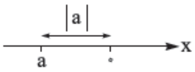
درس ۴

قدرمطلق و ویژگی‌های آن

تعریف قدرمطلق

سال گذشته با مفهوم قدرمطلق آشنا شدیم. *دیدیم که کلاً گیر میده مثبت کنه! در واقع کارش اینه که اعدادی که تو دامش میفتن اگر مثبت یا صفر باشن رهاشون می‌کنه. اما وای به حال عددی که منفی باشه. تو این حالت عدد را میندازه تو یک بند. انقدر نگهش می‌داره تا مثبت شه بره بیرون! با این مقدمه وارد بحث بشیم و کمی ریاضی‌وار قدرمطلق را بررسی کنیم. این‌طوری دیگه خیلی بهش بازیه!*

تعریف قدرمطلق: $|a|$ در حقیقت فاصلهٔ نقطهٔ به طول a از مبدأ مختصات است. دقت کنید که a می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. (به طور کلی قدرمطلق برای بیان مفهوم فاصله مطرح شد.)



بعد از ایجاد مفهوم $|a|$، این عبارت به زبان ریاضی به صورت زیر تعریف شد:

(*وقتی a مثبت یا صفر، قدر مطلق رهاش می‌کنه:* $|a|=a$)

(*وقتی a منفیه، قدر مطلق باید مثبتش کنه؛ پس تو یک منفی ضربش می‌کنه تا مثبت شه، بعد رهاش می‌کنه:* $|a|=-a$)

$$|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

اما نحوهٔ نمایش $|a|$ به صورت‌های زیر هم مشاهده شده:

$$|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a & a\leq 0\end{cases}=\begin{cases}a & a>0\\ -a & a\leq 0\end{cases}=\begin{cases}a & a>0\\ 0 & a=0\\ -a & a<0\end{cases}$$

مثال هر یک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

(الف) $|-\sqrt{2}|$ (ب) $|2-\sqrt{3}|$ (پ) $|2-\sqrt{5}|$ (ت) $|\pi-3\frac{1}{5}|$

پاسخ

(الف) $|\underbrace{-\sqrt{2}}_{\text{منفی}}|=-(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$

(ب) $|\underbrace{2-\sqrt{3}}_{\text{مثبت}}|=2-\sqrt{3}$ (دقت کنید که $\sqrt{3}\simeq 1/7$)

(پ) $|\underbrace{2-\sqrt{5}}_{\text{منفی}}|=-(2-\sqrt{5})=\sqrt{5}-2$ (دقت کنید که $\sqrt{5}\simeq 2/2$)

(ت) $|\underbrace{\pi-3\frac{1}{5}}_{\text{منفی}}|=-(\pi-3\frac{1}{5})=3\frac{1}{5}-\pi$ (دقت کنید که $3\frac{1}{5}=3/2$ و $\pi\simeq 3/14$)

مثال حاصل $|\sqrt{2}-2|+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ را بیابید.

پاسخ هر کدام از قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}|\underbrace{\sqrt{2}-2}_{\text{منفی}}|=-(\sqrt{2}-2)=2-\sqrt{2}\\ \sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\underbrace{\sqrt{2}-1}_{\text{مثبت}}|=\sqrt{2}-1\end{cases}$$

بنابراین: $|\sqrt{2}-2|+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=(2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)=1$

در حالت کلی داریم:

$$\sqrt{u^2}=|u|\ ,\ \sqrt[3]{u^3}=u$$

$$\sqrt[2n]{u^{2n}}=|u|\ ,\ \sqrt[2n+1]{u^{2n+1}}=u$$

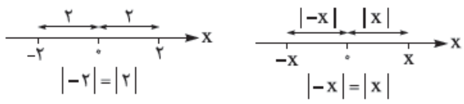
ویژگی‌های قدرمطلق:

۱) $|x|\geq ۰ ,(x\in \mathbb{R})$: چون قدرمطلق مفهوم فاصله دارد و فاصله هم هیچ‌وقت منفی نمی‌شود، پس فاصلهٔ هر عدد حقیقی x از مبدأ مختصات یعنی همان $|x|$، همواره عددی نامنفی است.

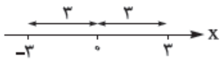
چون $|x|$ فقط در $x=۰$ صفر می‌شود، در نتیجه برای $x\neq ۰$ داریم $|x|>۰$. همچنین: $\quad |x|>۰ \Rightarrow x\neq ۰$

۲) $|x|=|-x|$: این هم معلوم است. فاصلهٔ نقطه به طول x از مبدأ با فاصلهٔ قرینه‌اش از مبدأ برابر است:

مثال



۳) $|x|=a \Rightarrow x=\pm a\,(a\geq ۰)$: با توجه به ویژگی ۲، این ویژگی به راحتی قابل بررسی است. برای مثال، نقطه‌ای که به فاصلهٔ ۳ از مبدأ مختصات قرار دارد، هم می‌تواند ۳ باشد و هم ۳−.



$\Rightarrow |x|=۳ \Rightarrow x=\pm ۳$

۴) $|x|=|a| \Rightarrow x=\pm a$: از ویژگی ۳ قابل دستیابی است.

۵) $|x^۲|=x^۲$: $x^۲$ و $|x|^۲$ هر دو عبارت‌هایی نامنفی هستند؛ پس گذاشتن و نگذاشتن قدرمطلق برای $x^۲$ هیچ تأثیری ندارد.

۶) $|ab|=|a||b|$ و در نتیجه: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

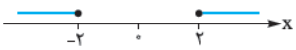
۷) $-|a|\leq a\leq |a|$: هر عدد یا برابر قدرمطلقش است (وقتی مثبت یا صفر باشد) یا برابر منفی قدرمطلقش (وقتی منفی باشد).

۸) $|x|\leq c \Leftrightarrow -c\leq x\leq c$: برای مثال وقتی $|x|\leq ۲$، از سمت راست، x حداکثر می‌تواند تا ۲ زیاد بشود و از سمت چپ حداقل می‌تواند تا ۲− کم شود. در نتیجه:

$|x|\leq ۲ \Rightarrow$  $\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$|x|<c \Leftrightarrow -c<x<c$

۹) $|x|\geq c \Leftrightarrow x\geq c$ یا $x\leq -c$: با توجه به ویژگی ۸، این فاصله، خارج فاصلهٔ حالت ۸ است. برای مثال:

$|x|\geq ۲ \Rightarrow$  $x\leq -۲$ یا $x\geq ۲$

$|x|>c \Leftrightarrow x>c$ یا $x<-c$

۱۰) $|a+b|\leq |a|+|b|$: به این نامساوی، نامساوی مثلثی می‌گویند. به صورت زیر هم اثبات می‌شود:

طبق رابطهٔ ۷ : $\begin{cases}-|a|\leq a\leq |a|\\ -|b|\leq b\leq |b|\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -(|a|+|b|)\leq a+b\leq |a|+|b| \xrightarrow{\text{ویژگی}(۸)} |a+b|\leq |a|+|b|$

از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که:

$|a|-|b|\leq |a-b|$

(برای اثبات در رابطهٔ ۱۰ به جای a، $a-b$ قرار می‌دهیم.)

پس در حالت کلی: $\quad |a|-|b|\leq |a\pm b|\leq |a|+|b|$

نکات مهم نامساوی مثلثی: طبق رابطهٔ (۱۰) یعنی نامساوی مثلثی، $|a+b|$ یا از $|a|+|b|$ کوچک‌تر است یا با آن مساوی است.

این‌جا بررسی می‌کنیم هر حالت تحت چه شرایطی برقرار می‌شود. پس با توجه به $|a+b|\leq |a|+|b|$ داریم:

اگر $a=۲$ و $b=۳$ باشد (هر دو مثبت) هر دو طرف مقدارشان ۵ می‌شود.

اگر $a=-۲$ و $b=-۳$ باشد (هر دو منفی)، باز هم هر دو طرف مقدارشان ۵− می‌شود.

اگر $a=۰$ و $b=۲$ (حداقل یکی صفر) هر دو طرف مقدارشان ۲ می‌شود.

اگر $a=۲$ و $b=-۱$ (یکی مثبت و یکی منفی) طرف چپ برابر یک و طرف راست برابر ۳ می‌شود.

پس نکتهٔ زیر برقرار خواهد بود:

در نامساوی مثلثی $|a+b|\leq |a|+|b|$:

۱) زمانی که a و b هم‌علامت باشند یا حداقل یکی صفر باشد، حالت تساوی برقرار است:

(a و b هم‌علامت یا حداقل یکی صفر): $a.b\geq ۰ \Rightarrow |a+b|=|a|+|b|$

۲) زمانی که a و b علامت‌های مخالف هم داشته باشند، حالت نامساوی برقرار است:

(a و b علامت‌های مخالف) $a.b<۰ \Rightarrow |a+b|<|a|+|b|$

مثال **اگر $|a+b|<|a|+|b|$ عبارت $\frac{|a|}{|b|}$ را بدون قدرمطلق بنویسید.**

پاسخ چون $|a+b|<|a|+|b|$ پس با توجه به حالت (۲) نکتهٔ نامساوی مثلثی، a و b هم‌علامت نیستند، پس:

$$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right| \xrightarrow{\text{a و b علامت‌های مخالف}} \left|\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{منفی}}\right|=-\frac{a}{b}$$

تابع قدرمطلق

حال قدرمطلق را به عنوان یک تابع بررسی می‌کنیم. تابع $f(x)=|x|$ تابعی است که هر عددی وارد شود، قدرمطلقش خارج می‌شود. حالا اگر عدد مثبت باشد، خودش بیرون می‌آید و اگر عدد منفی باشد، مثبتش بیرون می‌آید.

در حالت کلی با توجه به تعریف قدرمطلق، تابع قدرمطلق به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

مثال **توابع زیر را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.**

الف) $f(x)=|x-۲|$ **ب)** $g(x)=|x^۲-۱|$

پاسخ

الف) ریشهٔ داخل قدرمطلق، $x=۲$ است، پس:

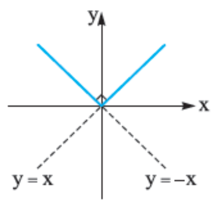
$$f(x)=|x-۲|=\begin{cases} x-۲ & x\geq ۲ \\ -(x-۲) & x<۲ \end{cases}$$

ب) ریشه‌های داخل قدرمطلق $x=\pm ۱$ است. بین دو ریشه $(-۱<x<۱)$ علامت عبارت $x^۲-۱$ منفی و خارج دو ریشه ($x<-۱$ یا $x>۱$) علامت عبارت $x^۲-۱$ مثبت یا صفر است، پس:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \\ -(x^۲-۱) & -۱<x<۱ \end{cases}$$

رسم نمودار توابع قدرمطلقی: برای بررسی نمودارهای قدرمطلقی، ابتدا با نمودار $f(x)=|x|$ شروع می‌کنیم.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$



در توابع به فرم کلی $f(x)=|x-a|+b$ زاویهٔ بین خطوط همواره ۹۰° است.

در حالت کلی برای رسم نمودارهای قدرمطلقی، ابتدا با تعیین علامت قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس هر ضابطه را رسم می‌کنیم:

مثال **نمودار تابع $f(x)=|x+۱|-۲$ را رسم کنید.**

پاسخ

راه حل اول: ریشهٔ داخل قدرمطلق -۱ است؛ پس:

$$f(x)=\begin{cases} (x+۱)-۲ & x\geq -۱ \\ -(x+۱)-۲ & x<-۱ \end{cases}=\begin{cases} x-۱ & x\geq -۱ \\ -x-۳ & x<-۱ \end{cases}$$

هر یک از خط‌های $y=x-۱$ و $y=-x-۳$ را با دادن دو مقدار دلخواه (با توجه به شرط‌های آن‌ها) رسم می‌کنیم. نقطهٔ $x=-۱$ در هر دو ضابطه قرار داده شود.

