$$

حل: با محاسبه‌ی

$$S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5$$

و

$$P = x_۱ . x_۲ = \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$$

داریم:

$$\begin{cases} \alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta = S^۲ - ۲P = ۲۵ - ۲ = ۲۳ \\ \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha+\beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^۳ - ۳PS = \\ \qquad ۱۲۵ - ۳ \times ۱ \times ۵ = ۱۱۰ \\ (\alpha-\beta)^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۴\alpha\beta = S^۲ - ۴P = ۲۵ - ۴ = ۲۱ \\ |\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۲۵ - ۴(۱)(۱)}}{|۱|} = \sqrt{۲۱} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta} = \frac{S^۲ - ۲P}{P} = \frac{۲۳}{۱} = ۲۳$$

$$\alpha\beta^۲ + \alpha^۲\beta = \alpha\beta(\alpha+\beta) = SP = ۵$$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = t \hookrightarrow t^۲ = \alpha + \beta - ۲\sqrt{\alpha\beta} = S - ۲\sqrt{P} = ۵ - ۲ = ۳ \hookrightarrow$$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = t = \pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = t \hookrightarrow t^۲ = \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} = S + ۲\sqrt{P} = ۵ + ۲ = ۷ \hookrightarrow$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = t = +\sqrt{۷}$$

■

نکته‌ی ۲.۵.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰ \,, a \neq ۰$ اگر مجموع ریشه‌ها S و حاصلضرب ریشه‌ها P باشد داریم؛
$x^۲ - Sx + P = ۰$

اثبات:

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \,, a \neq ۰ \hookrightarrow \div a$$

$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \to x^۲ - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = ۰ \hookrightarrow x^۲ - Sx + P = ۰$$

■

دستور ۷

پس به یاد داشته باشیم؛

$$x^۲ - Sx + P = ۰$$

مثال ۲.۶.۱

معادله‌ی درجه‌ي دومي بسازيد که ریشه‌هاي آن $۲-۳\sqrt{۵}, ۲+۳\sqrt{۵}$ باشند.

حل:

$$S=\left(۲-۳\sqrt{۵}\right)+\left(۲+۳\sqrt{۵}\right)=۴ \hookrightarrow P=\left(۲-۳\sqrt{۵}\right).\left(۲+۳\sqrt{۵}\right)$$
$$=۴-۴۵=-۴۱$$
$$x^۲-Sx+P=۰ \hookrightarrow x^۲-۴x-۴۱=۰$$

■

مثال ۲.۷.۱

دو عدد چنان بیابید که مجموع آنها ۱ و حاصلضرب آنها $\frac{۴}{۲۵}$ باشد.

حل:

$$S=۱ \qquad , \qquad P=\frac{۴}{۲۵}$$
$$x^۲-Sx+P=۰ \hookrightarrow x^۲-x-\frac{۴}{۲۵}=۰ \hookrightarrow$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \hookrightarrow x_۱=\frac{۴}{۵}\ , x_۲=\frac{۱}{۵}$$

■

مثال ۲.۸.۱

در معادله‌ي $۴x^۲-۱۶x+m=۰$ یکي از ریشه‌ها سه واحد بیش از ریشه‌ي دیگر است m و هر دو ریشه را بیابید.

حل: با تشکیل S, P داریم؛

$$\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta=\alpha+۳\end{array}\right.$$
$$S=\alpha+\alpha+۳=۲\alpha+۳=-\frac{b}{a}=\frac{۱۶}{۴}=۴\rightarrow ۲\alpha=۱\rightarrow \alpha=\frac{۱}{۲},\beta=\frac{۷}{۲}$$
$$x=\alpha=\frac{۱}{۲}\rightarrow ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲-۱۶\left(\frac{۱}{۲}\right)+m=۰\rightarrow ۱-۸+m=۰\rightarrow m=۷$$

■

مثال ۲.۹.۱

معادله‌ي درجه‌ي دومي با ضرایب گویا بسازید که ریشه‌ی آن $۲-\sqrt{۳}$ باشد.

راه اول. حل:

$$x=۲-\sqrt{۳}\rightarrow ۲-x=\sqrt{۳}\rightarrow (۲-x)^۲=\left(\sqrt{۳}\right)^۲\rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$$

راه دوم. با توجه به مثال (۲.۱) ریشه‌ی دیگر باید $\sqrt{۳}+۲$ باشد و با تشکیل S, P داریم؛ حل:

$$S=\left(۲-\sqrt{۳}\right)+\left(۲+\sqrt{۳}\right)=۴\,,\ P=\left(۲-\sqrt{۳}\right).\left(۲+\sqrt{۳}\right)=۴-۳=۱$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰\rightarrow x^{۲}-۴x+۱=۰$$

■

نکته‌ی ۲.۶.۱

بحث در وجود و تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

می‌دانیم در حالتی که $\Delta>۰$ باشد دو ریشه‌ی حقیقی داریم.در این حالت داریم:

$$\frac{c}{a}<۰ \quad \text{یا} \quad \frac{c}{a}=۰ \quad \text{یا} \quad \frac{c}{a}>۰$$

که در حالت $\frac{c}{a}>۰$ دو ریشه هم علامت (متحدالعلامه) هستند و در حالت $\frac{c}{a}<۰$ دو ریشه مختلف‌العلامه علامت هستند و در

$$\frac{c}{a}=۰\rightarrow c=۰\rightarrow ax^{۲}+bx=۰\rightarrow x=۰, x=-\frac{b}{a} \qquad a\neq ۰$$

یک ریشه صفر و دیگری $x=-\frac{b}{a}$ است. پس در حالت $\Delta>۰$ داریم؛

$$\begin{cases} \frac{c}{a}>۰\rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>۰ & \text{هر دو ریشه‌ی معادله مثبت‌اند} \\ -\frac{b}{a}=۰\rightarrow b=۰, ax^{۲}+c=۰\rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} & \text{غ.ق.ق} \\ -\frac{b}{a}<۰ & \text{هر دو ریشه‌ی معادله منفی‌اند} \end{cases} \\ \frac{c}{a}=۰\rightarrow c=۰\rightarrow ax^{۲}+bx=۰\rightarrow x=۰, x=-\frac{b}{a} \qquad a\neq ۰ \\ \text{یکی از ریشه‌ها صفر و دیگری } -\frac{b}{a} \text{ است} \\ \frac{c}{a}<۰ \begin{cases} -\frac{b}{a}>۰ & \text{ریشه‌ی بزرگتر(از نظر قدر مطلق) مثبت است} \\ -\frac{b}{a}=۰\rightarrow b=۰, ax^{۲}+c=۰\rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} & \text{ق.ق} \\ -\frac{b}{a}<۰ & \text{ریشه‌ی بزرگتر(از نظر قدر مطلق) منفی است} \end{cases} \end{cases}$$

مثال ۲.۱۰.۱

درمعادله‌ي $(k+۱)\,x^{۲}-۳x+۱=۰$ مقدار k را چنان بیابید تا معادله دو ریشه‌ي مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$(k+۱)\,x^{۲}-۳x+۱=۰$$

$$\left.\begin{cases} \Delta>۰\hookrightarrow ۹-۴\,(k+۱)\,(۱)=-۴k+۵>۰\hookrightarrow k<\frac{۵}{۴} \\ \dfrac{c}{a}<۰\hookrightarrow \dfrac{۱}{(k+۱)}<۰\hookrightarrow k+۱<۰\hookrightarrow k<-۱ \end{cases}\right\}\rightarrow k<-۱$$

■

تست ۱.۲.۱. به ازاء کدام مقادیر m در معادله‌ی $mx-3\sqrt{x}+m-2=0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

۱) $-\frac{3}{2}<m<2$ ۲) $0<m<2$ ۳) $\frac{3}{2}<m<\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}<m<2$

حل: با توجه به تغییر متغیر $\sqrt{x}=t\geq 0$ و جایگذاری در معادله داریم:

$$mx-3\sqrt{x}+m-2=0\to mt^2-3t+(m-2)=0 \quad ,t\geq 0$$

با توجه به صورت سوال باید دو ریشه داشته باشیم که یکی مثبت باشد و دیگری منفی باشد که در حالت ریشه‌ی منفی، با توجه به $\sqrt{x}=t\geq 0$ جوابی برای x نداریم و در حالت ریشه‌ی مثبت $\sqrt{x}=t\geq 0$ می‌باشد و تنها ریشه‌ی معادله حاصل می‌شود. پس داریم:

$$mt^2-3t+(m-2)=0$$

$$\begin{cases}\Delta>0\hookrightarrow 9-4(m)(m-2)>0\hookrightarrow -4m^2+8m+9>0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow 1-\frac{\sqrt{13}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{13}}{2} \\ \frac{c}{a}<0\hookrightarrow \frac{m-2}{m}<0\hookrightarrow 0<m<2\end{cases}$$

که اشتراک آنها $0<m<2$ است. ■

نکته‌ی ۲.۷.۱

با توجه به تعیین علامت معادله‌ی درجه‌ی دوم $A=ax^2+bx+c=0\ ,a\neq 0$ نتیجه می‌گیریم شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم A همواره مثبت باشد $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$ و شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم A همواره منفی باشد $\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$ و به همین صورت شرط نامنفی بودن $\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a>0\end{cases}$ و همین صورت شرط نامثبت بودن $\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a<0\end{cases}$ می‌باشد.

مثال ۲.۱۱.۱

حدود k را چنان بیابید تا عبارت $(k-1)x^2+2kx+k+2=0$ همواره مثبت باشد.

حل:

$$(k-1)x^2+2kx+k+2=0$$

$$\left.\begin{cases}\Delta<0\to 4k^2-4(k-1)(k+2)=-4k+8<0\to k>2 \\ a>0\to k-1>0\to k>1\end{cases}\right\}\boxed{k>2}$$

■

تست ۲.۲.۱. اگر نمودار تابع $y=x^2+bx+c$ از نواحی سوم و چهارم نگذرد آنگاه:

۱) $c\leq 4b^2$ ۲) $4c\leq b^2$ ۳) $4c\geq b^2$ ۴) $c\geq 4b^2$

حل: چون تابع باید از نواحي سوم و چهارم نگذرد پس باید y مثبت یا صفر باشد یعنی عبارت نامنفی باشد پس:

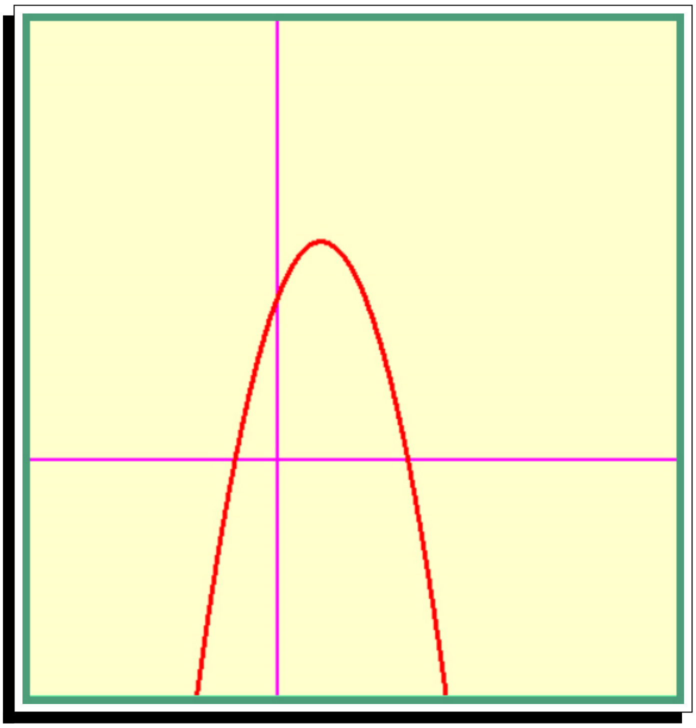
$$y = x^{۲} + bx + c$$

$$\begin{cases} ۱ > ۰ \\ \Delta \leq ۰ \Rightarrow b^{۲} - ۴c \leq ۰ \Rightarrow b^{۲} \leq ۴c \end{cases}$$

■

مثال ۲.۱۲.۱

با توجه به نمودار سهمی زیر روی علامت a, b, c بحث کنید.



حل: باتوجه به نمودار $f(۰) = c > ۰$ اما با توجه به نمودار $|x_۲| < |x_۱|$ پس مجموع ریشه‌ها مثبت است و داریم:

$$\frac{c}{a} < ۰ \xrightarrow{\text{but } c>۰} a < ۰ \qquad \text{so that} \; : \; -\frac{b}{a} > ۰ \xrightarrow{\text{but } a<۰} b > ۰$$

■

مثال ۲.۱۳.۱

محیط مستطیلی ۲۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

حل: راه اول.

$$L = ۲(x+y) = ۲۰ \hookrightarrow x + y = ۱۰ \hookrightarrow y = ۱۰ - x$$

$$S = x.y = x(۱۰ - x) = -x^{۲} + ۱۰x \hookrightarrow x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱۰}{-۲} = ۵ \, , \, y = ۵$$

■

نکته‌ی ۲.۸.۱

۱. اگر جمع دو کمیت مقدار ثابتی باشند، حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که آن دو کمیت با هم برابر باشند.

۲. اگر ضرب دو کمیت مقدار ثابتی باشند، حاصل‌جمع آنها وقتی مینیمم است که آن دو کمیت با هم برابر باشند.

راه دوم. حل: در مثال قبل دیدیم: $x+y=۱۰$ بنابراین اگر $x=y=۵$ باشد داریم؛

$$\max S=\max(x.y)=۵\times۵=۲۵$$

■

تست ۳.۲.۱. برد تابع $y=\sqrt{۴x-x^۲}$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[۰,۲)$ ۴) $[۰,\frac{۱}{۲})$

حل: واضح است $y=\sqrt{۴x-x^۲}\geq ۰$ است و مینیمم تابع صفر است. کافی است ماکزیمم تابع را بیابیم. از طرفی $۴x-x^۲=x(۴-x)$ همچنین $x+(۴-x)=۴$ و مقداری ثابت می‌باشد و در نتیجه اگر $x=۲ \hookleftarrow x=(۴-x)$ باشد داریم؛

$$\max x(۴-x)=۲\times۲=۴$$

و در نهایت

$$\max y=\sqrt{۴}=۲$$

و گزینه‌ی ۳ صحیح است.

■

تست ۴.۲.۱. مساحت مستطیلی ۲۵ است. کمترین مقدار محیط آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۱۰۰

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

مثال ۲.۱۴.۱

کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ را به ازای مقادیر مثبتِ x تعیین کنید.

راه اول. حل: عبارت را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$y=x+\frac{۴}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}\right)^۲+۴$$

با توجه به این‌که عبارت $\left(\sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}\right)^{۲}\geq ۰$ پس داریم؛ $y\geq ۴$ و مینیمم تابع ۴ است. ■

دستور ۸

اگر $a,b,x>۰$ باشند.

$$\min\left(ax+\frac{b}{x}\right)=۲\sqrt{ab}$$

دلیل اینکه:

$$(a,b,x>۰)\hookrightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab}\hookrightarrow ax+\frac{b}{x}\geq ۲\sqrt{ab}$$

راه دوم. حل: با توجه به نکته‌ی فوق $a=۱,b=۴$ و

$$\min\left(x+\frac{۴}{x}\right)=۲\sqrt{ab}=۲\sqrt{۱\times ۴}=۴$$

■

تست ۵.۲.۱. مینیمم تابع $y=\sqrt{x^{۲}+\frac{۴}{x^{۲}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل:

$$x^{۲}+\frac{۴}{x^{۲}}\geq ۲\sqrt{۴}=۴\hookrightarrow y\geq\sqrt{۴}=۲\hookrightarrow R_f=[۲,+\infty)$$

■

تمرین ۳.۲.۱. معادله‌ي $۲x^{۲}-۴x-۱=۰$ را در نظر بگیرید معادله‌ي درجه‌ی دومي بسازید که ریشه‌هاي آن؛

آ. سه واحد بیش از ریشه‌هاي معادله‌ي فوق باشند.
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=x+۳\hookrightarrow x=y-۳$$

$$۲x^{۲}-۴x-۱=۲(y-۳)^{۲}-۴(y-۳)-۱=۰\to ۲y^{۲}-۱۶y+۲۹=۰$$

■

ب. سه برابر ریشه‌هاي معادله‌ی فوق باشند.
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=۳x\hookrightarrow x=\frac{y}{۳}$$

$$۲x^{۲}-۴x-۱=۲\left(\frac{y}{۳}\right)^{۲}-۴\left(\frac{y}{۳}\right)-۱=۰\hookrightarrow ۲y^{۲}-۱۲y-۹=۰$$

■

ج. معکوس ریشه‌هاي معادله‌ي فوق باشند
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=\frac{1}{x}\hookrightarrow x=\frac{1}{y}$$
$$2x^2-4x-1=2\left(\frac{1}{y}\right)^2-4\left(\frac{1}{y}\right)-1=0\hookrightarrow -y^2-4y+2=0$$

■

نکته‌ی ۲.۹.۱

کافی است در این‌گونه مثالها جای a, c را عوض کنید.