$x\geq -۱: y=x-۱ \Rightarrow$

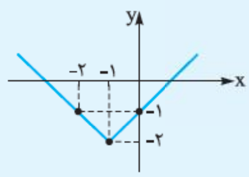
x	−۱	۰
y	−۲	−۱

$\Rightarrow$

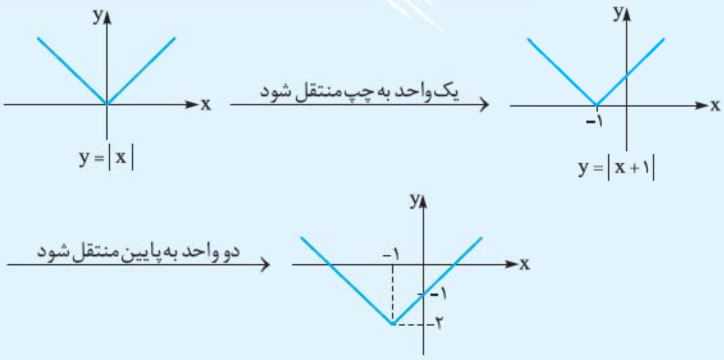
$x<-۱: y=-x-۳ \Rightarrow$

x	−۲	−۱
y	−۱	−۲

$\Rightarrow$



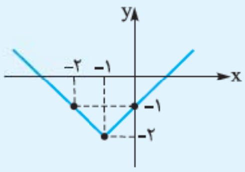
راه حل دوم: از انتقال استفاده می‌کنیم. برای رسم کافی است نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد به چپ و سپس دو واحد به پایین منتقل کنیم تا نمودار $f(x)=|x+۱|-۲$ حاصل شود.



راه حل سوم: از روش عددگذاری استفاده می‌کنیم. با دادن سه مقدار (که عدد وسط ریشهٔ داخل قدرمطلق است) و با محاسبهٔ عرض تابع در این نقاط، نمودار را رسم می‌کنیم.

x	-۲	-۱	۰
$f(x)=\vert x+۱\vert-۲$	-۱	-۲	-۱

$\Rightarrow$



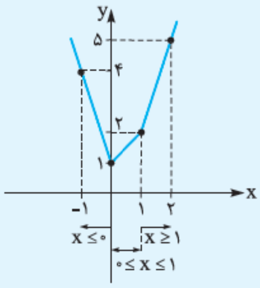
رسم نمودار مجموع یا تفاضل چند قدرمطلق: در این‌جا در حالت کلی باید قدرمطلق را با تعیین علامت حذف کرده و سپس هر ضابطه را با توجه به شرط آن رسم کرد.

مثال نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+۲|x|$ را رسم کنید.

پاسخ راه حل اول: ریشهٔ داخل قدرمطلق‌ها $x=۰$ و $x=۱$ است، پس سه شرط $x\le ۰$ و $۰\le x\le ۱$ و $x\ge ۱$ داریم. در فاصلهٔ $x\le ۰$ هر دو قدرمطلق با علامت منفی حذف می‌شوند (چون مثلاً به ازای $x=-۱$ عبارت داخل هر دو قدرمطلق منفی می‌شوند). به همین ترتیب برای سایر شروط نیز عمل کرده و تابع را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=|x-۱|+۲|x|=\begin{cases}-(x-۱)+۲(-x) & x\le ۰ \quad (x=-۱ \text{ هر دو رو منفی می‌کنه.})\\ -(x-۱)+۲(x) & ۰\le x\le ۱ \quad (x=\frac{۱}{۲} \text{ اولی رو منفی می‌کنه.})\\ (x-۱)+۲(x) & x\ge ۱ \quad (x=۲ \text{ هر دو رو مثبت می‌کنه.})\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۳x+۱ & x\le ۰\\ x+۱ & ۰\le x\le ۱\\ ۳x-۱ & x\ge ۱\end{cases} \Rightarrow$$

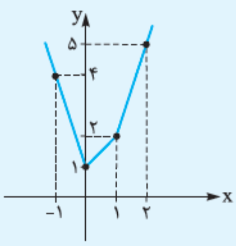


راه حل دوم: ریشهٔ داخل هر قدرمطلق را می‌یابیم: $x=۰\,,\,x=۱$

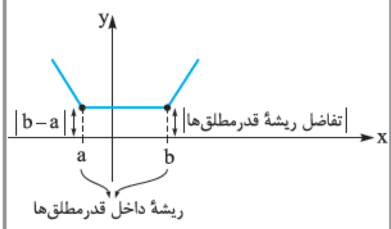
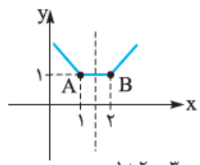
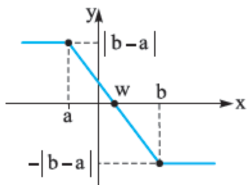
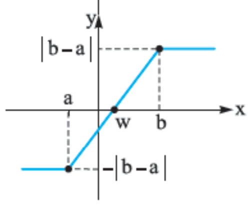
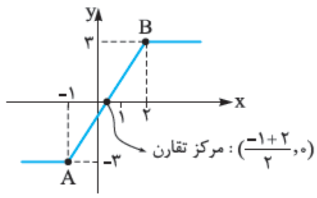
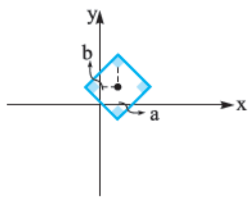
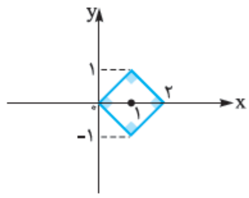
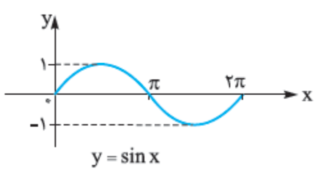
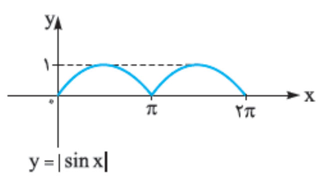
یک عدد بزرگ‌تر از ریشهٔ بزرگ‌تر (مثلاً $x=۲$) و یک عدد کوچک‌تر از ریشهٔ کوچک‌تر (مثلاً $x=-۱$) را هم در نظر می‌گیریم. مقدار تابع را در این ۴ نقطه محاسبه می‌کنیم و این نقاط را روی محورهای مختصات رسم کرده و به هم وصل می‌کنیم و پاره‌خط‌های انتهایی را امتداد می‌دهیم.

$f(x)=|x-۱|+۲|x|$

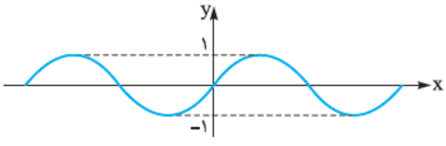
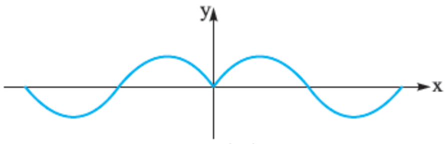
$\begin{vmatrix}-۱\\ ۴\end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}۰\\ ۱\end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}۱\\ ۲\end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}۲\\ ۵\end{vmatrix}$



نمودارهای خاص

تابع	توضیح	نمودار	مثال
$y=\|x-a\|+\|x+b\|$	نمودار این توابع به نمودار گلدانی معروف است. برای رسم می‌توانیم از روش کلی یعنی تعیین علامت قدرمطلق‌ها یا از روش عددگذاری استفاده کنیم.	 ● تابع محور تقارن $x=\frac{a+b}{۲}$ دارد.	$y=\|x-۱\|+\|x-۲\|$ ریشه‌ها: $x=۱,۲$ $\Rightarrow \|b-a\|=\|۲-۱\|=۱$ $A\begin{vmatrix}۱\\۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۲\\۱\end{vmatrix}$  محور تقارن : $x=\frac{۱+۲}{۲}=\frac{۳}{۲}$
$y=\|x-a\|-\|x-b\|$	نمودار این توابع به نمودارهای آبشاری معروف است. این نمودار با توجه به ریشه‌ها، به یکی از دو صورت مقابل رسم می‌شود.	  ● تابع مرکز تقارن $w(\frac{a+b}{۲},۰)$ دارد.	$y=\|x+۱\|-\|x-۲\|$ ریشهٔ قدرمطلق‌ها $x=-۱$ و $x=۲$ است. برای تشخیص نمودار، مقدار تابع در این نقاط را می‌یابیم: $A\begin{vmatrix}-۱\\-۳\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}$ 
$\|x-a\|+\|y-b\|=k$ [۱] $(k>۰)$	نمودار این تابع، مربعی به مرکز (a,b) و به طول قطر $۲k$ است.		$\|x-۱\|+\|y\|=۱$ مرکز مربع: $(۱,۰)$ و طول قطر $=۲$ 
$y=\|f(x)\|$	برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور xهاست را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	**مثال** نمودار تابع $y=\|\sin x\|$ را در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.  $\Rightarrow$ 	

۱- خارج از بحث کتاب درسی

$y=f(\|x\|)$[1]	برای رسم، ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌های سمت چپ محور yها را حذف و به جای آن قرینهٔ سمت راست را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.	**مثال** نمودار تابع $y=\sin\|x\|$ را رسم کنید.  $y=\sin x$  $y=\sin\|x\|$ ● توجه کنید نمودار این توابع همواره نسبت به محور yها متقارن است.

معادلات قدرمطلقی

برای حل معادلات قدرمطلقی یا باید از ویژگی‌های قدرمطلق یا باید از تعریف قدرمطلق و تعیین علامت قدرمطلق استفاده کنیم. البته که روش هندسی هم قابل استفاده هست.

۱- استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق: به ویژگی‌هایی که در این قسمت مورد استفاده قرار می‌گیرند، دوباره اشاره می‌کنیم.

۱ $|u|\geq ۰$ (یعنی $|u|$ همواره نامنفیه)

۲ $|u|=|v| \Rightarrow u=\pm v$

۳ $|u|=v \Rightarrow u=\pm v \quad (v\geq ۰)$

۴ $|u|=u \Rightarrow u\geq ۰$

۵ $|u|=-u \Rightarrow u\leq ۰$

۶ $|u+v|=|u|+|v| \Rightarrow u.v\geq ۰$

(ویژگی ۶ یکی از حالت‌های نامساوی مثلثی بود.)

مثال معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $|x-۱|=۲$ (ب) $|۳x-۱|=|x+۲|$ (پ) $|x^۲-۲|=x$

(ت) $x^۲+|x^۲-۱|=۱$ (ث) $|x+۱|+|۲x-۱|=|۳x|$ (ج) $|x^۲-۱|+|x-۱|=۰$

پاسخ (الف) از ویژگی ۳ استفاده می‌کنیم:

$$|x-۱|=۲ \Rightarrow x-۱=\pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲ \Rightarrow x=۳ \\ x-۱=-۲ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

(ب) از ویژگی ۲ استفاده می‌کنیم:

$$|۳x-۱|=|x+۲| \Rightarrow ۳x-۱=\pm(x+۲) \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۱=x+۲ \Rightarrow ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \\ ۳x-۱=-x-۲ \Rightarrow ۴x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

پس معادله دوتا جواب دارد.

(پ) از ویژگی ۳ استفاده می‌کنیم: (شرط $x\geq ۰$ فراموش نشود.)

$$|x^۲-۲|=x \xrightarrow{x\geq ۰} x^۲-۲=\pm x \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۲=x \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \\ x^۲-۲=-x \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۲, x=-۱ \xrightarrow{x\geq ۰} x=۲ \\ (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲, x=۱ \xrightarrow{x\geq ۰} x=۱ \end{cases}$$

پس معادله دوتا جواب $x=۱$ و $x=۲$ دارد.

(ت) اول قدرمطلق را در طرف چپ نگه می‌داریم. سایر عبارت‌ها را به طرف راست می‌بریم:

$$x^۲+|x^۲-۱|=۱ \Rightarrow |\underbrace{x^۲-۱}_{u}|=\underbrace{۱-x^۲}_{-u}$$

خود ویژگی ۵ است؛ پس باید:

$$u\leq ۰ \Rightarrow x^۲-۱\leq ۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۱)\leq ۰ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

۱- خارج از بحث کتاب درسی

ث) هر موقع ۳تا قدرمطلق دیدید، اول توجهتان به نامساوی مثلثی باشد. این‌جا داریم:

$$|\underbrace{x+۱}_{u}|+|\underbrace{۲x-۱}_{v}|=|\underbrace{۳x}_{u+v}| \Rightarrow$$ (پس حالت تساوی نامساوی مثلثی است)

طبق ویژگی ۶ داریم:

$$uv\geq ۰ \Rightarrow (x+۱)(۲x-۱)\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۱ \text{ یا } x\geq \frac{۱}{۲}$$

ح) در تعیین علامت عبارت‌های درجه‌دوم حالت‌های زیر را به خاطر بسپارید: (فرض: $b>a$)

۱) $(x-a)(x-b)\leq ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}: x=a, x=b} a\leq x\leq b$

مثال $(x+۱)(x+۲)\leq ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}: x=-۱, x=-۲} -۲\leq x\leq -۱$

۲) $(x-a)(x-b)\geq ۰ \xrightarrow[b>a]{\text{ریشه‌ها}: x=a, x=b} x\geq b \text{ یا } x\leq a$

مثال $(۲x+۱)(x-۲)\geq ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}: x=-\frac{۱}{۲}, x=۲} x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -\frac{۱}{۲}$

چ) قدرمطلق، یک عبارت همواره نامنفی است. مجموع دو عبارت نامنفی هم زمانی صفر می‌شود که هر دو با هم صفر شوند. قبلاً گفتیم در این حالت، ریشهٔ عبارت ساده‌تر را پیدا می‌کنیم. اگر آن یکی عبارت را هم صفر کرد جواب معادله است. در غیر این صورت، معادله جواب ندارد. $|x-۱|: x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

چون $x=۱$، هم $|x-۱|$ و هم $|x^۲-۱|$ را صفر می‌کند پس جواب معادله است. در نتیجه معادله یک جواب $x=۱$ دارد.

۲- استفاده از تعریف قدرمطلق و تعیین علامت: اگر معادله‌ای دیدید که هیچ‌کدام از ویژگی‌های گفته‌شده قابل استفاده نبودند می‌توانید با تعیین علامت، معادله را حل کنید.

تست معادلهٔ $۲|x-۱|+|x+۲|=۴$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ ۳ ریشهٔ داخل هر قدرمطلق $x=۱$ و $x=-۲$ است. بنابراین سه شرط $x\leq -۲$ ، $-۲\leq x\leq ۱$ و $x\geq ۱$ را داریم:

$$\begin{cases} x\leq -۲: ۲|\underbrace{x-۱}_{-}|+|\underbrace{x+۲}_{-}|=۴ \Rightarrow -۲x+۲-x-۲=۴ \Rightarrow -۳x=۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \xrightarrow{x\leq -۲} \text{غ ق ق} \\ -۲\leq x\leq ۱: ۲|\underbrace{x-۱}_{-}|+|\underbrace{x+۲}_{+}|=۴ \Rightarrow -۲x+۲+x+۲=۴ \Rightarrow -x=۰ \Rightarrow x=۰ \xrightarrow{-۲\leq x\leq ۱} x=۰ \checkmark \\ x\geq ۱: ۲|\underbrace{x-۱}_{+}|+|\underbrace{x+۲}_{+}|=۴ \Rightarrow ۲x-۲+x+۲=۴ \Rightarrow ۳x=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{۳} \xrightarrow{x\geq ۱} x=\frac{۴}{۳} \checkmark \end{cases}$$

پس معادله دوتا ریشهٔ $x=۰$ و $x=\frac{۴}{۳}$ دارد.

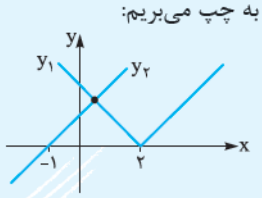
۳- روش هندسی: با این روش هم آشنا هستید.

تست معادلهٔ $|x-۲|=x+۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ ۲ از روش هندسی استفاده می‌کنیم: $\underbrace{|x-۲|}_{y_۱}=\underbrace{x+۱}_{y_۲}$

برای رسم $y_۱$ نمودار $y=|x|$ را دو واحد به راست می‌بریم و برای رسم $y_۲$، نمودار $y=x$ را یک واحد به چپ می‌بریم:



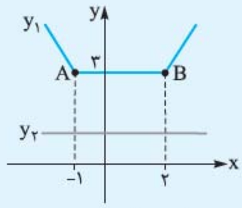
دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس معادله یک جواب دارد.

مثال معادلهٔ $|x+۱|+|x-۲|=۱$ چند ریشه دارد؟

پاسخ از روش هندسی استفاده می‌کنیم: $\underbrace{|x+۱|+|x+۲|}_{y_۱}=\underbrace{۱}_{y_۲}$

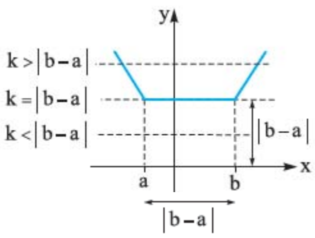
نمودار y_1، یک نمودار گلدانی است.

$$y_1=|\underbrace{x+1}_{x=-1:\text{ریشه}}|+|\underbrace{x-2}_{x=2:\text{ریشه}}| \Rightarrow A\Big|_{3}^{-1} \ , \ B\Big|_{3}^{2} \Rightarrow$$



دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ پس معادله جواب ندارد.

در حل معادلات به فرم $|x-a|+|x-b|=k$ حالت‌های زیر را داریم:



۱) اگر $k>|b-a|$ معادله دو ریشه دارد: (ریشه‌ها $x_1=\frac{a+b+k}{2}, x_2=\frac{a+b-k}{2}$)

۲) اگر $k=|b-a|$ معادله بی‌شمار ریشه دارد. فاصلهٔ جواب معادله، $[a,b]$ است.

۳) اگر $k<|b-a|$ معادله ریشه ندارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۷۲- حاصل $|\sqrt{3}-2|+|2-\sqrt{3}|-1|$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $3-2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}+1$

۱۷۳- اگر $2<a<4$ باشد، $|a-2|+|a-4|$ کدام است؟

۱) $2a+2$ ۲) $2a-2$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷۴- اگر $a<0<b$، حاصل $|a-b|+|a|+|b+2|$ کدام است؟

۱) $2(1-a)$ ۲) $2(b+1)$ ۳) $2(b-a+1)$ ۴) $2(a-b+1)$

۱۷۵- اگر $b<0<a$ و $|a|>|b|$، آن‌گاه حاصل عبارت $|a+b|+|a|+|b|$ برابر کدام است؟

۱) $-2b$ ۲) $-2a$ ۳) $2a$ ۴) $2b$

۱۷۶- اگر $|b|>|a|$ و b^3 منفی باشد، آن‌گاه همواره:

۱) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ۲) $a<b$ ۳) $a>b$ ۴) $a^2>b^2$

۱۷۷- اگر $x<0$ باشد، حاصل $2\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}$ کدام است؟

۱) $3x$ ۲) x ۳) $-x$ ۴) $-3x$

۱۷۸- حاصل $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $\sqrt{3}-2$ ۲) $\sqrt{3}-1$ ۳) $2-\sqrt{3}$ ۴) $1-\sqrt{3}$

۱۷۹- به ازای هر $x\in[1,+\infty)$، مقدار $\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$ کدام است؟

۱) $-x$ ۲) $2-3x$ ۳) $3x-2$ ۴) x

۱۸۰- اگر $a(a-3)<-2$، آن‌گاه حاصل $\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-4|a|+4}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $2a+2$ ۴) $2a-2$

۱۸۱- اگر رابطهٔ $|x+y+z|\le|x|+|y|+|z|$ به رابطهٔ تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر x، y و z چگونه‌اند؟ *(تجربی ۸۶)*

۱) مساوی هم ۲) هم‌علامت ۳) مثبت ۴) منفی

۱۸۲- اگر $|2x|>|x-1|+|x+1|$، آن‌گاه حاصل $\frac{|x^2+x-2|}{x+2}$ کدام است؟

۱) $1-x$ ۲) $x-1$ ۳) $x+1$ ۴) $-x-1$

۱۸۳- اگر فاصلهٔ بین x و ۲ روی محور اعداد حقیقی کم‌تر از ۳ باشد، حدود x کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $(-5,-1)$ ۲) $(-5,1)$ ۳) $(1,5)$ ۴) $(-1,5)$

۱۸۴- اگر نامساوی‌های $|x-1| < 0/1$ و $A < 2x-3 < B$ معادل باشند، آن‌گاه $A+B$ کدام است؟

۱) $-2/1$ ۲) -2 ۳) $-1/1$ ۴) -1

۱۸۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^2 > x+12$ به صورت $|x-a| > b$ نوشته شده است. $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) ۷

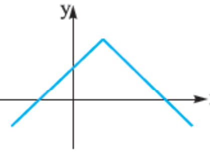
۱۸۶- اگر از $|x+2| \le 2$ نتیجه شود که $|3x-2| \le k$، کم‌ترین مقدار k کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

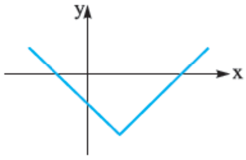
۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۴ ۴) ۲

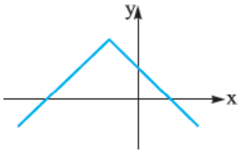
۱۸۷- نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |x| + 2$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

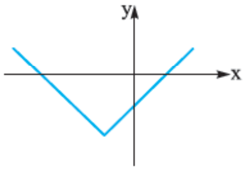
۱) اول و دوم ۲) دوم و سوم ۳) اول و سوم ۴) سوم و چهارم

۱۸۸- نمایش هندسی تابع $y = 2 - |x+1|$ کدام است؟

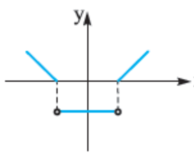
۱) 

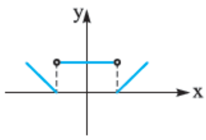
۲) 

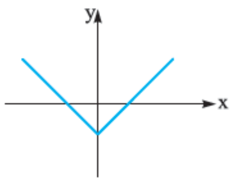
۳) 

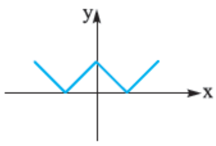
۴) 

۱۸۹- منحنی نمایش $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۹۰- نمودار تابع $y = x - \frac{x}{|x|}$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) اول و سوم ۲) دوم و سوم ۳) اول، سوم و چهارم ۴) هر چهار ناحیه