بنا به نکته‌ی بالا داریم: $2x^2-4x-1=0\hookrightarrow -x^2-4x+2=0$

د. قرینه و معکوس ریشه‌هاي معادله‌ي فوق باشند
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=-\frac{1}{x}\hookrightarrow x=-\frac{1}{y}$$
$$2x^2-4x-1=2\left(-\frac{1}{y}\right)^2-4\left(-\frac{1}{y}\right)-1=0\hookrightarrow -y^2+4y+2=0$$

■

نکته‌ی ۲.۱۰.۱

کافی است در این‌گونه مثالها جای a, c را عوض کنید و b را قرینه کنیم

بنا به نکته‌ی بالا داریم: $2x^2-4x-1=0\hookrightarrow -x^2+4x+2=0$

ه. مربع ریشه‌هاي معادله‌ی فوق باشند.
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=x^2\hookrightarrow x=\pm\sqrt{y}$$
$$2x^2-4x-1=2\left(\pm\sqrt{y}\right)^2-4\left(\pm\sqrt{y}\right)-1=0\hookrightarrow 2y\pm4\sqrt{y}-1=0$$
$$2y-1=\pm4\sqrt{y}\hookrightarrow 4y^2-4y+1=16y\hookrightarrow 4y^2-20y+1=0$$

■

نکته‌ی ۲.۱۱.۱

می‌دانیم در معادله‌ی درجه‌ی دوم $a\neq0$, $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta>0$ باشد معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta=0$ باشد یک ریشه‌ی مضاعف دارد و $\Delta<0$ باشد ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تمرین ۴.۲.۱. مقدار k را چنان بیابید تا معادله‌ي $k^{۲}x^{۲}+۲(k+۱)x+۴=۰$ ریشه‌ي مضاعف داشته باشد.

حل:

$$k^{۲}x^{۲}+۲(k+۱)x+۴=۰$$

$$\Delta=۰\rightarrow ۴(k+۱)^{۲}-۱۶k^{۲}=-۳k^{۲}+۲k+۱=۰\rightarrow k=۱, k=-\frac{۱}{۳}$$

■

مثال ۲.۱۵.۱

صفرهای تابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=(x^{۲}-۲)^{۲}+(x^{۲}-۱)-۲ \qquad (۱.۱)$$

حل: معادله‌ی فوق از درجه‌ی چهار است اما می‌توان با روش **تغییر متغیر** آن را به درجه‌ی دو تبدیل کرد. فرض کنیم $x^{۲}-۱=t$ باشد، با جای‌گذاری در ریشه‌های تابع (۱.۱) داریم:

$$t^{۲}+t-۲=۰$$

حال از حل معادله‌ی فوق مقدارهای $\boxed{t=۱}$ و $\boxed{t=-۲}$ به دست می‌آیند. این مقادیر را در تغییر متغیر $x^{۲}-۱=t$ قرار می‌دهیم.

$$x^{۲}-۱=t\hookrightarrow x^{۲}-۱=۱\hookrightarrow x^{۲}=۲\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{۲}}$$
$$x^{۲}-۱=t\hookrightarrow x^{۲}-۱=-۲\hookrightarrow x^{۲}=-۱ \quad \text{غ.ق.ق}$$

■

توجه

در حل برخی از معادلات می توان با **تغییر متغیر** مناسبی آن را به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیر صورت گرفته، مقادیر متغیرِ معادله‌ی اولیه را یافت.

مثال ۲.۱۶.۱

معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

آ. $\sqrt{۱-x}-\sqrt[۴]{۱-x}-۲=۰$

حل:

$$\sqrt{۱-x}-\sqrt[۴]{۱-x}-۲=۰\hookrightarrow \sqrt[۴]{۱-x}=t\xhookrightarrow{x\leq ۱}۱-x=t^{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در صورت سؤال داریم}}\boxed{t^{۲}-t-۲=۰}$$

$$(t-۲)(t+۱)=۰\hookrightarrow\begin{cases}\text{if } t=۲ \text{ then } ۱-x=۱۶\rightarrow \boxed{x=-۱۵}\ \text{ق.ق}\\ \text{if } t=-۱ \text{ then } ۱-x=۱\rightarrow x=۰\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

■

ب. $(x-۳)^۲+۳x-۲۲=\sqrt{x^۲-۳x+۷}$

حل:

$$(x-۳)^۲+۳x-۲۲=\sqrt{x^۲-۳x+۷}\hookrightarrow x^۲-۳x-۱۳=\sqrt{x^۲-۳x+۷}$$

$$\sqrt{x^۲-۳x+۷}=t\xrightarrow{\text{با جایگذاری در صورت سؤال داریم}}\boxed{t^۲-t-۲۰=۰}$$

$$\begin{cases}\text{if } t=۵ \text{ then } x^۲-۳x+۷=۲۵\to\boxed{x=-۳,x=۶}\ \text{ق.ق}\\ \text{if } t=-۴ \text{ then } \sqrt{x^۲-۳x+۷}=-۴\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

■

تمرین ۵.۲.۱. به ازاء چه مقدار m بین جوابهاي معادلهي $x^۲-۳x+\frac{۱}{m-۱}=۰$ رابطهی $x'+۳x''=۷$ برقرار است. (x' و x'' ریشه‌های معادله می‌باشند.)

حل: می‌دانیم؛ $x'+x''=-\frac{b}{a}=۳$ می‌باشد.

$$\begin{cases}x'+x''=۳\\ x'+۳x''=۷\end{cases}\hookrightarrow\begin{cases}-x'-x''=-۳\\ x'+۳x''=۷\end{cases}\hookrightarrow x'=۱,x''=۲$$

بنابراین داریم:

$$x^۲-۳x+\frac{۱}{m-۱}=۰\xrightarrow{x=۱}\boxed{m=\frac{۳}{۲}}$$

■

تست ۶.۲.۱. در معادلهي $ax^۲+bx+c=۰$ رابطهي $x_۱+x_۲=x_۱^۲x_۲^۲$ برقرار است کدام گزینه درست است؟(آزاد ۸۷)

۱) $c+ab=۰$ ۲) $c^۲+ab=۰$ ۳) $c^۲-ab=۰$ ۴) $b^۲+ac=۰$

حل: با توجه به این‌که $S=x_۱+x_۲$, $P=x_۱.x_۲$ و نیز $x_۱.x_۲=\frac{c}{a}$, $x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}$ می‌باشند داریم؛

$$x_۱+x_۲=x_۱^۲x_۲^۲\to-\frac{b}{a}=\left(\frac{c}{a}\right)^۲\xrightarrow{a\neq۰}c^۲+ab=۰$$

■

تست ۷.۲.۱. ریشه‌هاي معادلهي درجهي دوم $x^۲+ax+b=۰$ يك واحد از ریشه‌هاي معادلهي $۳x^۲+۷x+۱=۰$ بیشتر است b کدام است؟(سراسری۸۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=x+۱\to x=y-۱$$

$$۳x^۲+۷x+۱=۰=۳(y-۱)^۲+۷(y-۱)+۱=۰\to۳y^۲-y-۳=۰$$

$$y^۲-\frac{۱}{۳}y-۱=۰\to b=-۱$$

■

چند تست و تمرین برای بخش ۲.۱

تمرین ۶.۲.۱. نشان دهید معادله‌ي $x^۲ - ۵x - ۴\sqrt{x} + ۱۳ = ۰$ جواب ندارد.

حل: با تبدیل آن به صورت زیر جواب واضح است.

$$x^۲ - ۶x + ۹ + x - ۴\sqrt{x} + ۴ = ۰ \hookrightarrow (x-۳)^۲ + (\sqrt{x}-۲)^۲ = ۰$$

■

تمرین ۷.۲.۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^-۴x + ۱ = ۰$ باشند، بدون حل معادله، حاصل $\dfrac{\alpha^۲}{\beta+۲} + \dfrac{\beta^۲}{\alpha+۲}$ را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۸.۲.۱. اگر یکی از جوابهای معادله‌ی $۲x^۲ - ۱۲x + m - ۱ = ۰$ دو برابر جواب دیگر آن باشد، m و هر دو جواب را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۹.۲.۱. عدد مثبتی را بیابید که مربع آن یک واحد از خودش بزرگتر باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۰.۲.۱. مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع زیر برابر (-۲) باشد. سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

$$f(x) = x^۳ - kx^۲ - x - ۲$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۱.۲.۱. صفرهای تابع $f(x) = x^۴ - ۱۰x^۲ + ۱$ را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۲.۲.۱. تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$ ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

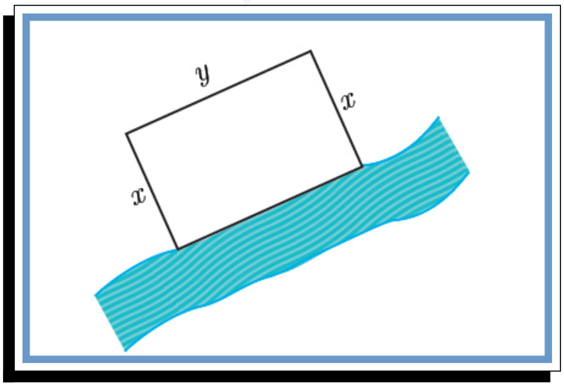
حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۱۳.۲.۱. یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینه‌ی ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.
(راهنمایی:

$$y + 2x = 100 \hookrightarrow \boxed{y = 100 - 2x}$$

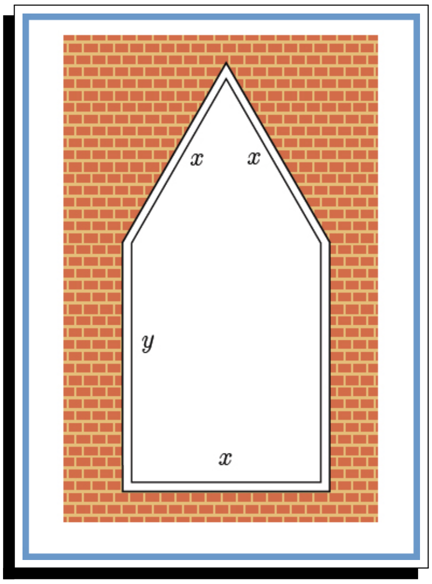
مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب x بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.)



حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

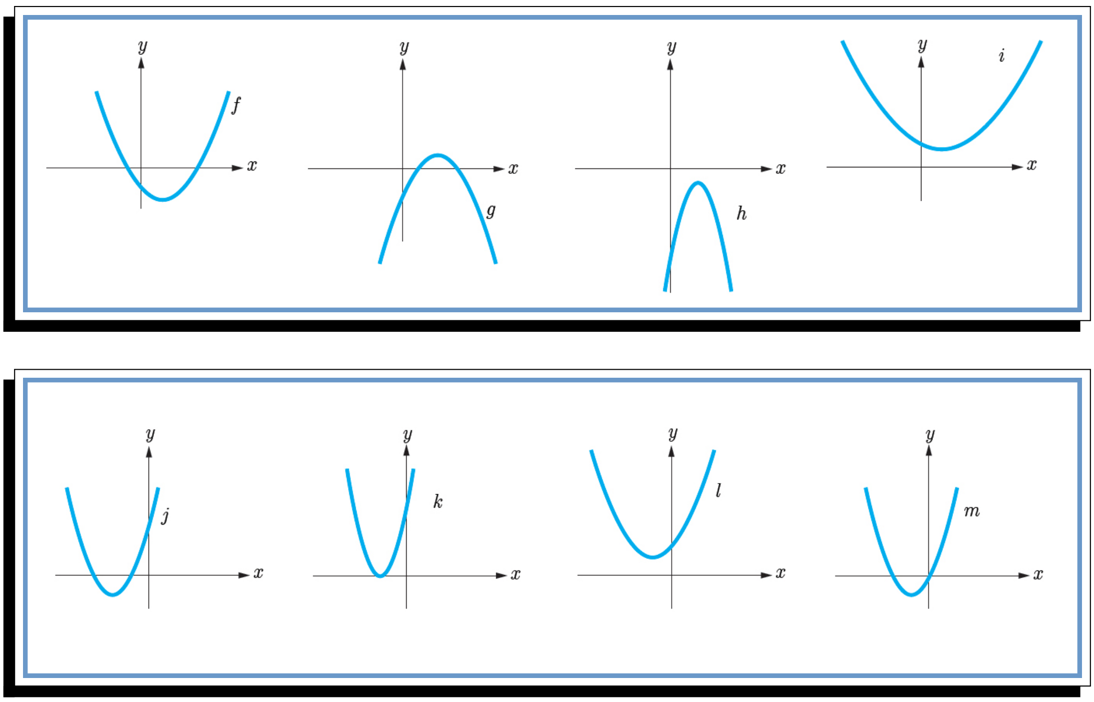
تمرین ۱۴.۲.۱. پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع دربالای آن می‌باشد. اگر محیط پنجره $40m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

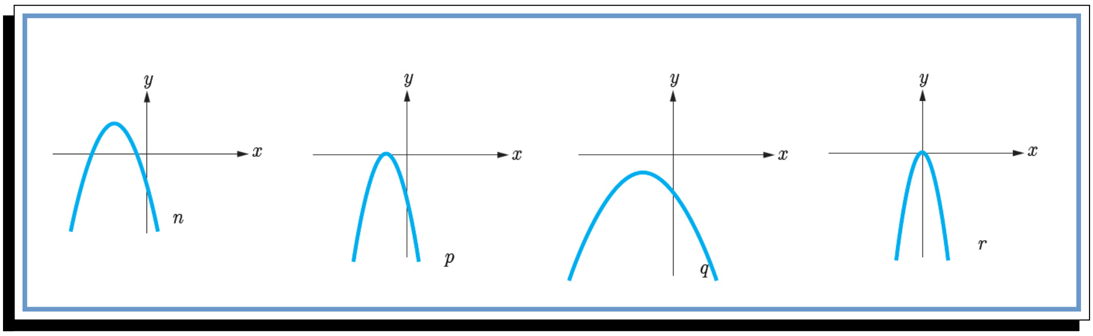


حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۵.۲.۱. با توجه به نمودار توابع زیر جدول را کامل کنید.





ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			−	
b	−							+			−	
c	−							∘			−	
تعداد ریشه‌ها	دو							دو			فاقد ریشه	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

تمرین ۱۶.۲.۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

پ) $((2x^2 - 1)^2 = 7 + 6(2x^2 - 1))$

ت) $2x^{\frac{2}{3}} + 7x^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$

ث) $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} - 2 = 0$

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱.۲.۱۷. در معادله‌ی $۴x^۲ - ۸x + c = ۰$ مقدار c را به گونه‌ای بیابید که یکی از ریشه‌های آن ۳ واحد بزرگ‌تر از ریشه‌ی دیگر باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۲.۱۸. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{۲}-۱$ باشند.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۲.۱۹. ماکزیمم یا مینیمم تابع‌های با ضابطه‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=-۲x^۲+۸x-۵$ ب) $g(x)=۳x^۲+۶x+۵$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۲.۲۰. راکتی که به طور عمودی شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد که در آن $h(t)=۱۰۰t-۵t^۲ \quad \geq ۰$

آ. چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. ارتفاع نقطه‌ی اوج را بیابید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می‌گردد؟
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۱.۲.۱. استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که

آ. مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.
حل: به عهده‌ی شما

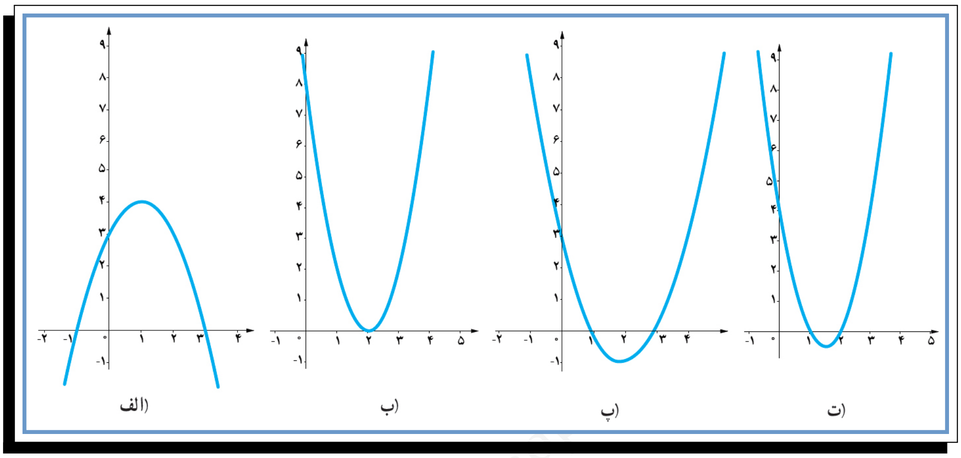
✓ ■

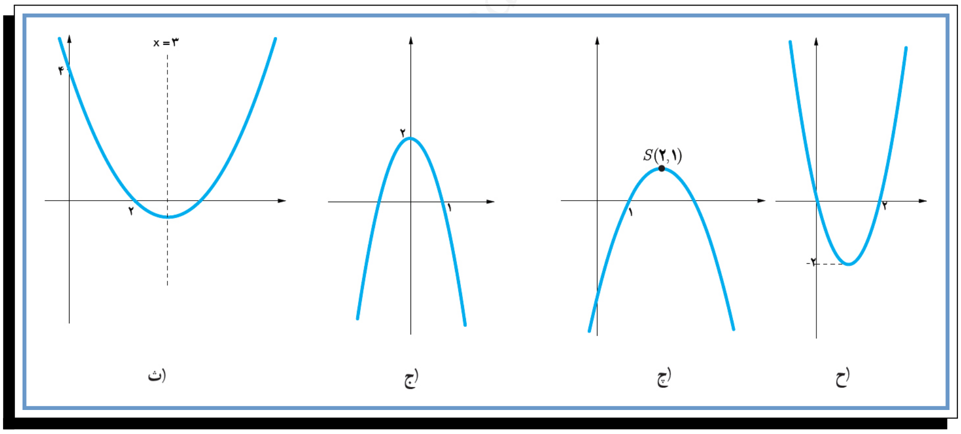
ب. مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۲.۲.۱. معادله‌ی سهمی‌های زیر را بنویسید.





حل: به عهده‌ی شما

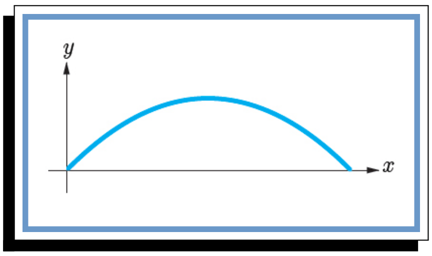
✓ ■

تمرین ۲۳.۲.۱. تابع $c \neq 0$ $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$ ریشه ندارد و حاصل $a+b+c$ عددی منفی است. ثابت کنید $c < 0$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۴.۲.۱. فوتبالیستی توپی را با زاویه‌ی 45° نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه‌ی $20\, m/s$ شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ، مانند شکل مقابل است که تابع مسیر آن به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ می باشد. نقطه‌ی برخورد توپ با زمین را به دست آورید.



حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۵.۲.۱. معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

آ. $\left(\frac{x^{۲}}{۳}-۲\right)^{۲}-۷\left(\frac{x^{۲}}{۳}-۲\right)+۶=۰$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. $(۴-x^{۲})^{۲}-۲(۴-x^{۲})-۱۵=۰$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. $\sqrt{x+۳}+\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{(x-۱)(x+۳)}=۴-۲x$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

د. $\sqrt{x-۲+\sqrt{۲x-۵}}+\sqrt{x+۲+۳\sqrt{۲x-۵}}=۷\sqrt{۲}$

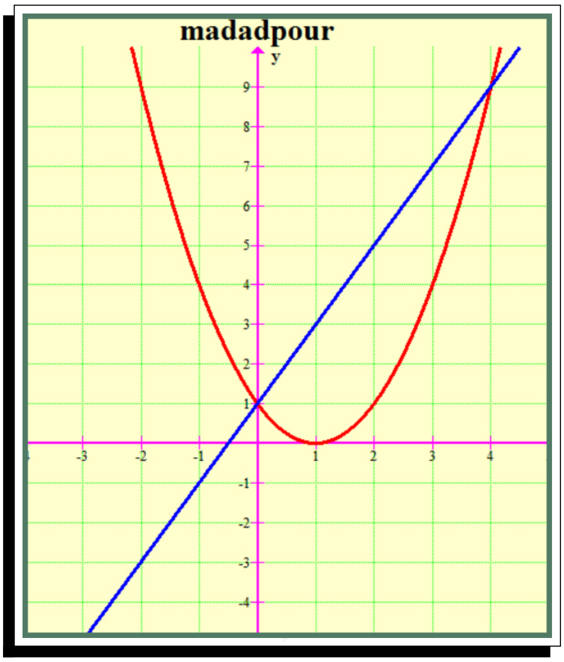
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

توجه

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله که از طریق آن **تعداد جواب‌ها** و **مقدار تقریبی** (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است را **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامند.

فعالیت ۱.۲.۱. آ. نمودار دو تابع $y=(x-1)^2$ و $y=2x+1$ را روی یک نمودار رسم کنید. حل:



■

ب. طول محل تلاقی این دو نمودار چقدر است؟ نشان دهید این مقدار جواب‌های معادله‌ی $(x-1)^2=2x+1$ می‌باشد.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

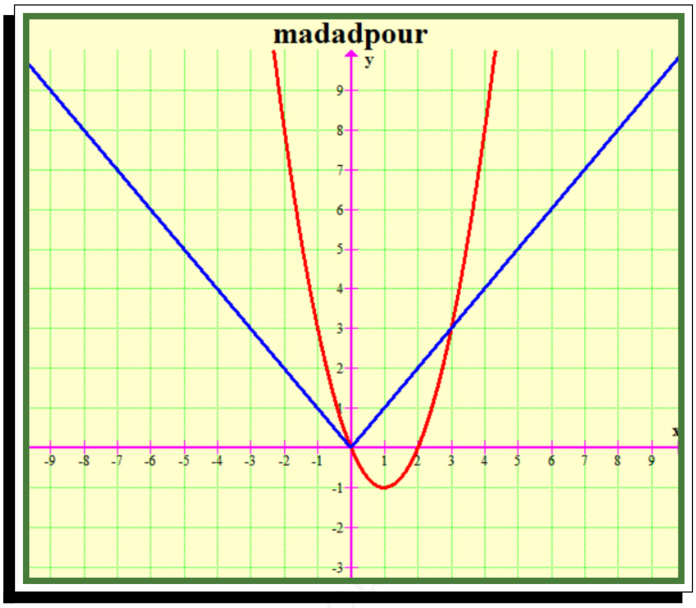
ج. اگر بدانیم عددی مانند a یک جواب معادله‌ی $(x-1)^2=2x+1$ است، آیا a طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است؟ حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

مثال ۲.۱۷.۱

به **روش هندسی** معادله‌ی $|x| = x^{2} - 2x$ را حل کنید.

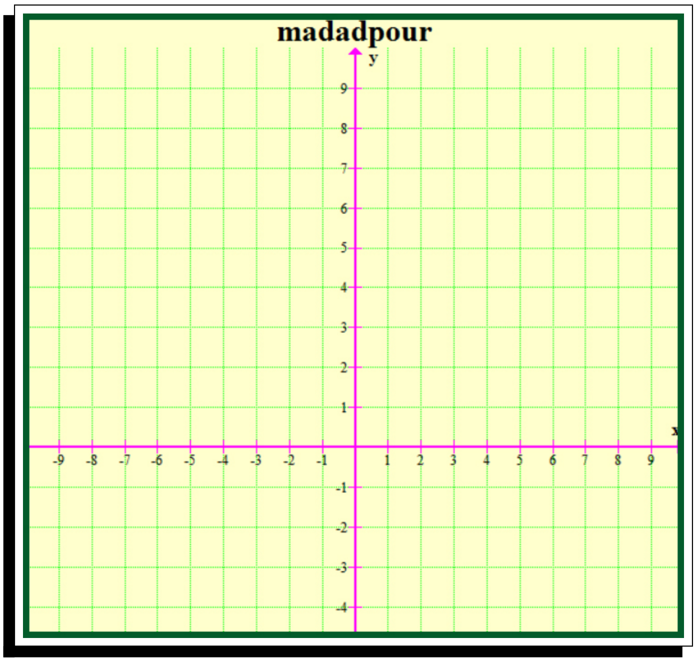
حل: فرض کنیم $f(x) = x^{2} - 2x$ و $g(x) = |x|$ نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم.



در مورد تابع f می‌توان نوشت: $f(x) = (x-1)^{2} - 1$ با توجه به رسم نمودار دو تابع $\boxed{x = 0}$ و $\boxed{x = 3}$ طول‌های نقاط تلاقی دو نمودار و در نتیجه جواب‌های معادله‌ی $|x| = x^{2} - 2x$ می‌باشند. ■

تمرین ۲.۲۶.۱ به **روش هندسی** معادله‌ی $|x-1| + 2 = x^{2} + 1$ را حل کنید.

حل: به عهده‌ی شما



✓ ■

۳.۱ معادلات گویا و گنگ

۱.۳.۱ معادلات شامل عبارات گویا

با یک مثال به موضوع وارد می‌شویم.

مثال ۳.۱.۱

در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. چگونه می‌توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند؟

برای حل مثال فوق حالت‌های مختلفی وجود دارد. ممکن است نمک به اندازه‌ی کافی وجود داشته باشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.
راه اول. **حل:** فرض کنیم نمک به اندازه‌ی کافی موجود باشد.
ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$۲۰۰ \times \frac{۴}{۱۰۰} = ۸kg$$

حالا اگر بخواهیم x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم وزن نمک $x+۸$ و وزن کل محلول $x+۲۰۰$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{۸+x}{۲۰۰+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید به محلول ۷ درصد نمک تبدیل شود تناسب زیر برقرار خواهد بود؛

$$\frac{۸+x}{۲۰۰+x} = \frac{۷}{۱۰۰}$$

برای حل معادله‌ی اخیر که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $۱۰۰(۲۰۰+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$۱۰۰(x+۸) = ۷(۲۰۰+x) \xrightarrow{\text{از حل معادله داریم}} x = \frac{۶۰۰}{۹۳}$$

این میزان نمک تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم خواهد بود. ■

راه دوم. **حل:** اگر نمک در مغازه موجود نباشد. در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله‌ی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{۸}{۲۰۰-y} = \frac{۷}{۱۰۰} \xrightarrow{\text{از حل معادله داریم}} y = \frac{۶۰۰}{۷}$$

و این بدین معنی است که باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسیم. ■

تمرین ۱.۳.۱. در مثال صفحه‌ی قبل حالت سومی وجود دارد که نمک به اندازه‌ی کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و آن را به محلول بیفزاییم. چند کیلوگرم از آب محلول باید تبخیر شود تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسیم؟

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

توجه

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می کنیم. **جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در عالم واقع، مطابقت نداشته باشند** که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

مثال ۳.۲.۱

معادله‌ی $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$ را حل کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها (ک.م.م) برابر $x(x^۲-۴)$ می‌باشد. با ضرب این عبارت در طرفین معادله داریم؛

$$۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)=x(۴x-۴)\hookrightarrow ۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$

$$x^۲-۲x-۸=۰\hookrightarrow (x-۴)(x+۲)=۰\hookrightarrow \boxed{x=۴} \text{ یا } x=-۲$$

اما جواب $x=-۲$ مورد قبول نمی‌باشد. و تنها جواب مورد قبول معادله $x=۴$ است. ■

مثال ۳.۳.۱

ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود به دست آورید.

آ. $\frac{۳}{x+۱}=\frac{۲x}{x+۲}$

ب. $\frac{x-۲}{x^۲+۲x}=\frac{۲}{x-۲}+\frac{۱}{x}$

حل:

$$\text{آ)}\quad \frac{۲x}{x+۲}=\frac{۳}{x+۱}\to D=\mathbb{R}-\{-۲,-۱\}$$

$$\frac{۲x}{x+۲}=\frac{۳}{x+۱}\xleftrightarrow{\times(x+۱)(x+۲)} ۳\,(x+۲)=۲x\,(x+۱)\to$$

$$۲x^۲-x-۶=۰\to x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۴۸}}{۴}=\frac{۱\pm ۷}{۴}\to\begin{cases}\boxed{x=۲} & \text{is true}\\ \boxed{x=-\frac{۳}{۲}} & \text{is true}\end{cases}$$

■

حل:

$$\text{ب)}\quad \frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۲}=\frac{x-۲}{x^۲+۲x}\to D=\mathbb{R}-\{-۲,۰,۲\}$$

$$\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۲}=\frac{x-۲}{x\left(x+۲\right)}\xhookrightarrow{x(x-۲)(x+۲)}$$

$$\left(x-۲\right)\left(x+۲\right)+۲x\left(x+۲\right)=\left(x-۲\right)\left(x-۲\right)\to$$

$$x^۲-۴+۲x^۲+۴x=x^۲-۴x+۴\to x^۲+۴x-۴=۰\to$$

$$x=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶+۱۶}}{۲}=-۲\pm۲\sqrt{۲}\ \text{are true}$$

■

مثال ۳.۴.۱

پارامتر t را چنان بیابید تا $x=۱$ ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{۳}{t}=\frac{۱}{x}+\frac{x-۲}{tx}$ باشد.

حل:

$$\frac{x-۲}{tx}+\frac{۱}{x}=\frac{۳}{t}\xhookrightarrow{x=۱}\frac{۱-۲}{t\times۱}+\frac{۱}{۱}=\frac{۳}{t}$$

$$\xhookrightarrow{\times t\neq۰}\frac{-۱}{t}+۱=\frac{۳}{t}-۱+t=۳\to\boxed{t=۴}$$

■

تمرین‌هایی برای فصل ۳.۱

تمرین ۲.۳.۱. اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم؛

$$\boxed{\frac{W}{L} = \frac{L}{L+W}}$$

آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.
اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۳۲۰ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۳.۳.۱. ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود به دست آورید.

آ. $\frac{x+۲}{x^{۲}-۳x} = \frac{۶}{۴x}$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. $\frac{x+۲}{x-۲}-\frac{۱}{x}=\frac{۲}{x^۲-۲x}$
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. $\frac{x^۲-۱}{x^۲-۴}+\frac{x^۲-۴}{x^۲-۱}=\frac{۳}{۲}$
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۴.۳.۱. پارامتر k را چنان بیابید تا $x=۲$ ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{۳}{x+۲}=\frac{kx+۱}{x}$ باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۵.۳.۱. علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱

ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۶.۳.۱. اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

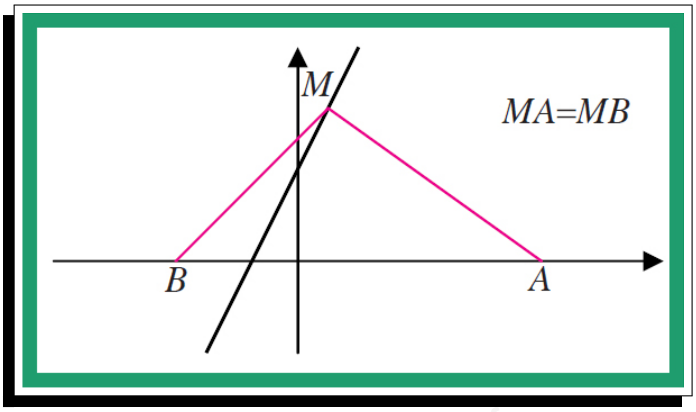
۲.۳.۱ معادلات شامل عبارت‌های گنگ

با یک مثال وارد موضوع می‌شویم.

مثال ۱.۵.۳

نقطه‌ای روی خط $y = ۲x + ۱$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله باشد.

حل:



فرض کنید $M(x,y)$ نقطه‌ای روی خط $y = ۲x+۱$ باشد. با پارامتری کردن نقطه‌ی M مختصات آن به صورت $M(x, ۲x+۱)$ می‌باشد. حال باید فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

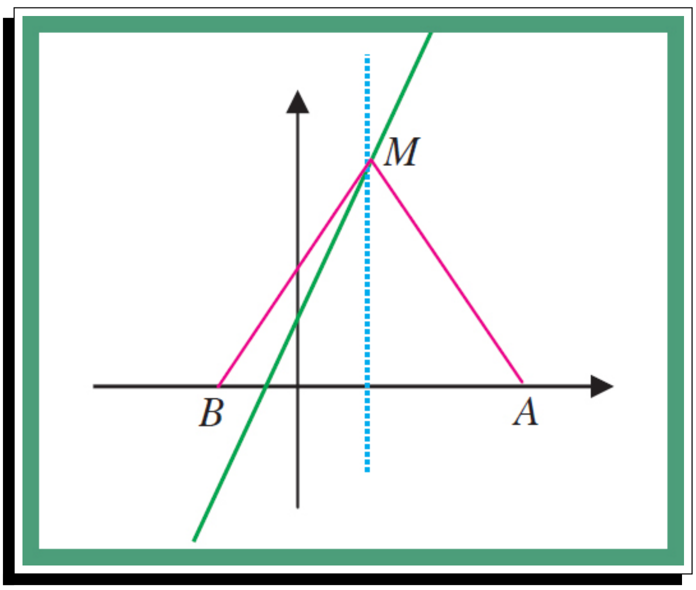
$$\mathrm{MA} = \sqrt{(x-۳)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲} = \sqrt{(x+۱)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲} = \mathrm{MB}$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} (x-۳)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲ = \sqrt{(x+۱)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲}$$

$$x^۲ - ۶x + ۹ = x^۲ + ۲x + ۱ \xrightarrow{\text{بعد از حل معادله داریم}} \boxed{x = ۱} \hookrightarrow \mathrm{M}(۱,۳)$$

■

این مثال را می‌توانیم به صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله اند روی عمودمنصف پاره خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه‌ی $\mathrm{M}(۱,۳)$ روی عمودمنصف AB است؛ ازطرف دیگر M روی خط $y = ۲x + ۱$ قرار دارد پس M محل برخورد این دو خط است.



توجه

برخی از معادلات دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند که آنها را معادلات گنگ می نامند. برای حل آنها با **به توان رسانی طرفین معادله** (و در صورت لزوم تکرار آن) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال ۳.۶.۱

معادله‌ی $\sqrt{x+۲}=x-۴$ را حل کنید.

حل:

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{x+۲})^۲=(x-۴)^۲\\
&x+۲=x^۲-۸x+۱۶\\
&x^۲-۹x+۱۴=۰\\
&(x-۲)(x-۷)=۰\\
&x=۲ \text{ یا } x=۷
\end{aligned}
$$

حال جواب‌های بدست آمده را در معادله امتحان می‌کنیم.

$$\text{if } x=۲ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۲\neq -۲$$

$$\text{if } x=۷ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۲۳=۳$$

پس تنها جواب معادله $\boxed{x=۷}$ است. ■

مثال ۳.۷.۱

معادله‌ی $x-\sqrt{x}=۲۰$ را حل کنید.

حل:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x}=x-۲۰\\
&x=x^۲-۴۰x+۴۰۰\\
&x^۲-۴۱x+۴۰=۰\\
&(x-۱۶)(x-۲۵)=۰\\
&x=۱۶ \text{ یا } x=۲۵
\end{aligned}
$$

حال جواب‌های بدست آمده را در معادله امتحان می‌کنیم.

$$\text{if } x=۲۵ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۲۰=۲۰$$

$$\text{if } x=۱۶ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۲۰\neq ۱۲$$

پس تنها جواب معادله $\boxed{x=۲۵}$ است. ■

چند تست و تمرین برای بخش ۳.۱

تمرین ۷.۳.۱. معادلات زیر را حل کنید.

$$a)1-\sqrt{x-3}=4\ ,\ b)6=\frac{12}{\sqrt{2a-3}}\quad ,\ c)x^2\sqrt{1-x^2}=4x\sqrt{1-x^2}$$

$$d)\sqrt{2+\sqrt{x^3-x}}=\sqrt{2}\quad ,\quad e)\sqrt{3x-2}=2-3x\quad ,\quad f)\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$$

$$g)\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۸.۳.۱. معادله‌ی $\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x}=۰$ را حل کنید. سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۹.۳.۱. به کمک نتیجه‌ای که از تمرین قبل می‌گیرید تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$۷|x^۲-۴|+۲|x^۳-۸|+۵\sqrt{x^۳-۴x}=۰$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۰.۳.۱. پدربزرگ چند اسباب بازی یکسان برای اهدا به مهدکودک مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول چهار اسباب بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۱.۳.۱. فاصله‌ی بین دو شهر واقع در کنار رودخانه‌ای ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۲.۳.۱. ماشین A کاری را به تنهایی ۴ ساعت زودتر از ماشین A انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین کار را در ۵ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهد؟

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱۳.۳.۱. مخزنی گازی از دونیم کره به شعاع r و استوانه‌ای به ارتفاع ۴ متر تشکیل شده است. اگر حجم مخزن 30π باشد، شعاع هر یک از نیم کره‌ها چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تست ۱.۳.۱. معادله‌ی $\sqrt{x^۲-x-۶}+\sqrt{x^۳-۵x^۲-۲x+۲۴}=۰$ چند جواب دارد ؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: به عهده‌ی شما

.