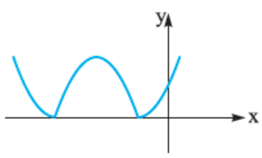
۱۹۱- نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |\frac{1}{2}x| - 2$، ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی ۹۳)

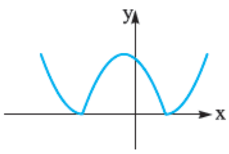
۱) $-3/5$ ۲) -3 ۳) $-2/5$ ۴) -2

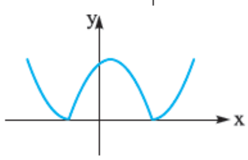
۱۹۲- نمودار تابع $y = ||3x| - |x||$ بر نمودار کدام تابع منطبق است؟

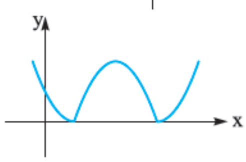
۱) $|3x| - |2x|$ ۲) $|3x| - x$ ۳) $|4x|$ ۴) $|2x|$

۱۹۳- نمودار تابع $f(x) = |x^2 + 2x - 1|$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۹۴- در نمودار تابع $y = |x-1| - |x-2|$ دو نیم‌خط موازی محور xها وجود دارد. شیب پاره‌خطی روی نمودار که دو نیم‌خط را به هم وصل می‌کند کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۱۹۵- مساحت محدود به نمودار تابع $y = 3 - |x|$ و محور xها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۹۶- مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 3|x| + x - 4$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۹۷- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = ۲ - |x|$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۳

۱۹۸- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۵)

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) ۶

۱۹۹- مساحت محدود به نمودار تابع $y = |x|$ و $x + ۳y = ۱۲$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۰۰- کم‌ترین مقدار تابع $y = |x| + |x-۱| - ۲|x+۱|$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۲۰۱- اگر فاصلهٔ نقطهٔ x از -۱ روی محور اعداد حقیقی برابر ۳ باشد، مجموع مقادیر x کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۰۲- ریشه‌های معادلهٔ $||x| - ۳| = ۱$ چگونه‌اند؟

۱) دو ریشهٔ مثبت و دو ریشهٔ منفی ۲) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی

۳) فقط یک ریشهٔ مثبت ۴) ریشه ندارد.

۲۰۳- قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $|x-۱| = |۳x+۲|$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۰۴- حاصل‌ضرب طول نقاطی روی محور اعداد حقیقی که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای به طول ۳، چهار برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای به طول -۱ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۳۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۳۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $-\frac{۷}{۱۵}$

۲۰۵- ریشه‌های معادلهٔ $|x^۲ - ۱| = ۳x + ۳$ چگونه‌اند؟

۱) فقط یک ریشهٔ مثبت ۲) فقط یک ریشهٔ منفی

۳) دو ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت ۴) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی

۲۰۶- معادلهٔ $|x + \frac{۱}{x}| = ۲/۵$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۷- قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادلهٔ $|x+۱| = |x - \frac{۱}{x}|$ کدام است؟

۱) $۰/۵$ ۲) ۱ ۳) $۱/۵$ ۴) ۲

۲۰۸- جواب‌های معادلهٔ $x|x-۱| = ۲$ چگونه است؟

۱) فقط یک جواب منفی ۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی

۳) فقط یک جواب مثبت ۴) جواب ندارد.

۲۰۹- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۲x - ۳|x+۱| = ۳$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) -۱۵ ۴) -۱۲

۲۱۰- معادلهٔ $|x - |x+۱|| = ۳$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۱- اگر $x^۲ + |x^۲ - ۱| = ۱$ حاصل $۲|x-۵| - |۲x-۳|$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) -۷ ۳) $۴x - ۷$ ۴) $۷ - ۴x$

۲۱۲- ریشه‌های معادلهٔ $|x| + |۲x+۱| = x^۲ - ۱$ چگونه‌اند؟

۱) یک ریشهٔ مثبت ۲) یک ریشهٔ منفی

۳) دو ریشهٔ هم‌علامت ۴) دو ریشهٔ با علامت‌های مخالف

۲۱۳- معادلهٔ $|x^۲ - ۴x + ۵| + |x-۲| = ۱$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۲۱۴- تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x^2+x|+|x^2+4|=3$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۵- معادلهٔ $|x-1|+|2x+1|=3|x|$ چند جواب طبیعی را شامل می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۱۶- مجموع طول نقاطی روی محور طول‌ها که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۲- و ۳ برابر ۶ باشد، کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۲۱۷- کدام گزینه در مورد معادلهٔ $\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{|x|+3}=1$ صحیح است؟

۱) معادله فقط یک ریشه در فاصلهٔ $(-1,1)$ دارد. ۲) معادله بی‌شمار ریشهٔ مثبت دارد.

۳) معادله ریشه ندارد. ۴) معادله فقط یک ریشهٔ منفی دارد.

۲۱۸- به ازای چه حدودی از a معادلهٔ $||x|-2|=a$ دو ریشه دارد؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[2,+\infty)$

۲۱۹- معادلهٔ $\dfrac{1}{|x|}=1+|x-2|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲۰- مساحت سطح محصور بین نمودار $y=|x-1|+|x-3|$ و خط $y=4$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۲۱- مساحت محدود بین قسمتی از نمودار تابع $f(x)=|x-2|+|x-1|$ و خط $y=x$ چه‌قدر است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

سری [Z]

۲۲۲- مساحت ناحیهٔ محصور به نمودار تابع $y=||x-1|-|x+2||$ و خط $y=3$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۹ ۳) ۳/۵ ۴) ۷

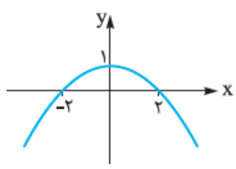
۲۲۳- معادلهٔ ناحیهٔ محصور بین نمودار توابع $|x|+|y|=1$ و $|x-1|+|y|=1$ کدام است؟

۱) $|x-\frac{1}{2}|+|y|=\frac{1}{2}$ ۲) $|x-\frac{1}{2}|+|y|=\frac{1}{4}$ ۳) $|x|+|y-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ ۴) $|x|+|y-\frac{1}{2}|=\frac{1}{4}$

۲۲۴- کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=|x^2-x-1|+|x^2-x+2|$ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۵- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، معادلهٔ $1-|x|=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$ چند ریشه دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۶- معادلهٔ $|ax^2-2x|=2$ چهار جواب دارد. حدود a کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $(0,\frac{1}{2})$ ۳) $(-\frac{1}{2},0)$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})-\{0\}$

۲۲۷- اگر مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار $y=x+|x|$ و خط $y=x+a$ برابر ۴ باشد، مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ± 2 ۴) ± 3

۲۲۸- معادلهٔ $|x-x^2|+|x+1|=x^2+1$ چند ریشهٔ صحیح منفی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۷۲- گزینهٔ مقدار $\sqrt{3}$ تقریباً $1/7$ است، پس:

$$\underbrace{|1-\sqrt{3}|}_{-}+\underbrace{|2-\sqrt{3}|}_{+}=-(1-\sqrt{3})+2-\sqrt{3}$$
$$=-1+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=1$$

۱۷۳- گزینهٔ **راه‌حل اول:**

$$2<a<4 \Rightarrow \begin{cases} a>2 \Rightarrow a-2>0 \\ a<4 \Rightarrow a-4<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow |\underbrace{a-2}_{+}|+|\underbrace{a-4}_{-}|=a-2+(-(a-4))$$
$$=a-2-a+4=2$$

می‌توانید یک عدد در فاصلهٔ داده‌شده انتخاب کنید (مثلاً $a=3$) براساس آن علامت داخل هر قدرمطلق را تعیین کنید.

راه‌حل دوم: *اصلاً چه کاریه! $a=3$ رو قرار می‌دیم:*

$$a=3: |a-2|+|a-4|=|3-2|+|3-4|=1+1=2$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $a=3$ مقدارش ۲ می‌شود، (۳) است.

۱۷۴- گزینهٔ **راه‌حل اول:**

$$a<0<b \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ a<b \Rightarrow a-b<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow |\underbrace{a-b}_{-}|+|\underbrace{a}_{-}|+|\underbrace{b+2}_{+}|=-a+b-a+b+2$$
$$=-2a+2b+2=2(b-a+1)$$

دقت کنید وقتی $b>0$، حتماً $b+2>0$.

راه‌حل دوم: اگر $b=2$ و $a=-1$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه:

$$|a-b|+|a|+|b+2|=|-1-2|+|-1|+|2+2|=8$$

تنها گزینه‌ای که به ازای این مقادیر دلخواه، مقدارش ۸ می‌شود، (۳) است.

۱۷۵- گزینهٔ **راه‌حل اول:**

$$b<0<a \Rightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow |a|=a \\ b<0 \Rightarrow |b|=-b \\ |a|>|b| \Rightarrow a>-b \Rightarrow a+b>0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \underbrace{|a+b|}_{+}+\underbrace{|a|}_{+}+\underbrace{|b|}_{-}=a+b+a-b=2a$$

راه‌حل دوم: برای مقداردهی اولاً باید $a>0$ و $b<0$ باشد، ثانیاً $|a|>|b|$ پس مثلاً $a=2$ و $b=-1$ در نظر می‌گیریم.

$$|a+b|+|a|+|b|=|2-1|+|2|+|-1|$$
$$=1+2+1=4$$

پس با توجه به مقادیر a و b (۳) درست است.

۱۷۶- گزینهٔ چون b^3 منفی است، پس b هم منفی است. در نتیجه:

$$|a|<|\underbrace{b}_{-}| \Rightarrow |a|<-b$$

حالا از رابطهٔ $|x|<c \Rightarrow -c<x<c$ استفاده می‌کنیم:

$$|a|<-b \Rightarrow -(-b)<a<-b \Rightarrow b<a<-b$$

همواره $a>b$ است.

۱۷۷- گزینهٔ می‌دانیم:

$$\sqrt[2n]{x^{2n}}=|x|,\ \sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}=x$$

در نتیجه:

$$2\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}=2x+|x|$$

چون $x<0$، پس:

$$2x+|\underbrace{x}_{-}|=2x-x=x$$

باز هم می‌توانید از روش عددگذاری هم استفاده کنید.

۱۷۸- گزینهٔ عبارت زیر رادیکال را می‌توان به صورت مربع دوجمله‌ای نوشت؛ نگاه کنید: $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$

$$\Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|\underbrace{2-\sqrt{3}}_{+}|=2-\sqrt{3}$$

۱۷۹- گزینهٔ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$$
$$=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$$
$$=|2x-1|+|x-1| \quad (\sqrt{u^2}=|u|)$$

چون $x\in[1,+\infty)$ پس $x\geq 1$، در نتیجه:

$$x\geq 1 \xrightarrow[\text{در نظر می‌گیریم.}]{\text{یک عدد دلخواه مثل ۲}} \begin{cases} |\underbrace{2x-1}_{+}|=2x-1 \\ |\underbrace{x-1}_{+}|=x-1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow |2x-1|+|x-1|=2x-1+x-1=3x-2$$

روش عددگذاری هم جواب می‌دهد.