■ ✓

تست ۲.۳.۱. معادله‌ی $x-۲\sqrt{x-۱}=۰$

۱) يك ريشه دارد

۲) دو ريشه‌ی متمايز دارد

۳) ريشه‌ی حقيقي ندارد

۴) ريشه‌ی مضاعف دارد

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تست ۳.۳.۱. معادله‌ی $(۳x-۲)\sqrt{۱-۹x^۲}=۰$

۱) ریشه ندارد
۲) یك ریشه‌ی ساده دارد
۳) یك ریشه‌ی مضاعف دارد
۴) دو ریشه دارد

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تست ۴.۳.۱. تعداد جواب‌هاي معادله‌ی $\frac{۸}{x^۲-۴}=\frac{x}{x-۲}+\frac{x-۲}{x+۲}$ كدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

۴.۱ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی خواص آن آشنا شدید. همان‌طور که می‌دانید قدرمطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a| = \begin{cases} +a & a \geq ۰ \\ -a & a < ۰ \end{cases}$$

فعالیت ۱.۴.۱. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

$$|-۵-(-۳)| =$$
$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}| =$$
$$|۱/۵-۱\frac{۱}{۲}| =$$

فعالیت ۲.۴.۱. عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

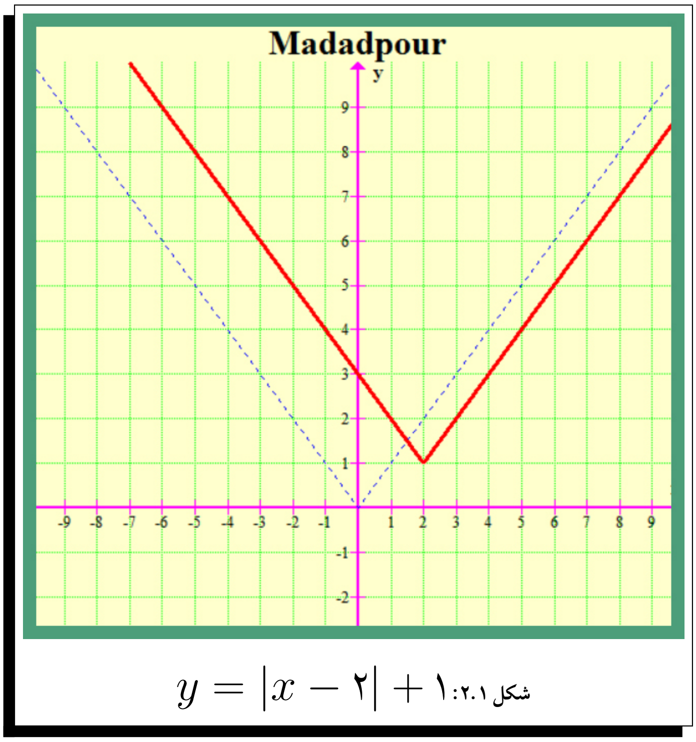
$$\sqrt{a^۴+۲a^۲+۱} = \sqrt{(\cdots+\cdots)^۲} =$$

$$\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(\sqrt{۳}-\cdots)^۲} =$$

فعالیت ۳.۴.۱. نمودار تابع $y=|x-۲|+۱$ را رسم کنید.

راه اول. حل: در این راه از انتقال استفاده می‌کنیم. نمودار فوق در واقع انتقال یافته‌ی نمودار تابع $y=|x|$ تحت بردار انتقال $O(۲,۱)$ می‌باشد. نمودار تابع را در زیر ببینید.

■



شکل ۲.۱: $y=|x-۲|+۱$

راه دوم. حل: با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$y=|x-۲|+۱=\begin{cases}+(x-۲)+۱ & x\geq ۲\\ \\ -(x-۲)+۱ & x<۲\end{cases}=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۲\\ \\ -x+۳ & x<۲\end{cases}$$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم. حاصل همان شکل (۲.۱) خواهد بود. ■

توجه

روش دوم در حالت کلی یک روش جامع برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می‌باشد. به مثال زیر در این زمینه توجه کنید.

مثال ۴.۱.۱

نمودار تابع $y=|x-۱|+|x+۲|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا عبارات درون قدر مطلق را مطابق زیر تعیین علامت می‌کنیم؛ ■

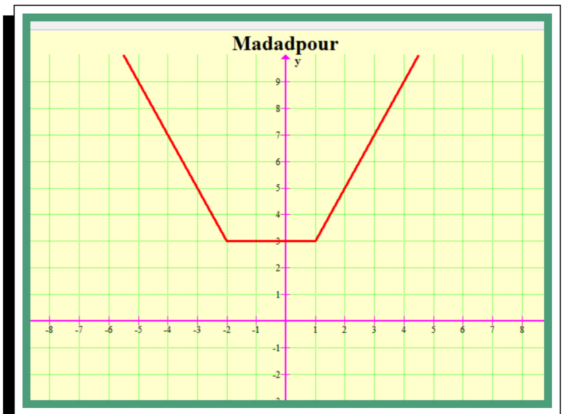
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	

if $x<-۲$ then : $y=-(x-۱)-(x+۲)=-۲x-۱$

if $-۲\leq x\leq ۱$ then : $y=-(x-۱)+(x+۲)=-۳$

if $x>۱$ then : $y=+(x-۱)+(x+۲)=۲x+۱$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم.



شکل ۳.۱: $y = |x-1| + |x+2|$

نمودار توابع مشابه شکل (۳.۱) به **نمودار گلدانی** معروفند.

مثال ۴.۲.۱

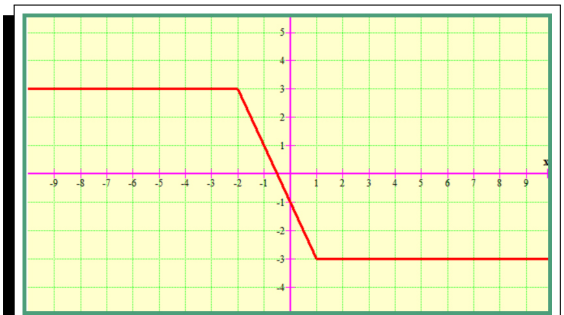
نمودار تابع $y = |x-1| - |x+2|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا عبارات درون قدر مطلق را مطابق زیر تعیین علامت می‌کنیم؛ ■

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	

$$\text{if } x < -2 \text{ then}: \; y = -(x-1) + (x+2) = 3$$
$$\text{if } -2 \leq x \leq 1 \text{ then}: \; y = -(x-1) - (x+2) = -2x-1$$
$$\text{if } x > 1 \text{ then}: \; y = +(x-1) - (x+2) = -3$$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم.



شکل ۴.۱: $y = |x-1| - |x+2|$

نمودار توابع مشابه شکل (۴.۱) به **نمودار آبشاری یا سرسره‌ای** معروفند.

مثال ۴.۳.۱

نمودار تابع $y = |۲x - ۱| - |x + ۲|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا عبارات درون قدر مطلق را مطابق زیر تعیین علامت می‌کنیم؛ ■

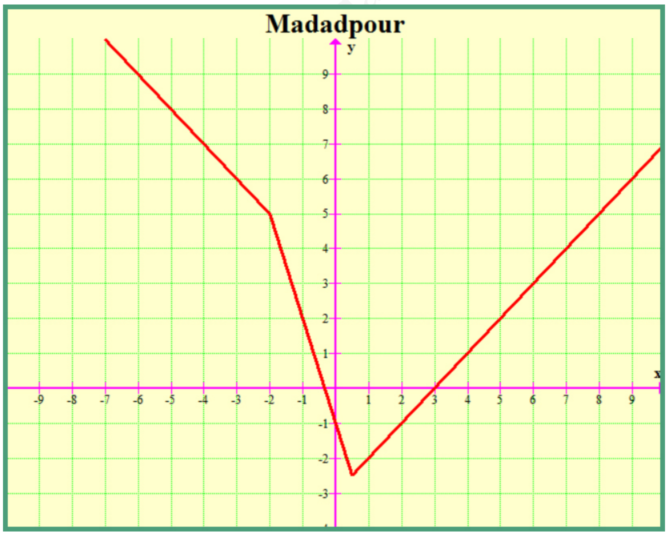
x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	

if $x < -۲$ then : $y = -(۲x - ۱) + (x + ۲) = -x + ۳$

if $-۲ \leq x \leq \frac{۱}{۲}$ then : $y = -(۲x - ۱) - (x + ۲) = -۳x - ۱$

if $x > \frac{۱}{۲}$ then : $y = +(۲x - ۱) - (x + ۲) = x - ۳$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم.



شکل ۱.۵: $y = |۲x - ۱| - |x + ۲|$

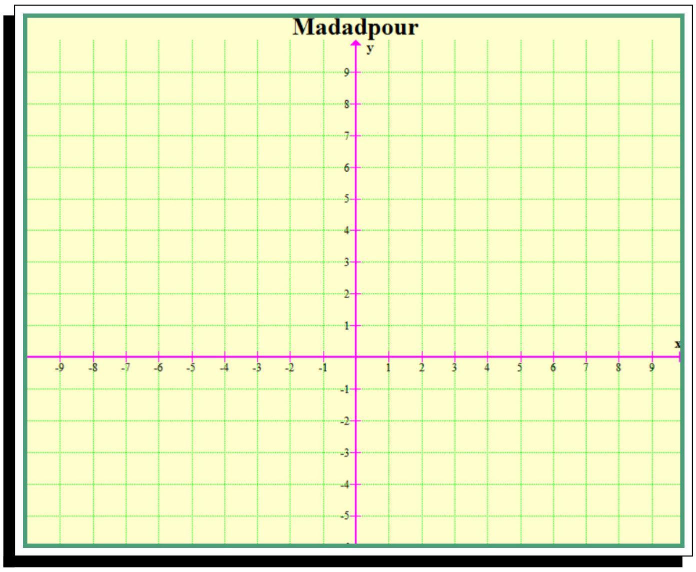
تمرین ۱.۴.۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱. $y = |x + ۳| - |x - ۲|$

۲. $y = |x + ۳| + |x - ۲|$

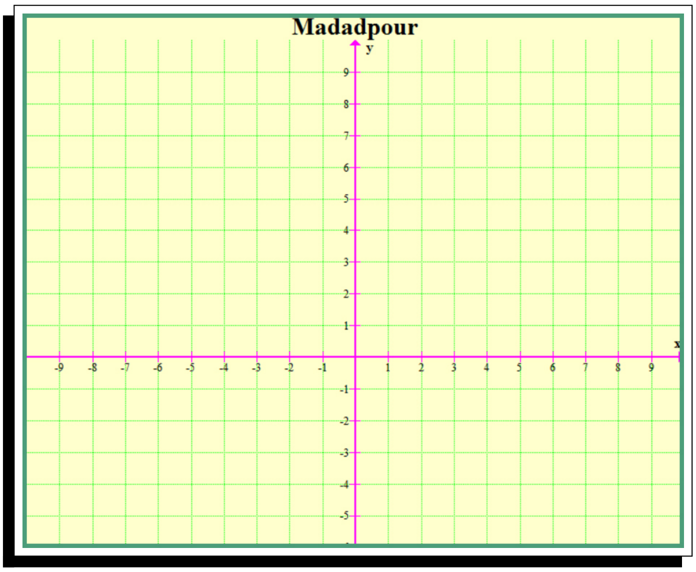
۳. $y = |۲x + ۳| + |۳x - ۲|$

حل: ۱. به عهده‌ی شما



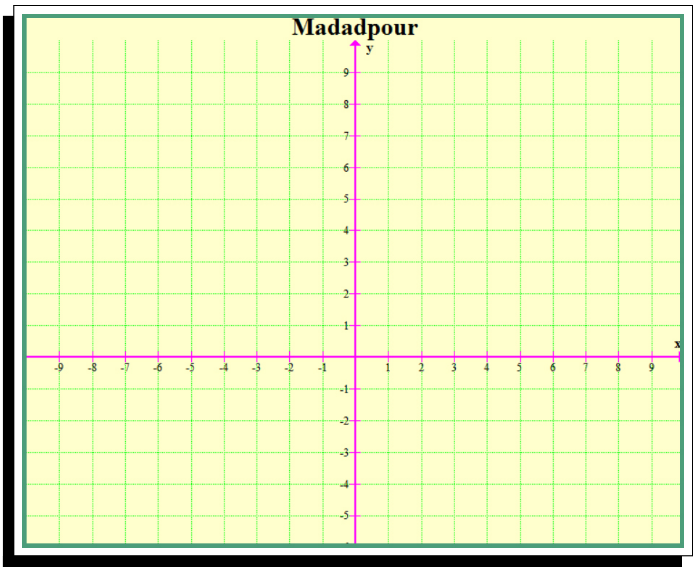
✓ ■

حل: ۲. به عهده‌ی شما



✓ ■

حل: ۳. به عهده‌ی شما



✓ ■

با توجه به تعریف قدرمطلق، $|x|$ همان فاصله‌ی عدد حقیقی x تا مبدأ مختصات می‌باشد. به‌عنوان مثال فاصله‌ی هر عدد حقیقی از مبدأ مختصات همواره عددی نامنفی است. پس می‌توان گفت برای هر عدد حقیقی x همواره داریم؛ $|x| \geq ۰$ ویژگی‌های زیر با استفاده از تعریف قدر مطلق همواره برقرار هستند.

۱. $|x| \geq ۰$
۲. $|x| = \sqrt{x^۲}$
۳. $|x| = a \Leftrightarrow x = a \ or \ x = -a \quad , \quad a \geq ۰$
۴. $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \ or \ x = -a$
۵. $|x| = |-x|$
۶. $|x|^۲ = x^۲$

فعالیت ۴.۴.۱. فرض کنید a و b و c عددهای حقیقی دلخواه باشند.

آ. از رابطه‌ی $|a| = \sqrt{a^۲}$ استفاده کنید و نشان دهید؛

$$\boxed{|a.b| = |a||b|}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

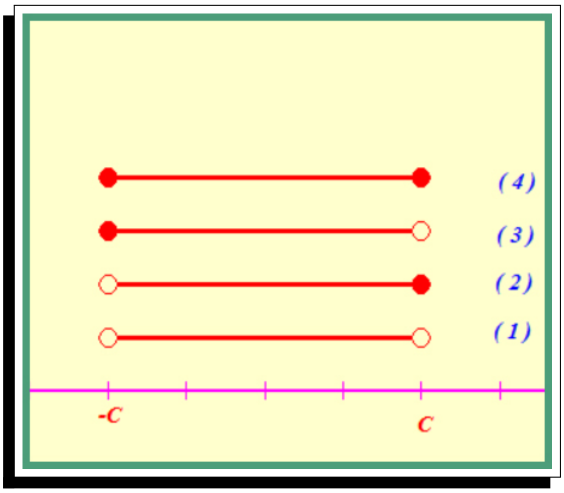
ب. با فرض $b \neq ۰$ و استفاده‌ی از مرحله قبل ثابت کنید. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

حل: راهنمایی.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{۱}{b}\right| = \dots$$

✓ ■

فعالیت ۵.۴.۱. فرض کنید C یک عدد حقیقی نامنفی باشد. مجموعه‌ی جواب‌های زیر برای کدام یک از نامعادلات داده شده می‌توانند قابل قبول باشند؟چرا؟



آ. $|x| < C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}} \bigcirc$

ب. $|x| > C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}} \bigcirc$

پ. $|x| \geq C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}} \bigcirc$

ت. $|x| \leq C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}} \bigcirc$

فعالیت ۶.۴.۱. برای هر عدد حقیقی a نشان دهید؛

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

فعالیت ۷.۴.۱. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید؛

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

فعالیت ۸.۴.۱. با استفاده از قسمت قبل « **نامساوی مثلث** » را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید.

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

حل: به عهده‌ی شما

■

✓

در نامساوی بالا چه شرطی باید برقرار باشد تا داشته باشیم؛

$$|a+b| = |a| + |b|$$

از نامساوی مثلث در حل برخی از مسائل مربوط به نامساوی‌ها می‌توان استفاده نمود.

مثال ۴.۴.۱

با استفاده از نامساوی مثلث ثابت کنید کمترین مقدار تابع زیر برابر ۳ است.

$$f(x) = |x-۱| + |x+۲|$$

حل: می‌دانیم؛

$$|-a| = |a|$$

از طرفی؛

$$f(x) = |x-۱| + |x+۲| = |x-۱| + |-x-۲|$$

حال با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$|x-۱| + |-x-۲| \geq |(x-۱) + (-x-۲)| \geq ۳$$

پس حداقل مقدار تابع f برابر ۳ است.

مجدداً به رسم تابع $f(x)$ در صفحات قبل مراجعه کنید (نمودار گلدانی) و از طریق نمودار تابع درستی مطلب را مشاهده کنید.

■

مثال ۵.۴.۱

مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۳x-۱| + |۲x+۱| > ۵|x|$ کدام است؟

حل: با انتخاب $a = ۳x-۱, b = ۲x+۱$ داریم؛ $a+b = ۵x$ و چون

$$|a+b| < |a| + |b|$$

شده پس برای مجموعه‌ی جواب با توجه به نکته بالا باید $ab < ۰$ باشد که

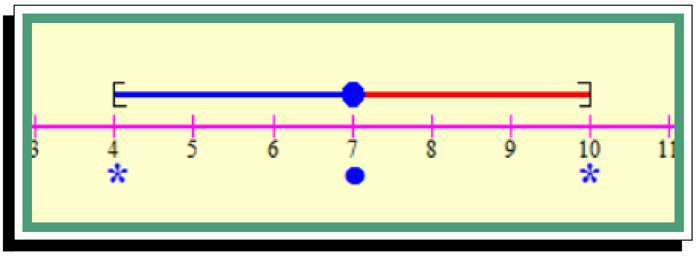
$$-\frac{۱}{۲} < x < \frac{۱}{۳}$$

است. ■

۱.۴.۱ معادلات قدرمطلقی

فعالیت ۹.۴.۱. فاصله چه نقاطی روی محور اعداد حقیقی از نقطه‌ی ثابت ۷ برابر ۳ است؟

حل: برای حل مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم.



اگر طول نقطه جواب مسئله را x بنامیم شرط مسئله به این معناست که $|x-۳|=۷$ با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق داریم؛ $x-۳=\pm۷$ و در نتیجه $x=۱۰$ و $x=-۴$ که هر دو جواب‌های معادله مورد قبول هستند. ■

توجه

جواب‌های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله‌ی $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ روی‌هم هستند.
به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند **معادلات قدر مطلقی** می‌گویند.

مثال ۴.۶.۱

معادله‌ی $|۳x-۲|=|x-۴|$

راه اول. حل: به کمک خواص قدر مطلق داریم؛

$$۳x-۲=\pm(x-۴)\hookrightarrow\begin{cases}۳x-۲=x-۴\hookrightarrow\boxed{x=-۱}\\ ۳x-۲=-x+۴\hookrightarrow\boxed{x=\frac{۳}{۲}}\end{cases}$$

■

راه دوم. حل: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت

$$۹x^۲-۱۲x+۴=x^۲-۸x+۱۶$$

و از آنجا $۲x^۲-x-۳=۰$ و جوابهای معادله $\boxed{x=\frac{۳}{۲}}$ و $\boxed{x=-۱}$ می‌باشند. ■

مثال ۴.۷.۱

معادله‌ی قدر مطلقی $|x-۱|=۴-۳x$ را حل کنید.

راه اول. حل: در این روش از تعیین علامت عبارت درون قدرمطلق استفاده می‌کنیم.

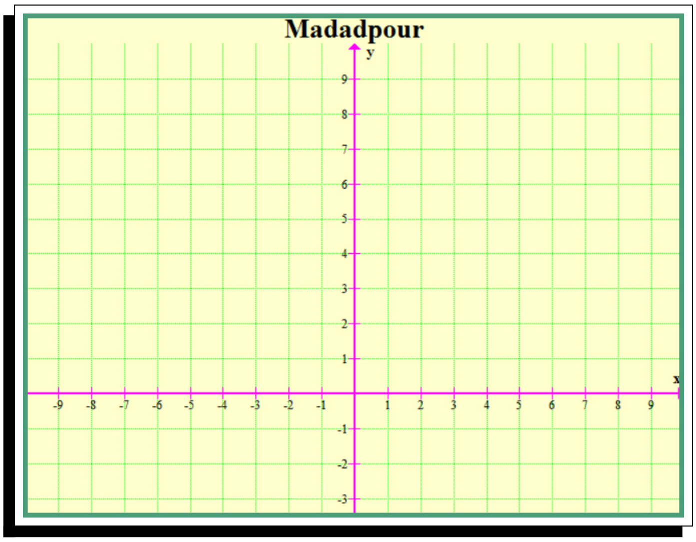
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

if $x < ۱$ then : $+(x-۱) = ۴ - ۳x \hookrightarrow \boxed{x = \frac{۵}{۴}}$ غ.ق.ق

if $x \geq ۱$ then : $-(x-۱) = ۴ - ۳x \hookrightarrow \boxed{x = \frac{۳}{۲}}$ ق.ق

■

راه دوم. حل: در این روش از رسم شکل استفاده می‌کنیم.(روش نمودار هندسی) به عهده‌ی شما



■ ✓

راه سوم. حل: با فرض مثبت یا صفر بودن سمت راست یعنی با فرض این‌که

$$۴ - ۳x \geq ۰ \hookrightarrow x \leq \frac{۴}{۳}$$

طرفین معادله را می‌توان به توان ۲ رساند که داریم؛(به عهده‌ی شما)

■ ✓

تست ۱.۴.۱. معادله‌ی $|x^۳+۸|+|x^۲-۴|+|x+۲|=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بی‌شمار

حل: واضح است که تنها جواب معادله $x=-۲$ است.زیرا جمع چند عدد مثبت (یا صفر) مساوی صفر شده و این زمانی امکان پذیر است که هر سه عبارت همزمان صفر باشند. پس داریم؛

$$|x^۳+۸|+|x^۲-۴|+|x+۲|=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} x^۳+۸=۰ \hookrightarrow \boxed{x=-۲} \\ x^۲-۴=۰ \hookrightarrow \boxed{x=\pm۲} \\ x+۲=۰ \hookrightarrow \boxed{x=-۲} \end{array}\right\} \hookrightarrow \boxed{x=-۲}$$

■

۲.۴.۱ نامعادلات قدر مطلق

به کمک فعالیت (۵.۴.۱) دیدیم که اگر a عددی حقیقی نامنفی باشد همواره داریم:

۱. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

۲. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a$

در حالت کلی‌تری برای عددی حقیقی و نامنفی a همواره داریم:

دستور ۹

فرمولهای بسیار مهم برای حل نامعادلات خاص به فرم روبرو

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a$$
$$x^۲ \leq a^۲ \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$x^۲ \geq a^۲ \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a$$

مثال ۴.۸.۱

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌هاي زیر را در صورت امکان به کمک بازه‌ها نمایش دهید.

حل:

$$۱)\ |x| \leq ۵ \Leftrightarrow -۵ \leq x \leq ۵ \hookrightarrow \text{مجموعه‌ی جواب} = [-۵, ۵]$$

$$۲)\ x^۲ \leq ۲۵ \Leftrightarrow -۵ \leq x \leq ۵ \hookrightarrow \text{مجموعه‌ی جواب} = [-۵, ۵]$$

$$۳)\ |-۲x+۳| - ۱ \leq ۵ \quad \Leftrightarrow |-۲x+۳| \leq ۶ \Leftrightarrow -۶ \leq -۲x+۳ \leq ۶$$

$$\xrightarrow{-۳} -۹ \leq -۲x \leq ۳ \xrightarrow{:(-۲)} \frac{۹}{۲} \geq x \geq -\frac{۳}{۲} \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} \left[-\frac{۳}{۲}, \frac{۹}{۲}\right]$$

$$۴)\left(\frac{۴x-۱}{۳}\right)^۲ \leq ۲ \Leftrightarrow -\sqrt{۲} \leq \frac{۴x-۱}{۳} \leq \sqrt{۲} \xrightarrow{\times ۳} -۳\sqrt{۲} \leq ۴x-۱ \leq ۳\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{+۱} ۱-۳\sqrt{۲} \leq ۴x \leq ۱+۳\sqrt{۲} \xrightarrow{\div ۴} \frac{۱-۳\sqrt{۲}}{۴} \leq x \leq \frac{۱+۳\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} \left[\frac{۱-۳\sqrt{۲}}{۴}, \frac{۱+۳\sqrt{۲}}{۴}\right]$$

■

مثال ۴.۹.۱

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌هاي زیر را در صورت امکان به کمک بازه‌ها نمایش دهید.

حل:

$$1)\ |x| \geq 3 \quad \Leftrightarrow x \geq 3 \cup x \leq -3 \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$2)\ |1+5x| - 3 > 1 \Leftrightarrow |1+5x| > 4 \hookrightarrow \begin{cases} 1+5x > 4 \hookrightarrow x > \dfrac{3}{5} \\ \cup \\ 1+5x < -4 \hookrightarrow x < -1 \end{cases} \cup$$

$$\xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

$$3)(x+1)^2 + 3 < 2 \hookrightarrow (x+1)^2 < -1 \hookrightarrow \text{that is false}$$

$$4)(2x+1)^2 < 0 \hookrightarrow \text{that is false}$$

$$5)(2x+1)^2 > 0 \hookrightarrow 2x+1 > 0 \cup 2x+1 < 0 \hookrightarrow$$

$$x > -\frac{1}{2} \cup x < -\frac{1}{2} \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \ or\ \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

$$6)(-x+8)^2 \leq 0 \hookrightarrow -x+8 = 0 \hookrightarrow x = 8$$

■

تذکر ۱.۴.۱. *توجه کنید که برای حل نامعادلات شامل قدر مطلق همواره فرمولهای قبل جوابگو نمی‌باشند بلکه در واقع راه حل کلی به کمک تعیین علامت می‌باشد. به مثال زیر توجه کنید.*

مثال ۴.۱۰.۱

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x-1| + |2x+4| > 3x$ کدام است؟

حل:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	

به کمک جدول تعیین علامت بالا داریم؛

$$\text{if } : x < -۲ \hookrightarrow -(x-۱)-(۲x+۴) > ۳x \hookrightarrow x < -\frac{۱}{۲} \hookrightarrow$$

$$(x < -۲) \cap \left(x < -\frac{۱}{۲}\right) = \boxed{x < -۲} \hookrightarrow (۱)$$

$$\text{if } : -۲ \leq x \leq ۱ \hookrightarrow -(x-۱)+(۲x+۴) > ۳x \hookrightarrow x < \frac{۵}{۲} \hookrightarrow$$

$$(-۲ \leq x \leq ۱) \cap \left(x < \frac{۵}{۲}\right) = \boxed{-۲ \leq x \leq ۱} \hookrightarrow (۲)$$

$$\text{if } : x > ۱ \hookrightarrow (x-۱)+(۲x+۴) > ۳x \hookrightarrow ۳ > ۰ \hookrightarrow x \in \mathbb{R} \hookrightarrow$$

$$(x > ۱) \cap (\mathbb{R}) = \boxed{x > ۱} \hookrightarrow (۳)$$

$$\text{finally} \hookrightarrow (۱) \cup (۲) \cup (۳) = \boxed{x < -۲ \cup -۲ \leq x \leq ۱ \cup (x > ۱)} = \mathbb{R}$$

■

توجه

در یک نامعادله هرگاه طرفین مثبت باشند می‌توان با به توان دو رساندن طرفین مجموعه‌ی جواب را به دست آورد.

تست ۱.۴.۲. مجموعه‌ي جواب نامعادله‌ي $|۸-۲x| \geq |۴x|$ کدام است؟

۱) $x \leq \frac{۴}{۳}$ ۲) $x \geq ۴$ ۳) $\frac{۴}{۳} \leq x \leq ۴$ ۴) $-۴ \leq x \leq \frac{۴}{۳}$

حل:

$$|۸-۲x| \geq |۴x|$$

$$۶۴-۳۲x+۴x^۲ \geq ۱۶x^۲$$

$$۱۲x^۲+۳۲x-۶۴ \leq ۰ \to ۳x^۲+۸x-۱۶ \leq ۰$$

$$x_۱ = -۴, x_۲ = \frac{۴}{۳} \xleftrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{به کمک}} -۴ \leq x \leq \frac{۴}{۳}$$

■

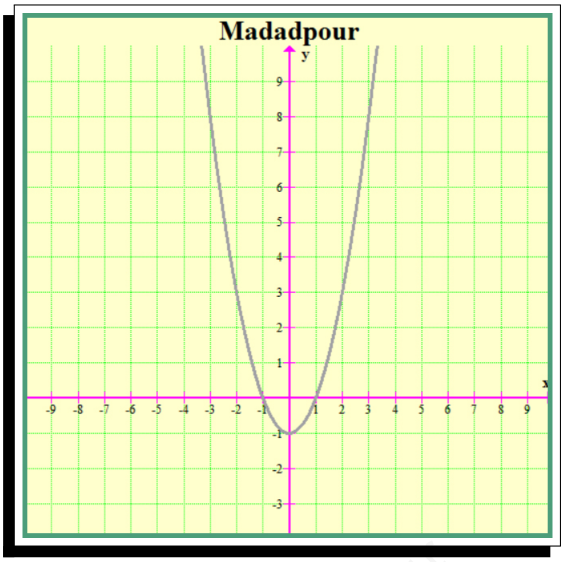
توجه

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی‌است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xها تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

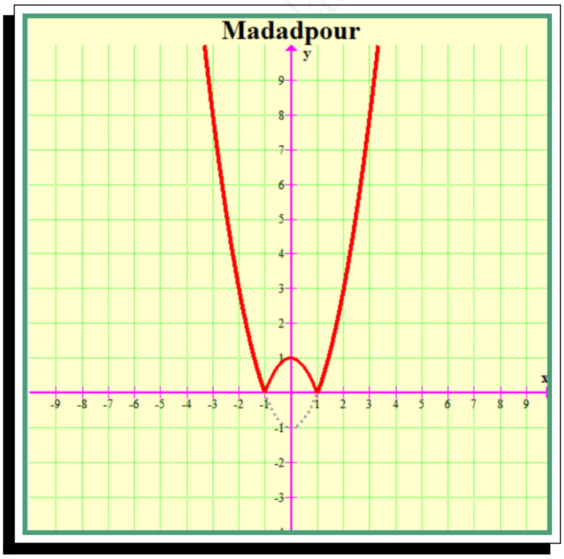
مثال ۴.۱۱.۱

نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $y = x^۲ - ۱$ را رسم می‌کنیم.



سپس به کمک توضیحات بالا نمودار $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را رسم می‌کنیم.

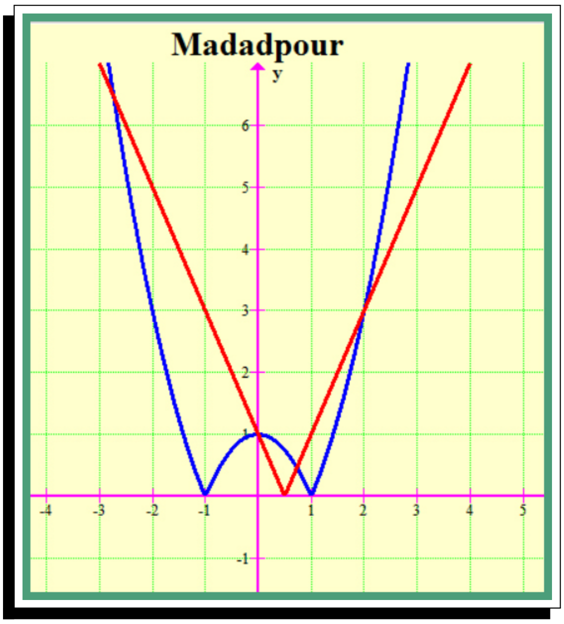


■

مثال ۴.۱۲.۱

به کمک رسم نمودار تعداد جوابها را بیابید و همچنین به کمک روش جبری معادله‌ی $|x^۲ - ۱| = |۲x - ۱|$ را حل کنید. آیا در روش هندسی می‌توانیم مقدار دقیق ریشه‌ها را بیابیم؟

راه هندسی. حل: کافی است هر دو نمودار را روی یک صفحه‌ی مختصات رسم کنیم.



واضح است که سه جواب داریم. $\boxed{x=0}$ و $\boxed{x=2}$ و جواب دیگر به طور تقریبی $\boxed{x\simeq -2/7}$ می‌باشد. ■

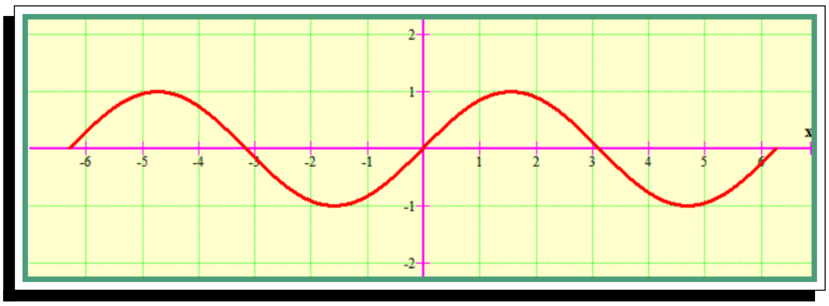
حل: راه جبری.

$$|x^2-1|=|2x-1|$$

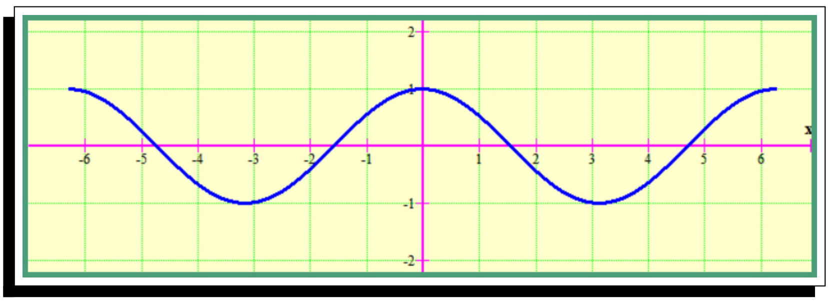
$$x^2-1=\pm(2x-1)\hookrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-1=+(2x-1)\hookrightarrow x^2-2x=0\hookrightarrow \boxed{x=0},\ \boxed{x=2} \\ \text{یا} \\ x^2-1=-(2x-1)\hookrightarrow x^2+2x-2=0\hookrightarrow \begin{cases} \boxed{x=-1-\sqrt{3}}\ \text{ق.ق} \\ \boxed{x=-1+\sqrt{3}}\ \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{cases}$$

تذکر ۲.۴.۱. در مثلثات می‌بینیم که نمودار تابع $y=\sin(x)$ در بازه‌ی $[-2\pi,2\pi]$ به صورت زیر است. ■



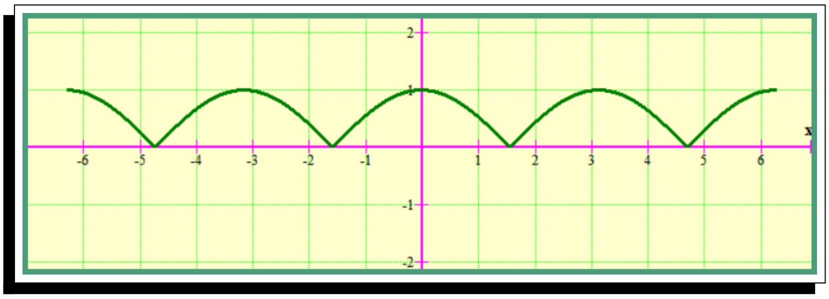
و همچنین نمودار تابع $y=\cos(x)$ در بازه‌ی $[-2\pi,2\pi]$ به صورت زیر است.