۱۸۰- گزینهٔ ۱ اول با حل نامعادلهٔ داده‌شده، حدود a را پیدا می‌کنیم:

$$a(a-3)<-2 \Rightarrow a^2-3a<-2 \Rightarrow a^2-3a+2<0$$
$$\Rightarrow (a-2)(a-1)<0 \Rightarrow 1<a<2$$

حالا شروع می‌کنیم به ساده‌تر کردن عبارت:

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-4|a|+4}=|a|+\sqrt{a^2-4|a|+4}$$

چون $1<a<2$ پس $|\underset{+}{a}|=a$، در نتیجه:

عبارت: $a+\sqrt{a^2-4a+4}=a+\sqrt{(a-2)^2}=a+|a-2|$

دوباره چون $1<a<2$ پس $a-2<0$ و در نتیجه:

عبارت: $a+|\underset{-}{a-2}|=a+(-a+2)=2$

۱۸۱- گزینهٔ ۲ نامساوی فوق حالت تعمیم‌یافتهٔ نامساوی مثلثی است. گفتیم نامساوی مثلثی زمانی به تساوی تبدیل می‌شود که عبارت‌ها هم‌علامت باشند یا حداقل یکی صفر باشد. این‌جا خود طراح گفته اعدادمان غیر صفر هستند؛ پس باید هم‌علامت باشند.

۱۸۲- گزینهٔ ۱ با توجه به حالت‌های خاص نامساوی مثلثی داریم:

$$|\underbrace{x-1}_{a}|+|\underbrace{x+1}_{b}|>|\underbrace{2x}_{a+b}| \xrightarrow{a.b<0} (x-1)(x+1)<0$$
$$\Rightarrow -1<x<1$$

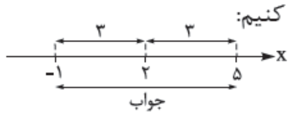
حالا با توجه به حدود x حاصل عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{|x^2+x-2|}{x+2}=\frac{|(x+2)(x-1)|}{x+2}=\frac{|x+2||x-1|}{x+2}$$
$$\xrightarrow{-1<x<1}\frac{|\overbrace{x+2}^{+}||\overbrace{x-1}^{-}|}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(-(x-1))}{\cancel{x+2}}$$
$$=-(x-1)=1-x$$

۱۸۳- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ بین x و ۲ روی محور اعداد حقیقی یعنی $|x-2|$. حالا باید این فاصله کم‌تر از ۳ باشد؛ پس:

$$|x-2|<3 \Rightarrow -3<x-2<3 \xrightarrow{+2} -1<x<5$$

از روی نمودار هم می‌توانیم تحلیل کنیم:



۱۸۴- گزینهٔ ۲

$$|x-1|<0/1 \Rightarrow -0/1<x-1<0/1$$
$$\Rightarrow 0/9<x<1/1$$

با توجه به حدود x، حدود $2x-3$ را محاسبه می‌کنیم:

$$0/9<x<1/1 \xrightarrow{\times 2} 1/8<2x<2/2 \xrightarrow{-3}$$
$$\underbrace{-1/2}_{A}<2x-3<\underbrace{-0/8}_{B}$$
$$\Rightarrow A+B=-1/2+(-0/8)=-2$$

۱۸۵- گزینهٔ ۳ اول جواب نامعادلهٔ اول را می‌یابیم:

$$x^2>x+12 \Rightarrow x^2-x-12>0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+3)>0 \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ \text{یا} \\ x<-3\end{cases}$$

بعد، جواب نامعادلهٔ دوم:

$$|x-a|>b=\begin{cases} x-a>b \Rightarrow x>a+b\\ \text{یا}\\ x-a<-b\Rightarrow x<a-b\end{cases}$$

چون جواب‌های دو نامعادله یکسان است، پس باید:

$$\begin{cases}a+b=4\\a-b=-3\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}} 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$\xrightarrow{a+b=4}\frac{1}{2}+b=4\Rightarrow b=\frac{7}{2}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}}=\frac{1}{7}$$

۱۸۶- گزینهٔ ۲ حدود x را محاسبه می‌کنیم:

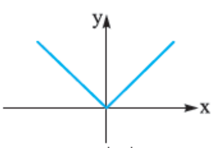
$$|x+2|\le 2 \Rightarrow -2\le x+2\le 2\Rightarrow -4\le x\le 0$$

با توجه به حدود x، حدود $3x-2$ را محاسبه می‌کنیم:

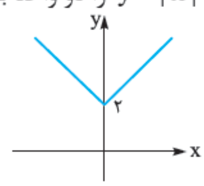
$$-4\le x\le 0 \xrightarrow{\times 3} -12\le 3x\le 0$$
$$\xrightarrow{-2} -14\le 3x-2\le -2 \Rightarrow 2\le|3x-2|\le 14$$

پس می‌توانیم بگوییم $|3x-2|\le 14$ است. پس کم‌ترین مقدار k، ۱۴ است.

۱۸۷- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار داده‌شده باید نمودار $y=|x|$ را دو واحد به بالا ببریم.



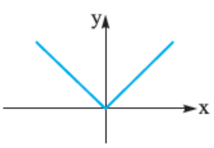
$y=|x|$



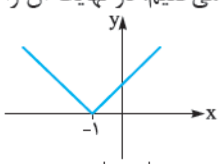
$y=|x|+2$

در نتیجه نمودار از نواحی اول و دوم می‌گذرد.

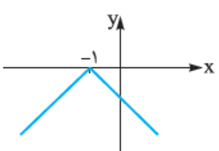
۱۸۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول:** برای رسم، نمودار $y=|x|$ را یک واحد به چپ می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. در نهایت آن را ۲ واحد به بالا می‌بریم.



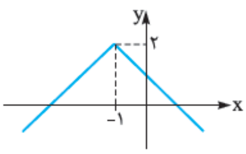
$y=|x|$



$y=|x+1|$



$y=-|x+1|$

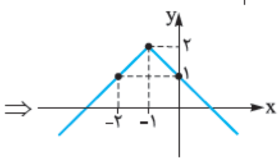


$y=2-|x+1|$

راه‌حل دوم: از روش عددگذاری هم می‌توانیم شکل را رسم کنیم:

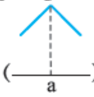
$y=2-|x+1| \Rightarrow$

x	-2	ریشهٔ قدرمطلق $=-1$	0
y	1	2	1

$\Rightarrow$ 

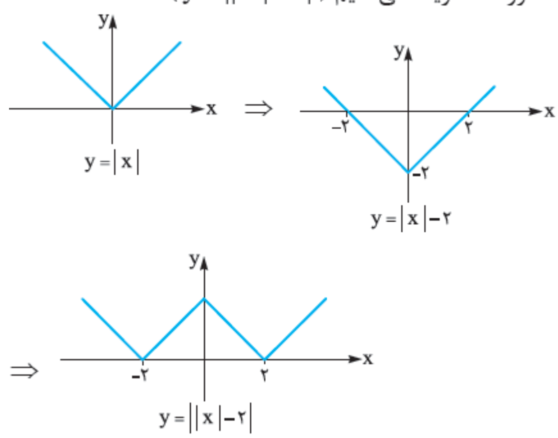
راه‌حل سوم: مقدار تابع در $x=0$ مثبت است (تلاقی با محور yها عرض مثبت دارد): $y=2-|x+1| \overset{x=0}{=} 2-1=1$

پس (۲) و (۴) حذف می‌شوند. از طرفی ریشهٔ داخل قدرمطلق



$x=-1$ است؛ پس طول نقطهٔ شکستگی نمودار (a) منفی است. در (۱) طول این نقطه مثبت است؛ پس (۳) جواب است.

۱۸۹- گزینهٔ ۴ نمودار $y=|x|$ را دو واحد پایین می‌بریم $(y=|x|-2)$؛ بعد قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم $(y=||x|-2|)$:

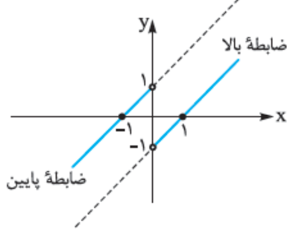


۱۹۰- گزینهٔ ۴ با تعیین علامت داخل قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases}x-\frac{x}{x}, & x>0\\ x-\frac{x}{-x}, & x<0\end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases}x-1, & x>0\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}x-1 & x>0\\ x+1 & x<0\end{cases} \Rightarrow$$



بنابراین نمودار تابع، از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد.

۱۹۱- گزینهٔ ۲

$$y=|\tfrac{1}{2}x|-2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به طرف xهای منفی}} y=|\tfrac{1}{2}(x+4)|-2$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به طرف yهای مثبت}} y=|\tfrac{1}{2}(x+4)|-2+1$$

$$\Rightarrow y=|\tfrac{1}{2}x+2|-1$$

حالا باید نقطهٔ تلاقی نمودار این تابع را با تابع اولیه محاسبه کنیم:

$$\begin{cases}y=|\frac{1}{2}x+2|-1\\ y=|\frac{1}{2}x|-2\end{cases} \Rightarrow |\tfrac{1}{2}x+2|-1=|\tfrac{1}{2}x|-2$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} x=-3$$

۱۹۲- گزینهٔ ۴ می‌دانیم:

$$|xy|=|x||y|$$
$$\Rightarrow |3x|=|3||x|=3|x|$$

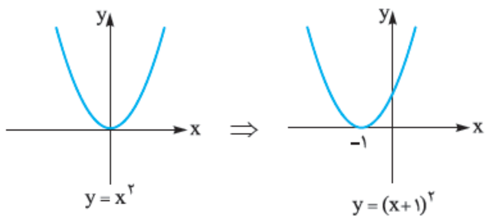
پس:

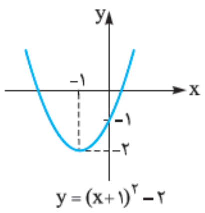
$$y=||3x|-|x||=|3|x|-|x||$$
$$=|\underbrace{2|x|}_{+}|=2|x|=|2x|$$

۱۹۳- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع f، اول نمودار $y=x^2+2x-1$ را رسم می‌کنیم. پس تابع را مربع کامل می‌کنیم.

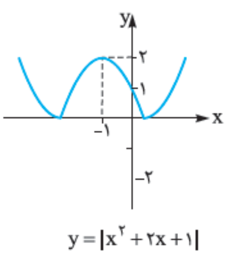
$$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-1-1=(x+1)^2-2$$

پس نمودار $y=x^2$ را یک واحد به چپ و دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم:



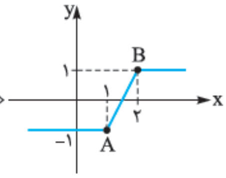
$\Rightarrow$ 

در آخر هم برای رسم نمودار f، قسمت‌های پایین محور x ها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



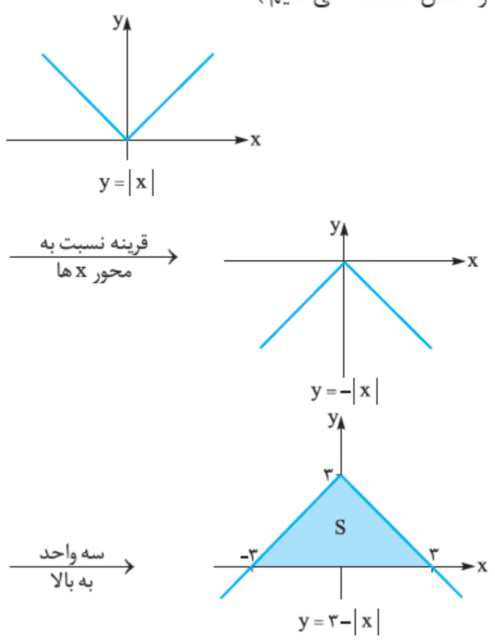
۱۹۴- گزینهٔ نمودار $y=|x-۱|-|x-۲|$ به صورت آبشاری است. برای رسم، ریشهٔ قدرمطلق‌ها و سپس عرض تابع در این نقاط را محاسبه می‌کنیم:

$$y=|x-۱|-|x-۲| \Rightarrow \begin{cases} A\ \begin{array}{|c} ۱ \\ -۱ \end{array} \\ B\ \begin{array}{|c} ۲ \\ ۱ \end{array} \end{cases} \Rightarrow$$



پاره‌خطی که دو نیم‌خط موازی محور xها را به هم وصل می‌کند، همان پاره‌خط AB است. $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-(-۱)}{۲-۱}=۲$

۱۹۵- گزینهٔ نمودار تابع را رسم می‌کنیم و ناحیهٔ موردنظر را پیدا می‌کنیم و بعد مساحتش را محاسبه می‌کنیم: (برای رسم از انتقال استفاده می‌کنیم.)