مثال ۴.۱۳.۱

به کمک تذکر (۲.۴.۱) نمودار تابع $y=|cos(x)|$ را رسم کنید.

حل:



■

دستور ۱۰

اگر $a, c \neq ۰$ **و**

$$y=|ax+b|+|cx+d|$$

$$y \geq \left\{f\left(-\frac{b}{a}\right), f\left(-\frac{d}{c}\right)\right\}$$

تمرین ۲.۴.۱. برد تابع $f(x)=|x-۱|+|۱-۳x|$ کدام است؟

حل:

$$y=|x-۱|+|۱-۳x|$$

$$\min f(x)=\min\left\{f(۱), f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right\}=\min\left\{۲, \frac{۲}{۳}\right\}=\frac{۲}{۳}$$

$$R_f=\left[\frac{۲}{۳}, +\infty\right)$$

■

چند تست و تمرین برای بخش ۴.۱

تمرین ۳.۴.۱. مجموعه‌ی جواب نامعادله‌هاي زیر را در صورت امکان به کمك بازه‌ها نمایش دهید.

۱. $|۱ - ۲x| < ۲$

۲. $|۱ - ۳x| > |x + ۱|$

۳. $|۲x - ۱| < |۳ - ۴x|$

۴. $|x + ۲| + ۱ > ۳$

۵. $|x - ۱| + |x| < ۳x + ۱$

۶. $|x - ۱| + ۲x - ۳ < ۵x$

حل: به عهده‌ی شما

.

تمرین ۴.۴.۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱. $y = |x - ۲| - |x + ۳|$

۲. $y = |x + ۱| + |x - ۳|$

۳. $y = |۲x + ۳| - |x - ۳|$

۴. $y = \left|x^۲ - ۳\right|$

۵. $y = ||x| - ۳|$

۶. $y = |\sin(x)|$

حل: به عهده‌ی شما

.

تمرین ۵.۴.۱. با استفاده از تعیین علامت، ضابطه‌ی هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

۱. $y = x|x|$
۲. $y = |x^{۲} - ۱|$
۳. $y = |x - ۱| + |x + ۱|$

حل: به عهده‌ی شما
.

✓ ■

تست ۳.۴.۱. معادله‌ي $|x^{۲} - ۱| = x^{۳}$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۶.۴.۱. به کمک نامساوی مثلث در قدر مطلق ثابت کنید معادله‌ی زیر جواب ندارد.

$$|۲x - ۳| + |۲x + ۱| = ۳/۸$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۷.۴.۱. نمودار هر تابع $y = x - \frac{x}{|x|}$ را رسم کنید سپس به ازای $y = ۳$ معادله‌ی به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱.۴.۸. مساحت محدود بین منحنی نمودار تابع $f(x) = |x-2| + |x-1|$ و خط $y = x$ چه‌قدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱.۴.۹. ابتدا نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله‌ی $f(x) = 1$ را به روش هندسی و جبری حل نمایید.

حل: به عهده‌ی شما
.

✓ ■

تست ۴.۴.۱. معادله‌ي $\sqrt{x^5+x^3-4x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$ چند ریشه دارد؟

۱) 0 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تست ۵.۴.۱. ساده شده‌ی عبارت $2|x+1|+|x|+|x-1|-3$ را با توجه به اینکه $0<x\leq 1$ است کدام گزینه می‌باشد.

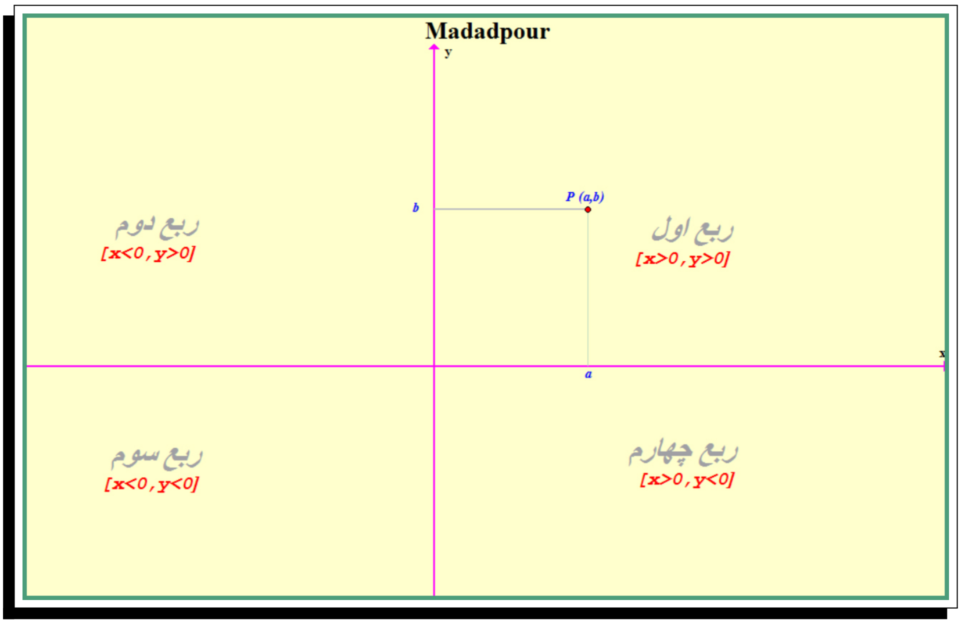
۱) $2x-2$ ۲) $2x$ ۳) $3x$ ۴) $x-1$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

۵.۱ مختصات

در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شدید یک دستگاه مختصات دکارتی شامل دو محور عمود بر هم از اعداد حقیقی است که محورهای مختصات نامیده می‌شود و در مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند. محور افقی را محور xها (طول‌ها) و محور عمودی را محور yها (عرض‌ها) می‌نامند. این محورهای مختصات صفحه مختصات (یا صفحه‌ی xy) را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود و نقاط **روی محورها** در هیچ ربعی نیستند.
برای هر نقطه‌ی P یک زوج مرتب یا دوتایی مرتب (a,b) وجود دارد که مختصات نقطه‌ی P نامیده می‌شود. a مختص x یا طول و b مختص y یا عرض نامیده می‌شود.

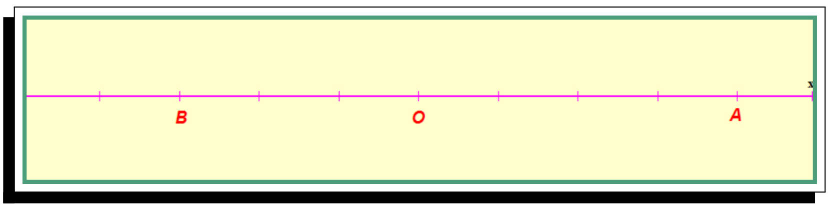


در این بخش با برخی از نکات در رابطه با مختصات نقاط در صفحه آشنا می‌شویم.

۱.۵.۱ فاصله بین دو نقطه

فعالیت ۱.۵.۱. روی محور اعداد مبدأ را با O و نقطه‌ی متناظر ۴ را با A و نقطه‌ی متناظر -۳ را با B مشخص کرده‌ایم.

آ. طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟



حل:

✓ ■

ب. طول پاره‌خط AB چقدر است؟

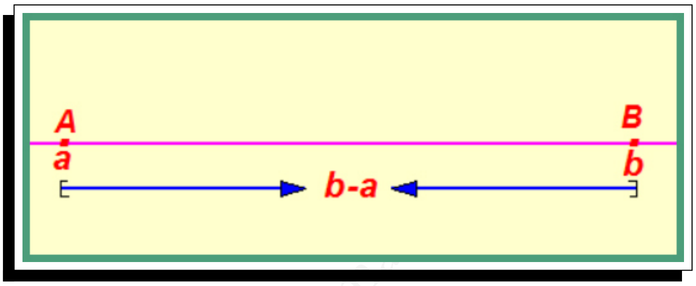
حل:

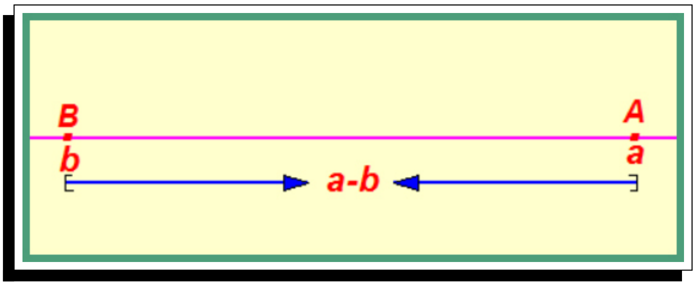
✓ ■

ج. فاصله دو نقطه‌ی A و B متناظر با ۴ و ۳− از یکدیگر قدر است؟ حل:

✓ ■

د. با توجه به محورهای زیر در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟





حل:

✓ ■

تعریف ۱.۱. اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\boxed{AB = |x_B - x_A|}$$

دستور ۱۱

فرمول محاسبه‌ی طول پاره‌خط روی محور اعداد حقیقی

$$\boxed{AB = |x_B - x_A|}$$

مثال ۵.۱.۱

نقاط M و N به ترتیب به طول‌های ۴− و ۵ سانتی‌متر روی محور اعداد حقیقی مفروضند. طول پاره‌خط MN را بیابید.

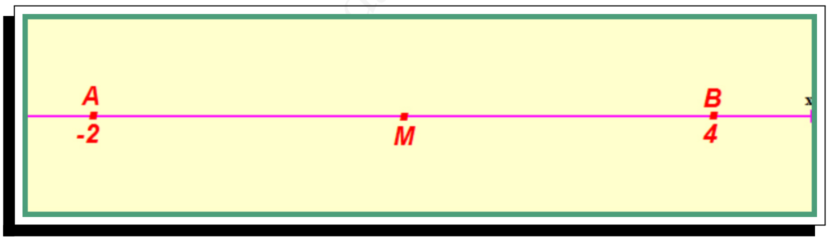
حل: بنا به فرمول قبل داریم:

$$MN = |x_M - x_N| = |-۴ - ۵| = ۹\,\mathrm{cm}$$

■

۲.۵.۱ مختصات نقطه وسط یک پاره خط

فعالیت ۱.۲.۵.۱. آ. در شکل زیر نقطه‌ی M وسط پاره خط AB است. طول نقطه‌ی M چقدر است؟



حل:

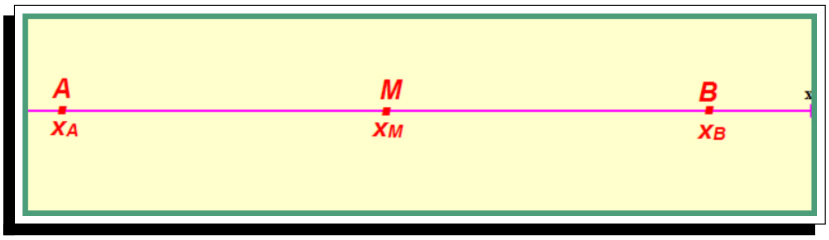
✓ ■

ب. چه ارتباطی بین طول نقطه‌ی M و طول نقاط A و B مشاهده می‌کنید؟

حل:

✓ ■

ج. اگر A و B دو نقطه‌ی دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، طول نقطه‌ی M را برحسب طول‌های نقاط A و B به‌دست آورید.



حل:

$$AM = MB \xrightarrow{\text{بنا به تعریف}} x_M - x_A = \cdots$$

✓ ■

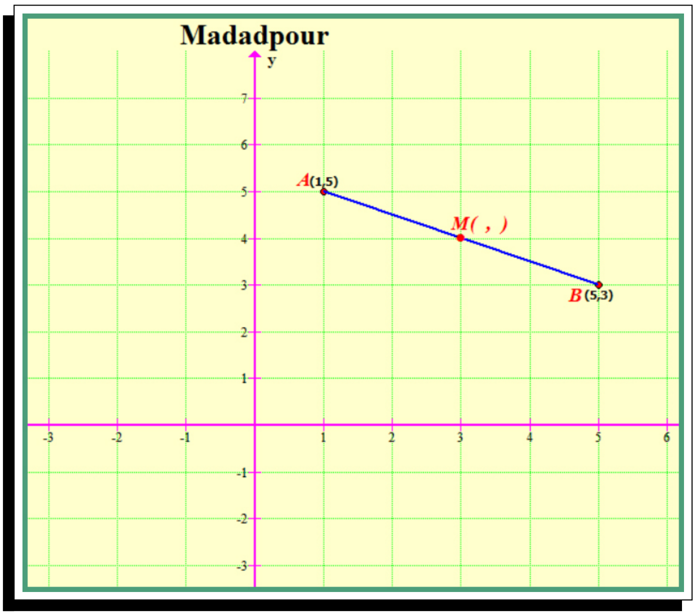
د. اگر A و B دو نقطه‌ی دلخواه روی محور yها و عرض نقاط A و A را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره‌خط AM باشد، چه دستوری برای محاسبه‌ی عرض نقطه‌ی M می‌توان بیان کرد؟

حل:

✓ ■

فعالیت ۳.۵.۱. اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره خط AB و $M(a,b)$ وسط پاره‌خط AB باشد:

آ. تصویر نقاط M و A و B را روی محور مختصات مشخص کنید.



ب. با توجه به تصویر نقاط M و A و B روی محورها، مختصات نقطه‌ی M را به دست آورید.
حل:

✓ ■

به طور کلی اگر $M(x_M, y_M)$ و $A(x_۱, y_۱)$ باشد و $B(x_۲, y_۲)$ وسط پاره‌خط AB باشد همواره داریم:

دستور ۱۲

مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط در دستگاه دکارتی

$$x_M = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}\ ,\ y_M = \frac{y_۱ + y_۲}{۲}$$

مثال ۵.۲.۱

هرگاه $A(۳, ۴)$ و $B(-۱, ۴)$ و $C(۵, ۰)$ مختصات سه رأس یک مثلث باشند معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع AC از این مثلث را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم میانه‌ی وارد بر هر ضلع مثلث پاره‌خطی است که از وسط آن ضلع به رأس مقابل وصل می‌شود. فرض کنید نقطه‌ی K وسط پاره‌خط AC باشد. ابتدا به کمک فرمول قبل مختصات K را به‌دست می‌آوریم.

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{۳ + ۵}{۲} = ۴$$

$$y_K = \frac{y_A + y_C}{۲} = \frac{۴ + ۰}{۲} = ۲$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین}} K(۴, ۲)$$

$$m_{BK} = \frac{y_K - y_B}{x_K - x_B} = \frac{۲ - ۴}{۴ - (-۱)} = -\frac{۲}{۵}$$

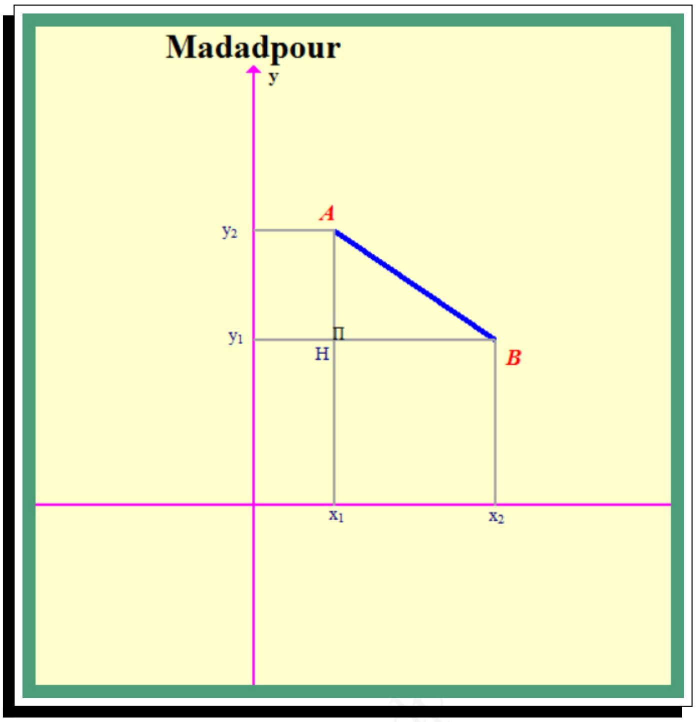
$$y - y_B = m_{BM}(x - x_B)$$

$$y - ۴ = -\frac{۲}{۵}(x + ۱) \hookrightarrow \boxed{y = -\frac{۲}{۵}x + \frac{۱۸}{۵}}$$

■

۳.۵.۱ طول یک پاره‌خط در دستگاه دکارتی

فعالیت ۴.۵.۱. در این فعالیت طریقه‌ی پیدا کردن طول یک پاره‌خط را به‌دست می‌آوریم.



اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ دو نقطه دلخواه در صفحه‌ی مختصات باشند، با توجه به شکل زیر طول AB را محاسبه کنید.

$$(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲$$

$$(AB)^۲ = (y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲$$

$$AB = \pm\sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

دستور ۱۳

فرمول پیدا کردن طول یک پاره‌خط در دستگاه دکارتی

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

مثال ۵.۳.۱

با توجه به داده‌های مثال (۲.۵.۱) طول میانه‌ی BK را بیابید.

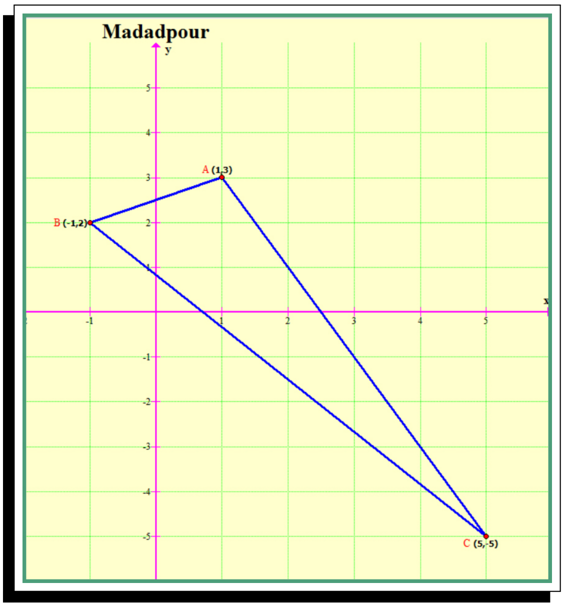
حل:

$$BK = \sqrt{(x_K - x_B)^۲ + (y_K - y_B)^۲} = \sqrt{(۴ + ۱)^۲ + (۲ - ۴)^۲} = \sqrt{۲۹}$$

تمرین ۱.۵.۱. سه نقطه‌ی $A(۱, ۳)$ و $B(-۱, ۲)$ و $C(۵, -۵)$ سه رأس مثلث ABC هستند.

آ. مثلث ABC را رسم کنید.

حل:



■

ب. طول اضلاع مثلث ABC را به دست آورید.

حل:

✓ ■

ج. نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

حل:

✓ ■

د. محیط مثلث ABC را به‌دست آورید.
حل:

✓ ■

ه. شیب دو خط AC و AB را به دست آورید. چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟
حل:

✓ ■

مثال ۵.۴.۱

معادله‌ی خط عمودمنصف پاره خطی که نقاط $A(۷,-۸)$ و $A(-۲,۵)$ را به هم وصل می‌کند را بیابید.

حل: عمودمنصف یک پاره خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA = PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد.اگر فرض کنیم نقطه‌ی $P(x,y)$ باشد آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره‌خط می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x-۷)^۲+(y+۸)^۲}=\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۵)^۲}$$

با به‌توان دو رساندن و ساده کردن معادله‌ی فوق داریم:

$$۹x-۱۳y=۲۴ \xrightarrow[\text{مرتب می‌کنیم}]{\text{بر حسب } y} \boxed{y=\frac{۹}{۱۳}x+\frac{۲۴}{۱۳}}$$

این معادله برای تمام نقاط هم فاصله از A و B برقرار است بنابراین، معادله‌ی عمودمنصف AB است. ■

تذکر ۱.۵.۱. *در مثال (۳.۵.۱) شیب خط AB برابر $\frac{-۱۳}{۹}$ و شیب خط عمود منصف آن برابر $\frac{۹}{۱۳}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟*

توجه

همان‌طور که در مثال (۳.۵.۱) و قسمت (ه) از تمرین (۱.۵.۱) مشاهده کردید می‌توان نتیجه گرفت:
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $\boxed{m.m' = -۱}$ یعنی؛ شیبهای آنها **قرینه و معکوس** یکدیگرند.

تمرین ۲.۵.۱. به دو روش نشان دهید نقطه‌ی $K(-۱۲, ۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $M(۰, -۳)$ و $M(۶, ۱۵)$ قرار دارد.

راه اول. **حل:** به عهده‌ی شما

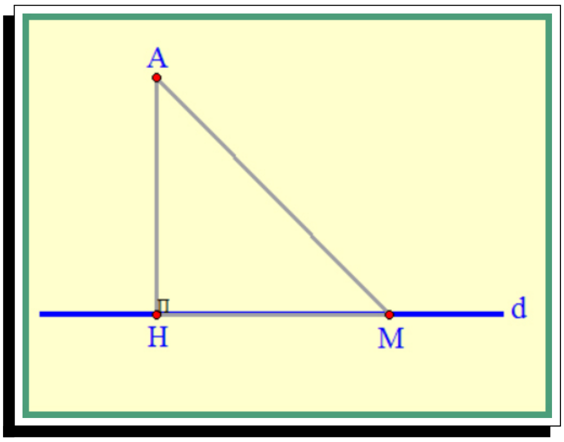
✓ ■

راه دوم. **حل:** به عهده‌ی شما

✓ ■

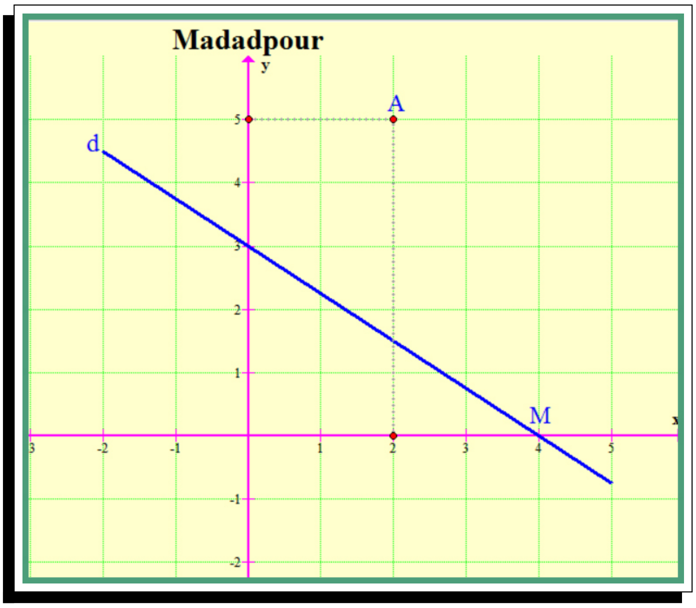
۴.۵.۱ فاصله‌ی یک نقطه از یک خط

اگر خط d و نقطه‌ی A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه‌ی A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله‌ی A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم.



بنابراین برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمود رسم کرده و طول پاره‌خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت ۱.۵.۵. خط $d: ۳x + ۴y = ۱۲$ و نقطه‌ی $A(۲,۵)$ در شکل زیر داده شده است.



آ. عمود AH را رسم کنید.

ب. شیب خط d و خط گذرنده از AH چه ارتباطی با هم دارند؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. شیب AH را به‌دست آورده و معادله‌ی خط گذرنده از AH را بنویسید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

د. دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه‌یH) را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ه. طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

توجه

به طورکلی اگر بخواهیم فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط

$$ax + by + c = \circ$$

را به دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت طول عمود AH برابر است با:

$$\boxed{AH = d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}}$$

که در آن علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.

این فرمول را می‌توان در حالت کلی نیز مطابق (۴.۵.۱) اثبات کرد.[۲]

دستور ۱۴

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط $ax + by + c = \circ$	$AH = d = \dfrac{\|ax_\circ + by_\circ + c\|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

مثال ۵.۵.۱

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۲, -۳)$ را از خط $۳y = ۲ - ۴x$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادله‌ی خط را به صورت استاندارد خواسته شده در فرمول و مطابق زیر تبدیل می‌کنیم.

$$۴x + ۳y - ۲ = \circ$$

حال به کمک فرمول قبل داریم:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۴(۲) + ۳(-۳) - ۲|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{-۳}{۵}$$

■

مثال ۵.۶.۱

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱, -۴)$ از خط $۸x + ۶y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

حل: ابتدا معادله‌ی خط را به صورت $۸x + ۶y - k = \circ$ می‌نویسیم. مطابق فرمول فاصله‌ی نقطه از خط داریم:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۸(۱) + ۶(-۴) - k|}{\sqrt{۸^۲ + ۶^۲}} = \frac{|-۱۶ - k|}{۱۰} = ۴$$

[۲] از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند به اثبات آن بپردازند.

$$\xrightarrow[|x|=|-x|]{\text{می‌دانیم}} |k+۱۶| = ۴۰$$

$$\text{if} \quad k+۱۶ = ۴۰ \hookrightarrow \boxed{k = ۲۴}$$

$$\text{if} \quad k+۱۶ = -۴۰ \hookrightarrow \boxed{k = -۵۶}$$

■

تمرین ۳.۵.۱. داشتن دو جواب برای $k = ۲۴, k = -۵۶$ و در نتیجه دو خط $۸x + ۶y + ۵۶ = ۰, ۸x + ۶y - ۲۴ = ۰$ را در مثال قبل از نظر هندسی توجیه کنید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۴.۵.۱. فاصله‌ی مبدأ مختصات را از خط به معادله‌ی $ax + by + c = ۰$ را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

دستور ۱۵

فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط

$$ax + by + c = ۰$$

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

مثال ۵.۷.۱

فاصله‌ی مبدأ مختصات را از خط به معادله‌ی $۳x = -y + ۵$ را بیابید.

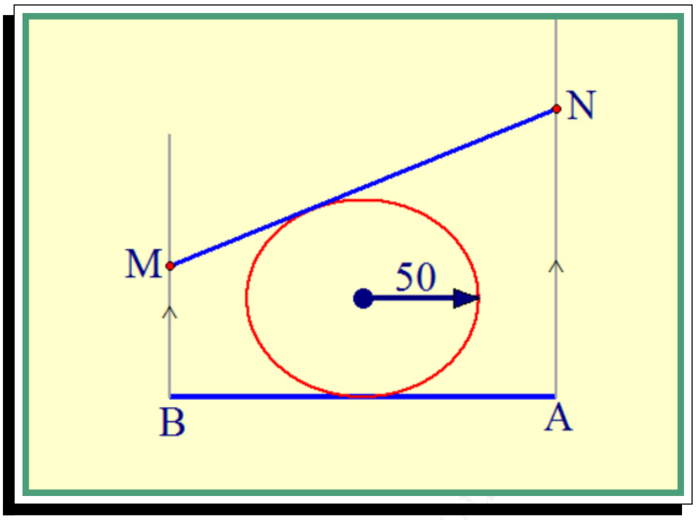
حل:

$$d = \frac{|-۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

■

مثال ۵.۸.۱

دو نفر در نقاط A و B مطابق شکل زیر ابتدای دو جاده‌ی موازی با هم ایستاده اند فاصله‌ی A و B برابر ۲۰۰ متر و خط AB بر دو جاده عمود است. ساختمانی دایره‌ای شکل در بالای خط AB و مماس بر آن و در فاصله‌ی مساوی از دو جاده قرار دارد. شعاع نمای این دایره ۵۰ متر است. این دو نفر با سرعت‌های ۳ و ۱ متر بر ثانیه شروع به حرکت به سمت شمال می‌کنند. پس از چند ثانیه آنها می‌توانند مجدداً یکدیگر را ببینند؟



حل: نقطه‌ی B را را مبدأ مختصات و BA را محور xها در نظر می‌گیریم. در زمان t شخص B در نقطه‌ی $M(۰,t)$ و شخص A در نقطه‌ی $N(۲۰۰,۳t)$ قرار دارند. معادله‌ی خط گذرنده از موقعیت A و B در زمان t (خط گذرنده از M و N) را می‌نویسیم.

$$y-y_۰=m(x-x_۰)$$

$$y-t=\frac{۳t-t}{۲۰۰}(x-۰)$$

$$tx-۱۰۰y+۱۰۰t=۰$$

زمانی که مجدداً A و B یکدیگر را می‌بینند پاره‌خط MN بر دایره مماس می‌شود. در نتیجه فاصله‌ی مرکز دایره $O(۱۰۰,۵۰)$ تا خط مماس برابر ۵۰ متر می‌شود. داریم: O

$$\text{فاصله‌ی O تا MN}=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱۰۰t-۱۰۰(۵۰)+۱۰۰t|}{\sqrt{t^۲+۱۰۰^۲}}=۵۰$$

$$\frac{|۴t-۱۰۰|}{\sqrt{t^۲+۱۰۰^۲}}=۱\hookrightarrow(۴t-۱۰۰)^۲=t^۲+۱۰۰^۲\hookrightarrow۱۵t^۲=۸۰۰t$$

$$t=۰\ \text{غ.ق.ق}\quad,\quad\boxed{t=\frac{۱۶۰}{۳}}$$

بنابراین بعد از $\frac{۱۶۰}{۳}$ ثانیه A و B یکدیگر را مجدداً خواهند دید. ■

چند تست و تمرین برای بخش ۵.۱

تمرین ۵.۵.۱. درصورتی‌که $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادله‌ی یک ضلع آن به صورت $۲x - ۵y = ۳$ باشد، مساحت این مربع چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۶.۵.۱. خطوط $۳x + ۲y = ۱$ و $۲x - ۳y = ۲$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(۲,۳)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۷.۵.۱. مثلث ABC با رأس‌های $A(-۱,۷)$ و $B(-۶,-۲)$ و $C(۳,۲)$ را در نظر بگیرید.

آ. مثلث را رسم کنید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. نشان دهید مثلث ABC متساوی الساقین است.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. معادله‌ی عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

د. طول و معادله‌ی ارتفاع AH را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ه. طول و معادله‌ی میانه‌ی AM را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

و. معادله‌ی عمودمنصف وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ز. آیا این مثلث می‌تواند قائم‌الزاویه هم باشد؟چرا؟
حل: به عهده‌ی شما

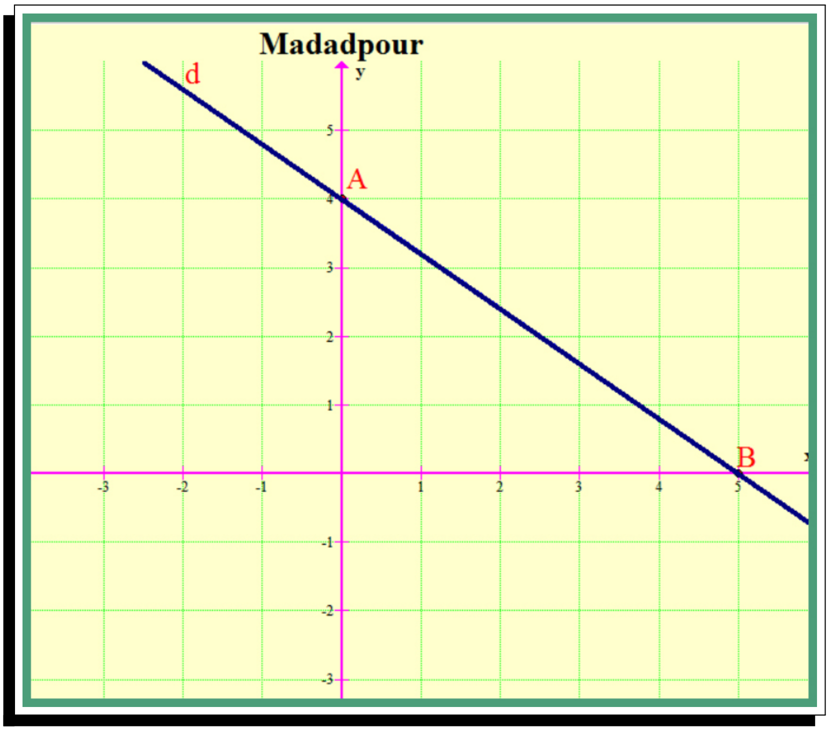
✓ ■

تمرین ۱.۵.۸. نقاط $A(۰,۶)$ و $B(۸,-۸)$ نقاط انتهای قطر یک دایره می‌باشند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۹.۵.۱. در شکل صفحه‌ی بعد خط d محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کرده است.



آ. طول پاره خط AB را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

ب. فاصله مبدأ مختصات از خط AB را به دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۰.۵.۱. ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

دستور ۱۶

فرمول فاصله‌ی دو خط موازی	$d=\dfrac{\vert c-c'\vert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرین ۱۱.۵.۱. خط $4x+3y=5$ بر دایره‌ی C به مرکز $O(-1,2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۱۲.۵.۱. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲)$ از خط $ax + ۴y = ۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۱۳.۵.۱. سه رأس مثلث ABC نقاط $A(-۱۰,-۱۳)$ و $B(-۳,۳)$ و $C(۳,۱)$ هستند.

آ. طول عمودی که از رأس B بر میانه‌ی نظیر رأس C وارد می شود را به دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

ب. مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

دستور ۱۷

رابطه‌ی بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$
$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

تمرین ۱۴.۵.۱. اگر M مرکز ثقل(محل برخورد میانه‌ها) در مثلث ABC با مختصات رئوس $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ باشد، ثابت کنید:

$$x_M = \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳}{۳}$$
$$y_M = \frac{y_۱ + y_۲ + y_۳}{۳}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

دستور ۱۸

فرمول بدست آوردن مختصات مرکز ثقل مثلث ABC

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

تمرین ۱.۵.۱۵. نشان دهید یک چهارضلعی با رئوس $A(۲,۷)$ و $B(۱,۰)$ و $C(۸,-۳)$ و $D(۵,-۱)$ یک مربع است.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

نکته‌ی ۵.۱.۱

شرط عمود بودن دو خط $y = mx + h\,,\ y = m'x + h'$ این‌است که:

$$\boxed{mm' = -۱}$$

و نیز شرط موازی بودن دو خط $y = mx + h\,,\ y = m'x + h'$ خط این‌است که:

$$\boxed{m = m'}$$

تست ۱.۵.۱. به ازاء چه مقدار m دو خط $y - mx + ۲ = ۰$ و $y = ۲x + ۱$ بر هم عمودند؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

حل:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx - ۲ \\ y &= ۲x + ۱ \end{aligned}\right\} \hookrightarrow ۲m = -۱ \hookrightarrow m = -\frac{۱}{۲}$$

■

نکته‌ی ۵.۲.۱

بحث در وجود جواب دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ و بررسی اوضاع نسبی دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$

۱. اگر $\boxed{\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}}$ باشد دو خط $ax+by=c\,,\, a'x+b'y=c'$ متقاطع هستند و دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد(یکتا) دارد.