ناحیهٔ موردنظر ناحیهٔ رنگی است. مساحت این ناحیه برابر است با:

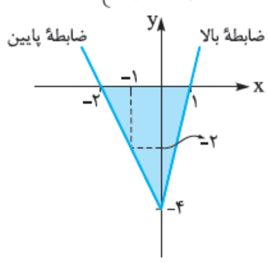
$$S=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲}=\frac{(۳-(-۳))\times ۳}{۲}=\frac{۶\times ۳}{۲}=۹$$

۱۹۶- گزینهٔ با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، قدرمطلق را حذف و نمودار را رسم می‌کنیم:

$$y=۳|x|+x-۴=\begin{cases} ۳x+x-۴ & x\geq ۰ \\ -۳x+x-۴ & x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases} ۴x-۴ & x\geq ۰ \Rightarrow (۰,-۴),(۱,۰) \\ -۲x-۴ & x<۰ \Rightarrow (۰,-۴),(-۱,-۲) \end{cases}$$

قبل از رسم دقت کنید ریشهٔ ضابطهٔ بالا $x=۱$ و ریشهٔ ضابطهٔ پایین $x=-۲$ است $(-۲x-۴=۰ \Rightarrow x=-۲)$ پس نمودار تابع به صورت مقابل است:



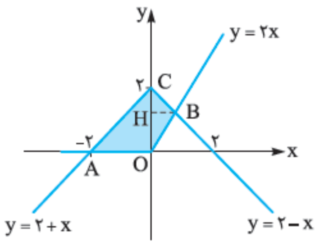
$S_{\text{رنگی}}$: مساحت محدود به نمودار و محور xها

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=\frac{(۱-(-۲))\times(۴)}{۲}=\frac{۳\times ۴}{۲}=۶$$

۱۹۷- گزینهٔ نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$y=x+|x| =\begin{cases} x+x=۲x\ ,\ x\geq ۰ \\ x-x=۰\ ,\ x<۰ \end{cases}$$

$$y=۲-|x| =\begin{cases} ۲-x\ ,\ x\geq ۰ \\ ۲+x\ ,\ x<۰ \end{cases}$$



باید مساحت چهارضلعی AOBC را محاسبه کنیم:

$$S_{AOBC}=S_{AOC}+S_{OBC}=\frac{OC\times AO}{۲}+\frac{OC\times BH}{۲}$$

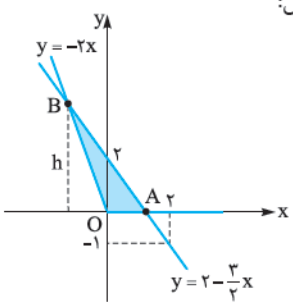
برای محاسبهٔ BH باید طول نقطهٔ B را حساب کنیم. نقطهٔ B از تلاقی دو خط $y=۲x$ و $y=۲-x$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y=۲x \\ y=۲-x \end{cases} \Rightarrow ۲x=۲-x \Rightarrow ۳x=۲ \Rightarrow x_B=\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه:

$$S_{AOBC}=\frac{۲\times ۲}{۲}+\frac{۲\times\frac{۲}{۳}}{۲}=۲+\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

۱۹۸- گزینهٔ اول شکل:



$$y_۱=|x|-x=\begin{cases} x-x & x\geq ۰ \\ -x-x & x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_۱=\begin{cases} ۰ & x\geq ۰ \Rightarrow (۰,۰),(۱,۰) \\ -۲x & x<۰ \Rightarrow (۰,۰),(-۱,۲) \end{cases}$$

$$y_۲=۲-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow (۰,۲),(۲,-۱)$$

برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ رنگی (مثلث OAB) باید مختصات نقاط A و B را حساب کنیم.

ریشهٔ $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ است. مختصات A:

$$\Rightarrow ۲-\frac{۳}{۲}x=۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x=۲ \Rightarrow x_A=\frac{۴}{۳}$$

تلاقی $y=-۲x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ است. مختصات B:

$$\Rightarrow -۲x = ۲ - \frac{۳}{۲}x$$

$$\Rightarrow -۲x + \frac{۳}{۲}x = ۲ \Rightarrow -\frac{x}{۲} = ۲ \Rightarrow x_B = -۴$$

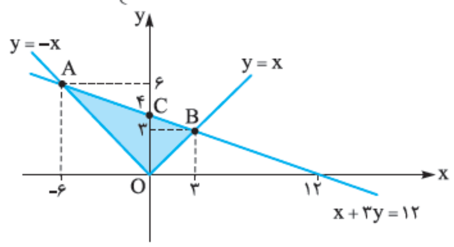
$$\xrightarrow{y=-۲x} y_B = ۸$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{(OA)(h)}{۲} = \frac{(OA)(y_B)}{۲} = \frac{(\frac{۴}{۳})(۸)}{۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

۱۹۹- گزینهٔ ۴ هر یک از نمودارها را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. رسم نمودار $y = |x|$ که کاری ندارد. برای رسم خط هم از مقداردهی استفاده می‌کنیم:

$$x + ۳y = ۱۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱۲ \\ \hline y & ۴ & ۰ \end{array}$$

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$



(روش محاسبهٔ مختصات A و B در انتهای حل آمده)

باید مساحت قسمت رنگی را محاسبه کنیم. می‌توانیم به دو طریق زیر عمل کنیم:

۱

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = S_{\overset{\Delta}{OAC}} + S_{\overset{\Delta}{OBC}} = \frac{۴ \times ۶}{۲} + \frac{۴ \times ۳}{۲} = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

۲ چون زاویهٔ بین نیم‌خط‌های $y = |x|$، ۹۰ درجه است، پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است.

با توجه به مختصات نقاط A و B و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول OA و OB را می‌یابیم.

$$\begin{cases} OA^۲ = (-۶)^۲ + ۶^۲ \Rightarrow OA = ۶\sqrt{۲} \\ OB^۲ = ۳^۲ + ۳^۲ \Rightarrow OB = ۳\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{(OA)(OB)}{۲} = \frac{(۶\sqrt{۲})(۳\sqrt{۲})}{۲} = ۱۸$$

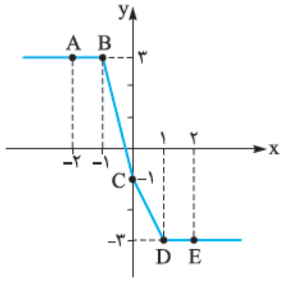
برای محاسبهٔ مختصات A و B به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مختصات A:

$$\begin{cases} y = -x \\ x + ۳y = ۱۲ \xrightarrow{y=-x} -۲x = ۱۲ \Rightarrow x = -۶ \\ \xrightarrow{y=-x} y = ۶ \Rightarrow A(-۶, ۶) \end{cases}$$

مختصات B هم از تلاقی دو خط $y = x$ و $x + ۳y = ۱۲$ به‌دست می‌آید.

۲۰۰- گزینهٔ ۲ از روشی که در درس‌نامه گفتیم، نمودار تابع را سریع رسم می‌کنیم.



$$A\left|\begin{matrix} -۲ \\ ۳ \end{matrix}\right., \quad E\left|\begin{matrix} ۲ \\ -۳ \end{matrix}\right.$$

$$\underbrace{B\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۳ \end{matrix}\right., C\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۱ \end{matrix}\right., D\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۳ \end{matrix}\right.,}_{\text{ریشهٔ قدرمطلق‌ها}}$$

در نتیجه کم‌ترین مقدار تابع ۳- است.

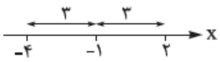
۲۰۱- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ نقطهٔ x از ۱- روی محور اعداد حقیقی ($|x+۱|$) برابر ۳ است؛ پس:

$$|x+۱| = ۳ \Rightarrow x + ۱ = \pm ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲ \\ x + ۱ = -۳ \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مقادیر} = ۲ + (-۴) = -۲$$

از خود محور اعداد حقیقی هم می‌توانید استفاده کنید:



$$\Rightarrow \text{جواب‌ها}: x = ۲, x = -۴$$

۲۰۲- گزینهٔ ۱

$$||x| - ۳| = ۱ \Rightarrow |x| - ۳ = \pm ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| - ۳ = ۱ \Rightarrow |x| = ۴ \Rightarrow x = \pm ۴ \\ |x| - ۳ = -۱ \Rightarrow |x| = ۲ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۲

$$|۳x + ۲| = |x - ۱| \Rightarrow ۳x + ۲ = \pm(x - ۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x + ۲ = x - ۱ \Rightarrow ۲x = -۳ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲} \\ ۳x + ۲ = -x + ۱ \Rightarrow ۴x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها} = \left|-\frac{۳}{۲} - (-\frac{۱}{۴})\right| = \left|-\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۴}\right|$$

$$= \left|\frac{-۶ + ۱}{۴}\right| = \frac{۵}{۴}$$

۲۰۴- گزینهٔ ۳ طول نقطه را x در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ x از ۳ ($|x-۳|$)، چهار برابر فاصله‌اش از ۱- ($|x+۱|$) است:

$$|x - ۳| = ۴|x + ۱| \Rightarrow x - ۳ = \pm ۴(x + ۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۴(x + ۱) \Rightarrow x - ۳ = ۴x + ۴ \\ \Rightarrow ۳x = -۷ \Rightarrow x = -\frac{۷}{۳} \\ x - ۳ = -۴(x + ۱) \Rightarrow x - ۳ = -۴x - ۴ \\ \Rightarrow ۵x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۵} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب جواب‌ها} = (-\frac{۷}{۳})(-\frac{۱}{۵}) = \frac{۷}{۱۵}$$

۲۰۵- گزینهٔ ۳ با شرط $۳x+۳\geq ۰$ داریم:

$$|x^۲-۱|=۳x+۳ \Rightarrow x^۲-۱=\pm(۳x+۳)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲-۱=۳x+۳ \Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰ \\ x^۲-۱=-۳x-۳ \Rightarrow x^۲+۳x+۲=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-۴)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۱, x=۴ \\ \xrightarrow{۳x+۳\geq ۰} x=-۱, x=۴ \\ (x+۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=-۱, x=-۲ \\ \xrightarrow{۳x+۳\geq ۰} x=-۱ \end{cases}$$

($x=-۲$ در شرط صدق نمی‌کند.)

پس معادله دو ریشهٔ $x=-۱$ و $x=۴$ دارد.

۲۰۶- گزینهٔ ۳ $x+\frac{۱}{x}=\pm ۲/۵$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\times ۲x} ۲x^۲+۲=۵x \\ \Rightarrow ۲x^۲-۵x+۲=۰ \\ x+\frac{۱}{x}=-\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\times ۲x} ۲x^۲+۲=-۵x \\ \Rightarrow ۲x^۲+۵x+۲=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۴(۲)(۲)}}{۲(۲)}=\frac{۵\pm ۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases} \\ x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵-۴(۲)(۲)}}{۲(۲)}=\frac{-۵\pm ۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۱}{۲} \\ x=-۲ \end{cases} \end{cases}$$

پس معادله دو ریشهٔ منفی و دو ریشهٔ مثبت دارد.