۲. اگر $\boxed{\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}}$ باشد دو خط $ax+by=c\,,\, a'x+b'y=c'$ موازی هستند و دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ جواب ندارد.

۳. اگر $\boxed{\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}}$ باشد دو خط $ax+by=c\,,\, a'x+b'y=c'$ منطبق هستند و دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد.

تست ۲.۵.۱. به ازاء چه مقدار m خط $۲x+۵my=۴$ و خط زیر بر هم منطبق‌اند؟

$$mx+۲\left(m^۲+۱\right)y=۳m+۲$$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

حل:

$$\begin{cases} ۲x+۵my=۴ \\ mx+۲\left(m^۲+۱\right)y=۳m+۲ \end{cases} \hookrightarrow \frac{۲}{m} = \frac{۵m}{۲\left(m^۲+۱\right)} = \frac{۴}{۳m+۲} \hookrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{۲}{m} = \dfrac{۵m}{۲\left(m^۲+۱\right)} \hookrightarrow ۴m^۲+۴=۵m^۲ \hookrightarrow m=\pm۲ \\ \dfrac{۲}{m} = \dfrac{۴}{۳m+۲} \hookrightarrow ۶m+۴=۴m \hookrightarrow m=-۲ \end{cases} \hookrightarrow \boxed{m=-۲}$$

■

تست ۳.۵.۱. معادله‌ي خطي که از نقطه‌ي تلاقي دو خط $y=۲x+۳, y=x+۲$ گذشته و بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد کدام است؟

۱) $y=x+۱$ ۲) $y=x$ ۳) $y=-x+۱$ ۴) $y=-x$

حل:

$$\begin{cases} y=۲x+۳ \\ y=x+۲ \end{cases} \hookrightarrow ۲x+۳=x+۲ \hookrightarrow x=-۱, y=۱ \hookrightarrow A\left(-۱,۱\right)$$

$$y=x \hookrightarrow m=۱ \hookrightarrow m'=-۱ \hookrightarrow y-y_۱=m'\left(x-x_۱\right) \hookrightarrow$$

$$y-۱=-۱\left(x+۱\right) \hookrightarrow \boxed{y=-x}$$

■

نکته‌ی ۵.۳.۱

معادلهٔ خطي که از دو خط $\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ ax+by+c'=۰ \end{cases}$ به‌یك فاصله باشد به صورت زیر است.

$$ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$$

تست ۴.۵.۱. معادلهٔ خطي که از دو خط $۶x+۴y+۱۴=۰$, $۳x+۲y-۵=۰$ به‌یك فاصله باشد کدام است؟

۱) $۳x+۲y-۱=۰$ ۲) $۳x+۲y+۱=۰$ ۳) $۲x+۳y+۱=۰$ ۴) $۲x+۳y-۱=۰$

حل:

$$\begin{cases} ۳x+۲y-۵=۰ \hookrightarrow ۶x+۴y-۱۰=۰ \\ ۶x+۴y+۱۴=۰ \hookrightarrow ۶x+۴y+۱۴=۰ \end{cases}$$

$$۶x+۴y+\frac{۱۴-۱۰}{۲}=۰ \hookrightarrow \boxed{۳x+۲y+۱=۰}$$

■

تست ۵.۵.۱. معادلهٔ دو ضلع مقابل یك مربع به صورت $۳x-۶y-۲=۰$ و $x-۲y+۲=۰$ است مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{۵۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۶۲}{۴۵}$ ۳) $\frac{۶۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۶۴}{۴۵}$

حل:

$$\begin{cases} ۳x-۶y-۲=۰ \\ ۳x-۶y+۶=۰ \end{cases} \hookrightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۲-۶|}{\sqrt{۹+۳۶}}=\frac{۸}{\sqrt{۴۵}}$$

$$\hookrightarrow s=d^۲=\frac{۶۴}{۴۵}$$

■

تست ۶.۵.۱. اوضاع نسبي دستگاه زیر را بررسی کنید.

$$\begin{cases} x+۵y=۶ \\ ۲x-y=۱ \\ ۲x+۳y=۵ \end{cases}$$

۱) دو جواب دارد ۲) بی‌شمار جواب دارد
۳) جواب ندارد ۴) فقط یک جواب دارد.

حل: فقط یک جواب دارد.(سه خط همرسند)

$$\begin{cases} x+۵y=۶ \\ ۲x-y=۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲x+۱۰y=۱۲ \\ -۲x+y=-۱ \end{cases} \rightarrow y=۱, x=۱$$

$$۲x+۳y=۵ \rightarrow ۲(۱)+۳(۱)=۵ \rightarrow ۵=۵$$

■

تست ۷.۵.۱. نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC با رئوس $C\left|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}۵\\۱\end{matrix}\right.$, $A\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$ کدام است؟

۱) $(۱,۰)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(۱,۱)$

حل: می‌دانیم سه ارتفاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند(در یک نقطه همرسند). این سه رأس ،رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. پس سه ارتفاع آن از رأس قائمه یعنی $(۱,۱)$ می‌گذرند. ■

نکته‌ی ۵.۴.۱

شرط هم استقامت بودن (روی یک خط راست بودن)سه نقطه‌ی A و B و C این است که:

$$\boxed{m_{AB}=m_{BC}}$$

تست ۸.۵.۱. در صورتي كه $A(۱,۲)$ و $B(۳,۳)$ و $C(a,۱)$ بر يك استقامت باشند a كدام‌است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

حل:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{۳-۲}{۳-۱}=\dfrac{۱}{۲} \\ m_{BC}=\dfrac{۱-۳}{a-۳}=\dfrac{-۲}{a-۳}\end{array}\right\}\dfrac{-۲}{a-۳}=\dfrac{۱}{۲}\hookrightarrow a-۳=-۴\hookrightarrow \boxed{a=-۱}$$

■

تست ۹.۵.۱. اگر خطوط به معادلات $x+y=۲$, $۲x-y=۱$, $x-my=-۱$ از يك نقطه بگذرند m كداد است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

حل:

$$\begin{cases} ۲x-y=۱ \\ x+y=۲\end{cases}\hookrightarrow\begin{cases} ۳x=۳\hookrightarrow x=۱ \\ ۱+y=۲\hookrightarrow y=۱\end{cases}$$
$$x-my=-۱\hookrightarrow ۱-m\,(۱)=-۱\hookrightarrow\boxed{m=۲}$$

■

تست ۱۰.۵.۱. مختصات نقطه‌ای روي خط $y=۳x$ كه از مبدأ مختصات به فاصله‌ي $\sqrt{۱۰}$ بوده و بالاي محور xها باشد كدام است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۳,۹)$ ۴) $(۴,۱۲)$

حل:

$$y=۳x\hookrightarrow M\left|\begin{array}{l}x\\ ۳x\end{array}\right.\hookrightarrow OM=\sqrt{۱۰}\hookrightarrow\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱۰}\hookrightarrow$$
$$\sqrt{x^۲+۹x^۲}=\sqrt{۱۰}\hookrightarrow x^۲=۱\hookrightarrow x=\pm۱\hookrightarrow M\left|\begin{array}{l}۱\\ ۳\end{array}\right. ,M\left|\begin{array}{l}-۱\\ -۳\end{array}\right.$$

■

تست ۱۱.۵.۱. زاويه‌ي بردار مكان نقطه‌ي $M\left(۳,۳\sqrt{۳}\right)$ با محور xها كدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{۳}$ ۲) $\dfrac{\pi}{۴}$ ۳) $\dfrac{\pi}{۶}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۲}$

حل:

$$M\left(۳,۳\sqrt{۳}\right)$$
$$\tan(\alpha)=\dfrac{y}{x}=\dfrac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}\hookrightarrow\boxed{\alpha=\dfrac{\pi}{۶}}$$

■

تست ۱۲.۵.۱. خط $y=x+۲$ منحني تابع $y=\frac{۲x+۱}{x}$ رادر دو نقطه‌ي A و B قطع مي‌كند معادله‌ي عمودمنصف AB كدام است؟

۱) $y=x+۱$ ۲) $y=x+۲$ ۳) $y=-x$ ۴) $y=-x+۲$

حل: فرض كنيد Δ عمودمنصف AB باشد.

$$\begin{cases} y=\frac{۲x+۱}{x} \\ y=x+۲ \end{cases} \hookrightarrow \frac{۲x+۱}{x}=x+۲ \hookrightarrow x^۲+۲x=۲x+۱ \hookrightarrow x^۲=۱$$
$$\hookrightarrow x=\pm۱ \hookrightarrow A(۱,۳)\ ,\ B(-۱,۱) \hookrightarrow M\left(\frac{۱-۱}{۲},\frac{۳+۱}{۲}\right)=(۰,۲)$$
$$\hookrightarrow m_{AB}=\frac{۱-۳}{-۱-۱}=۱ \hookrightarrow m_\Delta=-۱ \hookrightarrow$$
$$y-y_۰=m_\Delta(x-x_۰) \hookrightarrow y-۲=-۱(x-۰) \hookrightarrow \boxed{y=-x+۲}$$

■

تست ۱۳.۵.۱. دو خط $y=mx+۲, y=۲x+m$ يكديگر را روي نيمساز ناحيه‌ي اول و سوم قطع مي‌كند m كدام است؟

۱) -۳ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۱

حل:

$$\begin{cases} y=mx+۲ \\ y=۲x+m \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} mx-y=-۲ \\ -۲x+y=m \end{cases}$$
$$\begin{cases} x(m-۲)=m-۲ \xhookrightarrow{x\neq۲} x=-۱ \\ y=-۲+m \xhookrightarrow{y=x=-۱} \boxed{m=۱} \end{cases}$$

■

تست ۱۴.۵.۱. نقاط $A(۲\beta,\beta), B(\beta+۳,\beta-۴)$ دو رأس مثلث ABC و معادله‌ي ميانه‌ي نظير رأس C خط $y=۵$ مي‌باشد مختصات وسط AB كدام است؟

۱) $(۵,۹)$ ۲) $(۵,۱۲)$ ۳) $(۹,۵)$ ۴) $(۱۲,۵)$

حل: فرض كنيد M نقطه‌ي وسط AB باشد.

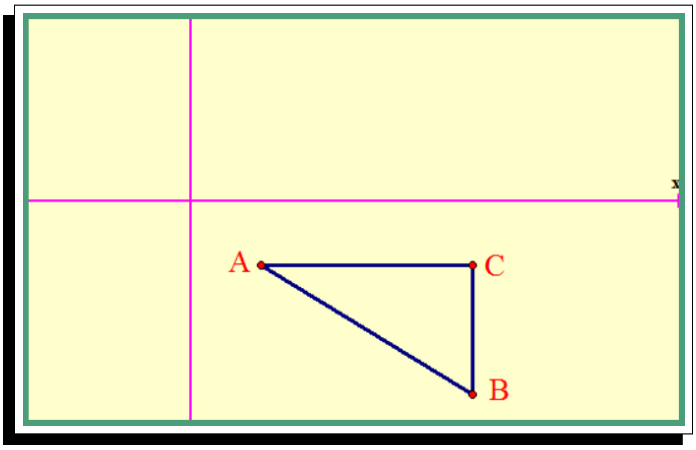
$$\left.\begin{array}{l} M\left(\frac{۲\beta+\beta+۳}{۲},\frac{\beta+\beta-۴}{۲}\right)=\left(\frac{۳\beta+۳}{۲},\frac{۲\beta-۴}{۲}\right) \\ \frac{۲\beta-۴}{۲}=۵ \hookrightarrow ۲\beta-۴=۱۰ \hookrightarrow \beta=۷ \end{array}\right\} \hookrightarrow \boxed{M(۱۲,۵)}$$

■

تست ۱۵.۵.۱. در شكل زير ضريب زاويه‌ي خطي كه از دو نقطه‌ي A و B مي‌گذرد كدام است؟

$$AC=\frac{۵}{۳}, BC=\frac{۲}{۳}$$

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{2}{5}$



حل:

$$\tan\left(\widehat{A}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \hookrightarrow \boxed{m = -\frac{2}{5}}$$

■

تست ۱۶.۵.۱. محل برخورد دو خط به معادله‌هاي $my = x + n, y = x + 2$ روي محور ox قرار دارد n کدام است؟

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

حل:

$$\begin{cases} my = x + n \xhookrightarrow{y=0} x + n = 0 \hookrightarrow x = -n \\ y = x + 2 \xhookrightarrow{y=0} 0 = -n + 2 \hookrightarrow \boxed{n = 2} \end{cases}$$

■

تست ۱۷.۵.۱. مطلوب است تعيين معادله‌ي خطي که از نقطه‌ي برخورد دو خط $x + y - 1 = 0$ و $3x - 5y + 6 = 0$ گذشته و با جهت مثبت محور xها زاويه‌ي ۴۵ درجه بسازد.

۱) $y = x + \frac{3}{4}$ ۲) $y = x + \frac{5}{4}$ ۳) $y = -x + \frac{3}{4}$ ۴) $y = -x + \frac{5}{4}$

حل:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x - 5y + 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} -3x - 3y + 3 = 0 \\ 3x - 5y + 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} -8y = -9 \\ x = -\frac{1}{8} \end{cases} A \left| \begin{matrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{9}{8} \end{matrix} \right.$$

$$\hookrightarrow \tan(45^\circ) = 1 \hookrightarrow y - \frac{9}{8} = x + \frac{1}{8} \hookrightarrow \boxed{y = x + \frac{5}{4}}$$

■

تست ۱۸.۵.۱. منحني به معادله‌ي $y^4 + 3xy - 4 = 0$ و نيمساز ناحيه‌ي دوم و چهارم مفروضند مجموع فواصل نقاط برخورد آنها تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} y^۴ - ۳xy - ۴ = ۰ \\ \\ y = -x \end{array}\right\} x^۴ - ۳x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \\ x^۲ = -۱ \end{cases}$$

$$A \left| \begin{array}{l} ۲ \\ -۲ \end{array}\right. , B \left| \begin{array}{l} -۲ \\ \\ ۲ \end{array}\right. , O \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۰ \end{array}\right.$$

$$\mathrm{AO} + \mathrm{BO} = \sqrt{۴+۴} + \sqrt{۴+۴} = ۴\sqrt{۲} \hookrightarrow \boxed{\mathrm{AO} + \mathrm{BO} = ۴\sqrt{۲}}$$

■

تمرین ۱.۵.۱۶. وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید:

$$l : ۲x - y = ۱$$
$$d : y = ۲x - ۳$$
$$\Delta : x + ۲y = ۰$$

حل: به عهده‌ی شما

■

✓

تمرین ۱.۵.۱۷. دو نقطه‌ی $A(۱۴, ۳)$ و $B(۱۰, -۱۳)$ را در نظر بگیرید.

آ. فاصله‌ی مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

■

✓

ب. معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۸.۵.۱. نشان دهید مثلث با رئوس $A(۱,۲)$ و $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۹.۵.۱. دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند.

آ. اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. آیا نقطه‌ی $C(۷,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

حل: به عهده‌ی شما

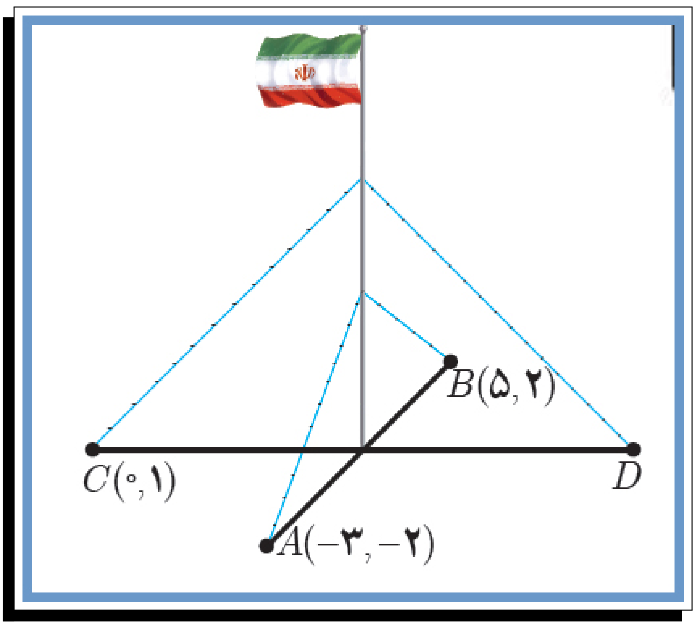
✓ ■

تمرین ۲۰.۵.۱. نقاط $O(\circ,\circ)$ و $M(۴,\circ)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۱.۵.۱. یک میله‌ی پرچم بزرگ، مطابق شکل زیر توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصله‌ی هر نقطه تا میله برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی مقابل آن تا میله. مختصات نقطه‌ی D را به‌دست آورید.



حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۲۲.۵.۱. نقاط $A(۲,۳)$ و $B(-۱,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه حل کوتاه‌تری برای مسأله ارائه کنید؟)

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۲۳.۵.۱. فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۷,-۴)$ را از خط به معادله‌ی $۲x+y=۵$ به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۲۴.۵.۱. یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=۲x-۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۵.۲۵. اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، نشان دهید؛

آ. خط گذرا از نقاط $P(a,b)$ و $Q(b,a)$ همواره بر خط $y=x$ عمود است.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. نقطه‌ی وسط پاره‌خط PQ همیشه بر روی خط $y=x$ واقع است.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

Mathematics(11)

by:

Shapour

Madadpour

madad_sh@yahoo.com

knowledge is power ▪ june 2017