۲۰۷- گزینهٔ ۳ اول مخرج‌مشترک می‌گیریم و بعد از روابط $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$ و $|xy|=|x||y|$ استفاده می‌کنیم:

$$|x-\frac{۱}{x}|=|x+۱| \Rightarrow |\frac{x^۲-۱}{x}|=|x+۱|$$

$$\Rightarrow \frac{|x^۲-۱|}{|x|}=|x+۱| \Rightarrow \frac{|(x-۱)(x+۱)|}{|x|}=|x+۱|$$

$$\Rightarrow \frac{|x-۱||x+۱|}{|x|}=|x+۱|$$

عبارت یکسان $|x+۱|$ طرفین تساوی وجود دارد، پس با در نظر گرفتن ریشهٔ این عبارت به عنوان ریشهٔ معادله، اجازهٔ حذف داریم:

$$\xrightarrow{|x+۱|=۰ \Rightarrow x=-۱} \frac{|x-۱|}{|x|}=۱$$

حالا با شرط $x\neq ۰$، طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$|x-۱|=|x| \Rightarrow x-۱=\pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=x \Rightarrow -۱=۰ \times \\ x-۱=-x \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس معادله دو ریشهٔ $x=-۱$ و $x=\frac{۱}{۲}$ دارد و در نتیجه:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها}=|\frac{۱}{۲}-(-۱)|=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۲۰۸- گزینهٔ ۳ از تعیین علامت قدرمطلق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq ۱: x(x-۱)=۲ \Rightarrow x^۲-x=۲ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \\ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۱, ۲ \xrightarrow{x\geq ۱} x=۲ \\ x<۱: x(-x+۱)=۲ \Rightarrow -x^۲+x=۲ \Rightarrow x^۲-x+۲=۰ \\ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

پس معادله تنها یک جواب مثبت $x=۲$ دارد.

۲۰۹- گزینهٔ ۳ باز هم از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq -۱: x^۲+۲x-۳(x+۱)=۳ \\ \Rightarrow x^۲+۲x-۳x-۳=۳ \Rightarrow x^۲-x-۶=۰ \\ x\leq -۱: x^۲+۲x+۳(x+۱)=۳ \\ \Rightarrow x^۲+۲x+۳x+۳=۳ \Rightarrow x^۲+۵x=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۳, x=-۲ \\ \xrightarrow{x\geq -۱} x=۳ \\ x(x+۵)=۰ \Rightarrow x=۰, x=-۵ \\ \xrightarrow{x\leq -۱} x=-۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=۳(-۵)=-۱۵$$

۲۱۰- گزینهٔ ۲ از تعیین علامت داخلی‌ترین قدرمطلق شروع می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq -۱: |x-(x+۱)|=۳ \Rightarrow ۱=۳ \times \\ x\leq -۱: |x-(-(x+۱))|=۳ \\ \Rightarrow |x+x+۱|=۳ \Rightarrow |۲x+۱|=۳ \Rightarrow ۲x+۱=\pm ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۳ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱ \\ \xrightarrow{x\leq -۱} \text{غیرقابل قبول} \\ ۲x+۱=-۳ \Rightarrow ۲x=-۴ \Rightarrow x=-۲ \\ \xrightarrow{x\leq -۱} x=-۲ \end{cases}$$

پس معادله یک جواب $x=-۲$ دارد.

۲۱۱- گزینهٔ ۱ با توجه به تساوی داده‌شده داریم:

$$x^۲+|x^۲-۱|=۱ \Rightarrow |\underbrace{x^۲-۱}_{u}|=\underbrace{۱-x^۲}_{-u}$$

$$\xrightarrow{|u|=-u \Rightarrow u\leq ۰} x^۲-۱\leq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱$$

$$\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

حالا با توجه به حدود x حاصل عبارت داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$-۱\leq x\leq ۱: ۲|\underbrace{x-۵}_{-}|-|\underbrace{۲x-۳}_{-}|$$

$$=۲(-(x-۵))-(-(۲x-۳))$$

$$=-۲x+۱۰+۲x-۳=۷$$

۲۱۲- گزینهٔ ۴ *دو جور این سؤال رو حل می‌کنم براتون!*

روش اول: ریشهٔ قدرمطلق‌ها $x=۰$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ است؛ پس سه‌تا شرط داریم:

① $x\le -\frac{۱}{۲}: -x-۲x-۱=x^۲-۱$

$$\Rightarrow x^۲+۳x=۰ \Rightarrow x(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰,-۳ \xrightarrow{x\le -\frac{۱}{۲}} x=-۳$$

② $-\frac{۱}{۲}\le x\le ۰: -x+۲x+۱=x^۲-۱$

$$\Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow x=-۱,۲ \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}\le x\le ۰} \text{غ‌ق‌ق}$$

③ $x\ge ۰: x+۲x+۱=x^۲-۱$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۲=۰$$

$\xrightarrow[\text{یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی}]{\frac{c}{a}<۰}$ چون $x\ge ۰$ است، فقط ریشهٔ مثبت قابل‌قبول است

پس معادله دوتا ریشه دارد. یکی مثبت و یکی منفی.

روش دوم: طرف چپ همواره مثبت است، پس باید طرف راست هم مثبت باشد: $x^۲-۱>۰ \Rightarrow x^۲>۱ \Rightarrow x<-۱$ یا $x>۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<-۱: -x-۲x-۱=x^۲-۱ \\ \Rightarrow x^۲+۳x=۰ \Rightarrow x=۰,-۳ \xrightarrow{x<-۱} x=-۳ \\ x>۱: x+۲x+۱=x^۲-۱ \Rightarrow x^۲-۳x-۲=۰ \\ \Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۸}}{۲} \xrightarrow{x>۱} x=\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲} \end{cases}$$

پس معادله دوتا ریشه دارد.

۲۱۳- گزینهٔ ۳ باید با تعیین علامت قدرمطلق‌ها را حذف کنیم. اما یک اتفاق خوب این‌که عبارت $x^۲-۴x+۵$ یک عبارت همواره مثبت است (چون $\Delta<۰$ و $a>۰$). پس:

$$|\underbrace{x^۲-۴x+۵}_{+}|+|x-۲|=۱$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۵+|x-۲|=۱$$

حالا از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge ۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۵+x-۲=۱ \Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰ \\ \Rightarrow x=۱, x=۲ \xrightarrow{x\ge ۲} x=۲ \\ x<۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۵-x+۲=۱ \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰ \\ \Rightarrow x=۲, x=۳ \xrightarrow{x<۲} \text{هیچ‌کدام از ریشه‌ها قابل‌قبول نیستند.} \end{cases}$$

پس معادله فقط یک ریشهٔ ۲ دارد.

۲۱۴- گزینهٔ ۱

$$\begin{cases} |x^۲+x|\ge ۰ \\ x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲+۴\ge ۴ \Rightarrow |x^۲+۴|\ge ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x^۲+x|+|x^۲+۴|\ge ۴$$

عبارت طرف چپ هیچ‌وقت برابر ۳ نمی‌شود؛ پس معادله جواب ندارد.

۲۱۵- گزینهٔ ۴ از نامساوی مثلثی استفاده می‌کنیم:

$$|x-۱|+|۲x+۱|=۳|x|$$

$$\xrightarrow{۳|x|=|۳x|} |\underbrace{x-۱}_{a}|+|\underbrace{۲x+۱}_{b}|=|\underbrace{۳x}_{a+b}|$$

پس طبق حالت‌های خاص نامساوی مثلثی باید:

$$a.b\ge ۰ \Rightarrow (x-۱)(۲x+۱)\ge ۰ \Rightarrow x\le -\frac{۱}{۲} \text{ یا } x\ge ۱$$

پس مجموعه‌جواب نامعادله، بی‌شمار جواب طبیعی دارد.

۲۱۶- گزینهٔ ۱ طول نقطهٔ موردنظر را x در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} |x+۲|: \text{فاصلهٔ } x \text{ از } -۲ \\ |x-۳|: \text{فاصلهٔ } x \text{ از } ۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع فاصله‌ها برابر ۶ است}} |x+۲|+|x-۳|=۶$$

ریشهٔ قدرمطلق‌ها $x=-۲$ و $x=۳$ است پس:

$$\begin{cases} x\le -۲: -x-۲-x+۳=۶ \Rightarrow ۲x=-۵ \\ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲} \xrightarrow{x\le -۲} x=-\frac{۵}{۲} \checkmark \\ -۲\le x\le ۳: x+۲-x+۳=۶ \Rightarrow ۵=۶ \times \\ x\ge ۳: x+۲+x-۳=۶ \Rightarrow ۲x=۷ \\ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲} \xrightarrow{x\ge ۳} x=\frac{۷}{۲} \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع طول‌ها}=\frac{۷}{۲}+(\frac{-۵}{۲})=۱$$

می‌توانید از نکات آخر درس‌نامه هم استفاده کنید و معادله را سریع‌تر حل کنید:

$$|\underset{\substack{\downarrow \\ a=-۲}}{x+۲}|+|\underset{\substack{\downarrow \\ b=۳}}{x-۳}|=\underset{\substack{\downarrow \\ k}}{۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{a+b+k}{۲}=\frac{-۲+۳+۶}{۲}=\frac{۷}{۲} \\ x_۲=\frac{a+b-k}{۲}=\frac{-۲+۳-۶}{۲}=-\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

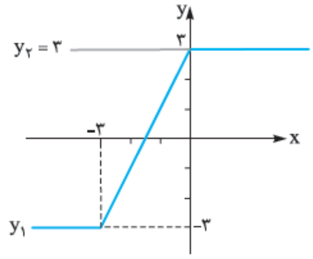
۲۱۷- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{(x+۳)^۲}}{|x|+۳}=۱ \Rightarrow \frac{|x+۳|}{|x|+۳}=۱ \Rightarrow |x+۳|=|x|+۳$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x+۳|-|x|}_{y_۱}=\underbrace{۳}_{y_۲}$$

نمودار $y_۱=|x+۳|-|x|$ آبشاری است! پس نمودار را رسم می‌کنیم و با خط $y=۳$ تلاقی می‌دهیم.

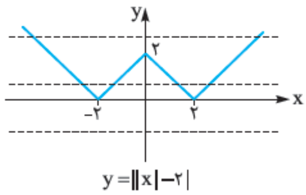
$$\Rightarrow \begin{cases} A\Big|\begin{matrix}-۳\\-۳\end{matrix} \\ B\Big|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\end{cases} \Rightarrow$$



$y_۱=|x+۳|-|x|$

پس مجموعه‌جواب معادله $x\ge ۰$ است. پس معادله بی‌شمار ریشهٔ مثبت دارد.

۲۱۸- گزینهٔ ۱ نمودار سمت چپ تساوی را رسم می‌کنیم. ($|x|$ را دو واحد پایین می‌آوریم، بعد قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.)



برای این‌که معادله فقط دوتا ریشه داشته باشد، باید خط افقی $y=a$ نمودار تابع $y=||x|-۲|$ را در دوتا نقطه قطع کند. با توجه به خطوط افقی رسم‌شده، باید: $a>۲$

۲۱۹- گزینهٔ ۳ از روش هندسی استفاده می‌کنیم:

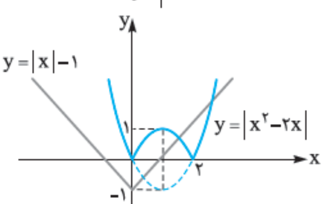
$$|x-۲|+\frac{۱}{|x|}=۱ \xrightarrow[x\neq ۰]{\times|x|} |x^۲-۲x|+۱=|x|$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x^۲-۲x|}_{y_۱}=\underbrace{|x|-۱}_{y_۲}$$

برای رسم $y_۱$، اول نمودار $y=x^۲-۲x$ را رسم می‌کنیم، بعد قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

$$y=x^۲-۲x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & -۱ & ۰ \end{array}$$

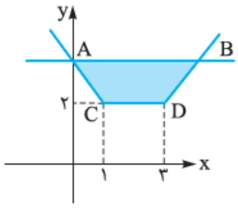
$\Rightarrow$



دو نمودار در دو نقطه همدیگر را قطع کردند؛ پس معادله دو ریشه دارد.

۲۲۰- گزینهٔ ۴ نمودار $y=|x-۱|+|x-۳|$ به صورت گلدانی است!

$$y=\underbrace{|x-۱|}_{x=۱:\text{ریشه}}+\underbrace{|x-۳|}_{x=۳:\text{ریشه}}$$



$$\Rightarrow C\Big|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\ ,\ D\Big|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix} \Rightarrow$$

برای محاسبهٔ مختصات A و B باید معادلهٔ $|x-۱|+|x-۳|=۴$ را حل کنیم. از نکات درس‌نامه استفاده می‌کنیم)

$$\begin{cases} x_۱=\dfrac{a+b+k}{۲}=\dfrac{۱+۳+۴}{۲}=۴ \Rightarrow x_B=۴ \\ x_۲=\dfrac{a+b-k}{۲}=\dfrac{۱+۳-۴}{۲}=۰ \Rightarrow x_A=۰ \end{cases}$$

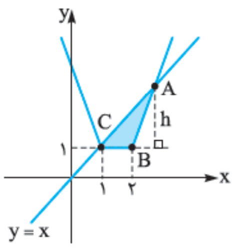
$$S_{\text{رنگی}}=\frac{\text{مجموع دوقاعده}}{۲}\times\text{ارتفاع}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{۲}\times ۲$$

$$=\frac{۴+۲}{۲}\times ۲=۶$$

۲۲۱- گزینهٔ ۲ نمودار $f(x)=|x-۲|+|x-۱|$ به صورت گلدانی است. پس نمودار را رسم و با خط $y=x$ تلاقی می‌دهیم و ناحیهٔ محصور را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=|x-۲|+|x-۱| \Rightarrow A\Big|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\ ,\ B\Big|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}$$

$\Rightarrow$



برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ رنگی (مثلث ABC) به عرض نقطهٔ A احتیاج داریم. پس باید نقطهٔ تلاقی دو تابع را پیدا کنیم. اگر دقت کنید طول این نقطه بزرگ‌تر از ۲ است. پس به ازای $x>۲$ نقطهٔ تلاقی را می‌یابیم:

$$|\underbrace{x-۲}_{+}|+|\underbrace{x-۱}_{+}|=x \xrightarrow{x>۲} x-۲+x-۱=x$$

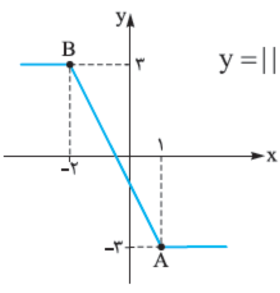
$$\Rightarrow x_A=۳ \xrightarrow{y=x} y_A=۳$$

$$\Rightarrow h=y_A-۱=۳-۱=۲$$

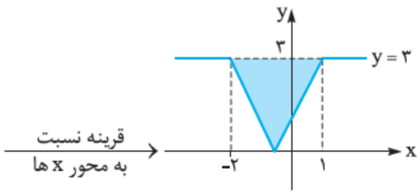
پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\underset{ABC}{\triangle}}=\frac{BC\times h}{۲}=\frac{۱\times ۲}{۲}=۱$$

۲۲۲- گزینهٔ ۱ باید نمودار تابع $y=||x-۱|-|x+۲||$ را رسم کنیم. برای رسم، اول نمودار $y=|x-۱|-|x+۲|$ را رسم می‌کنیم. بعد، قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



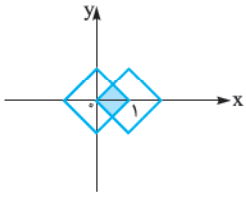
$$y=|x-1|-|x+2| \Rightarrow A\begin{vmatrix}1\\-3\end{vmatrix}, B\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$$



$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=\frac{(1-(-2))\times 3}{2}=4/5$$

۲۲۳- گزینهٔ ۱ نمودار $|x|+|y|=1$، مربعی به مرکز $(0,0)$ و به طول قطر ۲ است.

نمودار $|x-1|+|y|=1$، مربعی به مرکز $(1,0)$ و به طول قطر ۲ است. پس نمودار این دو تابع در یک دستگاه مختصات به صورت مقابل است:



ناحیهٔ محصور، یک مربع به طول قطر یک و به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ است؛

پس: معادله: $|x-\frac{1}{2}|+|y|=\frac{1}{2}$

۲۲۴- گزینهٔ ۳ از رابطهٔ نامساوی مثلثی استفاده می‌کنیم و کم‌ترین مقدار تابع را پیدا می‌کنیم. اول دقت کنید که

$$|x^2-x-1|=|1+x-x^2| \quad (*)$$

پس:

$$f(x)=|x^2-x-1|+|x^2-x+2| \overset{(*)}{=} |1+x-x^2|+|x^2-x+2|$$

از آن‌جا که $|a|+|b|\ge|a+b|$، بنابراین:

$$|1+x-x^2|+|x^2-x+2|\ge |(1+x-x^2)+(x^2-x+2)|=3$$

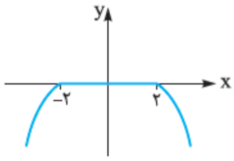
$$\Rightarrow f(x)\ge 3$$

پس کم‌ترین مقدار تابع برابر ۳ است.

۲۲۵- گزینهٔ ۴ اول به عبارت طرف چپ معادله نگاه کنید. در فاصله‌ای که $f(x)<0$، قدرمطلق را با علامت منفی و در فاصله‌ای که $f(x)\ge 0$، قدرمطلق را با علامت مثبت حذف می‌کنیم:

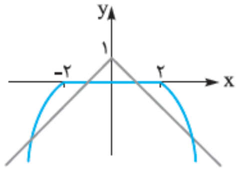
$$\begin{cases} x<-2 \text{ یا } x>2 \xrightarrow{f(x)<0} \dfrac{f(x)-|\overset{-}{\overbrace{f(x)}}|}{2} \\ =\dfrac{f(x)+f(x)}{2}=f(x) \\ -2\le x\le 2 \xrightarrow{f(x)\ge 0} \dfrac{f(x)-|\overset{+}{\overbrace{f(x)}}|}{2}=\dfrac{f(x)-f(x)}{2}=0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع $y=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$ مطابق شکل است:



(به ازای $-2\le x\le 2$، مقدار تابع صفر و در بقیهٔ فاصله‌ها خود نمودار $f(x)$ باید رسم شود.)

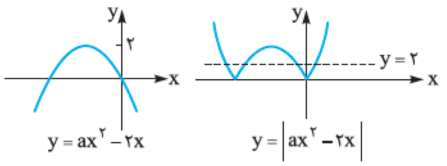
حالا این نمودار را با نمودار تابع $y_1=1-|x|$ تلاقی می‌دهیم:



با توجه به شکل، دو نمودار در چهار نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. پس معادله ۴تا ریشه دارد.

۲۲۶- گزینهٔ ۴ برای این‌که معادله ۴ جواب داشته باشد دو حالت می‌تواند رخ دهد.

① تابع درجه دوم $y=ax^2-2x$ ماکزیممی بزرگ‌تر از دو داشته باشد تا نمودار $y=|ax^2-2x|$ به صورت زیر شود:

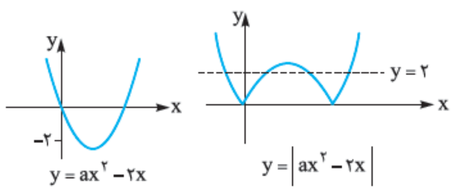


پس باید:

$$\begin{cases} a<0 : \text{ماکزیمم داره} \\ \text{ماکزیمم}>2 \Rightarrow -\dfrac{\Delta}{4a}>2 \Rightarrow -\dfrac{4}{4a}>2 \Rightarrow -\dfrac{1}{a}>2 \\ \xrightarrow[a<0]{\times a} -1<2a \Rightarrow a>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<a<0$$

② تابع درجه‌دوم $y=ax^2-2x$ مینیممی کم‌تر از -2 داشته باشد تا نمودار $y=|ax^2-2x|$ به صورت زیر شود:



پس باید:

$$\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}<-2 \Rightarrow -\dfrac{4}{4a}<-2 \Rightarrow -\dfrac{1}{a}<-2 \xrightarrow{a>0} \\ -2a>-1 \xrightarrow{\div(-2)} a<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 0<a<\frac{1}{2}$$

پس حدود a برابر است با:

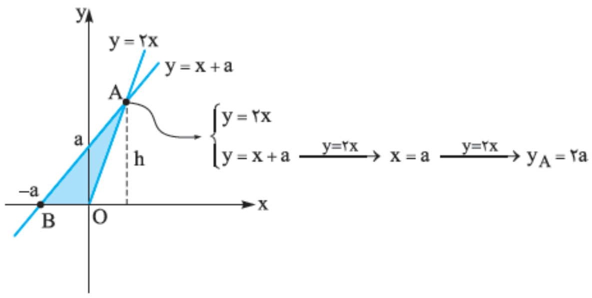
$$(-\frac{1}{2}<a<0)\cup(0<a<\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2})-\{0\}$$

۲۲۷- گزینهٔ ۱

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x & x \geq ۰ \\ x - x & x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_۱ = \begin{cases} ۲x & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

خط $y = x + a$ خطی موازی خط $y = x$ است. پس وضعیت دو نمودار نسبت به هم در یک دستگاه به صورت زیر است:



$$S_{\underset{OAB}{\Delta}} = \frac{(OB) \times h}{۲} = \frac{(OB)(y_A)}{۲} = \frac{(a)(۲a)}{۲} = a^۲$$

مساحت ناحیهٔ محصور ۴ است؛ پس:

$$a^۲ = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

دقت کنید a نمی‌تواند -۲ باشد، چون در این حالت خط $y = x - ۲$ $\Leftarrow$ $y = x + a$ نمودار $y = x + |x|$ را قطع نمی‌کند.

۲۲۸- گزینهٔ ۲ از نامساوی مثلثی و حالت‌های خاصش استفاده می‌کنیم. *اینها*: (فقط دقت کنید که چون $x^۲ + ۱ > ۰$ پس می‌توانیم به جای $x^۲ + ۱$، $|x^۲ + ۱|$ قرار دهیم.)

$$\underbrace{|x^۲ - x|}_{a} + \underbrace{|x + ۱|}_{b} = \underbrace{|x^۲ + ۱|}_{a+b}$$

$$\xrightarrow{ab \geq ۰} (x^۲ - x)(x + ۱) \geq ۰$$

$$\Rightarrow x(x - ۱)(x + ۱) \geq ۰$$

x		−۱		۰		۱	
عبارت	−		+		−		+

$$\Rightarrow x \in [-۱, ۰] \cup [۱, +\infty)$$

پس تنها ریشهٔ صحیح منفی معادله $x = -۱$ است.