

Drhs



@drhs789

www.drhs.ir

جبر و معادله

- ۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
- ۲ معادلات درجه دوم
- ۳ معادلات گویا و گنگ
- ۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن
- ۵ آشنایی با هندسه تحلیلی

فصل ۱



الف) الهام از معماری دنباله‌ای مقبره دانیال نبی در بناهای نوین (موزه آبادان)
ب) تصویر مقبره دانیال نبی بر روی اسکناس پنج ریالی سری ۱۳۲۳ (تصویر از گنجینه تمبر و اسکناس مجموعه موزه‌های آستان قدس رضوی)
ب) نمایی از بالای گنبد

آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش در استان خوزستان این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

تهیه و تنظیم :

سامرند مجیدی

◆ دنباله حسابی:



$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

(۱) جمله عمومی:


$$d = a_n - a_{n-1} \text{ در جملات متوالی}$$

(۲) قدر نسبت:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \text{ در جملات غیر متوالی}$$

یادآوری (۳) واسطه حسابی: اگر a و b و c سه جمله متوالی باشند: $2b = a + c$ (واسطه حسابی بین a و c)مثال ۱  در یک دنباله‌ی حسابی جملات پنجم و هشتم به ترتیب ۱۱، ۲۰ می‌باشند این دنباله را مشخص کنید.مثال ۲  چه تعداد از اعداد دو رقمی بر ۳ بخش پذیر می‌باشند؟

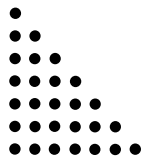
$$a_7 + a_{22} = a_7 + a_{18}$$

مثال ۳  در یک دنباله‌ی حسابی ثابت کنید:نکته: 

مقداری دگمه به شکل زیر آرایش شده است. تعداد این دگمه ها چند تاست؟


مثال ۴ 

روش اول :



روش دوم :

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n را به دست آورید:

مثال ۵ 

روش اول (به روش گاوس) :

روش دوم (به کمک شکل) :

بر محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه‌ی متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم تعداد کل وترهای

مثال ۶ 


تشکیل شده را به دست آورید.


◆ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی:① روش اول: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-3)d, a_1 + (n-2)d, a_1 + (n-1)d$ $S_n =$


$$s_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

② روش دوم: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ $S_n =$


$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

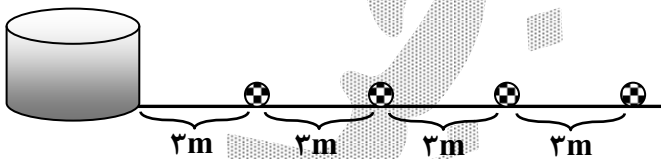
مثال ۷  مجموع صد جمله اول دنباله حسابی $3, 7, 11, \dots$ را بدست آورید.مثال ۸  مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را بدست آورید.مثال ۹  در یک دنباله حسابی $S_n = 5n^2 + 3n$ می‌باشد a_1 و جمله‌ی عمومی دنباله را بدست آورید.


بکته: بکته: 

مثال ۱۰  مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی ، ۱۲ ، ۷ برابر با ۸۵ می‌شود؟

مثال ۱۱  حداکثر چند جمله از جملات دنباله‌ی ، ۲ ، $\frac{5}{2}$ ، ۳ را با هم جمع کنیم تا حاصل عددی مثبت گردد؟

مثال ۱۲  تعدادی توپ روی یک خط مستقیم به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا سبد ۳ متر است. دونه‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونه مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



مثال ۱۳  مجموع اعداد ۳ رقمی که باقیمانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۱۱ عدد ۷ باشد را بدست آورید.

◆ دنباله هندسی :


$$a_n = aq^{n-1} \quad (1) \text{ جمله عمومی:}$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (2) \text{ قدر نسبت:}$$

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \quad \text{در جملات غیر متوالی}$$


$$(3) \text{ واسطه حسابی: اگر } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشند: } b^2 = a \times c$$


یادآوری 

مثال ۱۴  در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی سوم برابر ۷ و جمله‌ی ششم برابر ۵۶ است. جمله‌ی نهم را به دست آورید.

$$a_7 \cdot a_6 = ? \quad (2)$$

مثال ۱۵  در یک دنباله‌ی هندسی $a_3 \times a_7 = 64$. مطلوب است: (۱) $a_5 = ?$


مثال ۱۶  در یک دنباله‌ی هندسی اگر $m + n = s + r$ باشد نشان دهید: $a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_r$


بکته: 


◆ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله هندسی :

$$\left. \begin{array}{l} S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} \\ \times q \\ qS = \end{array} \right\} \xrightarrow{-}$$

$$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

مثال ۱۷  مجموع ۸ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی ۱۷ برابر مجموع ۴ جمله‌ی اول آن است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

مثال ۱۸  اگر جملات اول و هفتم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۳ و ۲۴ باشند. مجموع ۶ جمله‌ی اول این دنباله چقدر است؟

مثال ۱۹  مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی $\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}$ را به دست آورید.

مثال ۲۰ 

برای محافظت از تابش مضر مواد رادیو اکتیویته لایه های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آنها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد.

مثال ۲۱ 

در مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد وسط های اضلاع را متوالیاً به هم وصل می کنیم تا مثلث متساوی الاضلاع جدیدی به وجود آید و این کار را ادامه می دهیم حداکثر تا مرحله ی چندم می توانیم این عمل را تکرار کنیم تا مجموع محیط مثلث ها از $\frac{5}{98}$ تجاوز نکند؟

مثال ۲۲ 


(مسئله شطرنج) شطرنج ۶۴ خانه دارد. اگر در خانه اول یک گندم و در خانه ی دوم ۲ گندم و در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم قرار دهیم و وزن هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم مجموع همی گندم اختصاص یافته به خانه های این شطرنج چقدر خواهد بود؟


مثال ۲۳ 


به کمک مجموع جملات دنباله هندسی نشان دهید :

n عددی فرد: $1 + x^n = (1 + x)(1 - x + x^2 - \dots + x^{n-1})$ (الف)

n عددی زوج: $x^n - 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + x - 1)$ ب)

مثال ۲۴  باقیمانده تقسیم $5^{34} - 251$ را بر ۱۷ بیابید.

نکته: 

مثال ۲۵  عبارت های زیر را ساده کنید:

الف)
$$\frac{(1+t+t^2+t^3+t^4)(1-t)}{t^{10}-1} =$$

ب)
$$\frac{(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{x^{10}+x^5+1} =$$

تمرین ۱

تمرین ۱: اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d را می‌دهند. مساحت این مثلث را بر حسب d بدست آورید.

تمرین ۲: در یک دنباله‌ی حسابی $a_5^2 - a_8^2 = 2100$ و $a_{10} = 35$ ، قدر نسبت این دنباله را حساب کنید.

تمرین ۳: دنباله‌ی عددی $112, \dots, x$ و 120 چند جمله‌ی منفی دارد؟

تمرین ۴: به کمک شکل و به روش گاوس حاصل $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ را به دست آورید.

تمرین ۵: در یک دنباله‌ی حسابی $a_7 + a_{16} = 42$ ، مجموع ۲۲ جمله‌ی اول این دنباله را حساب کنید.

تمرین ۶: در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = n^2 + 4n$ ، مجموع ده جمله‌ی متوالی این دنباله را با شروع از جمله‌ی هشتم به دست آورید.

تمرین ۷: در یک دنباله‌ی هندسی $a_2 - a_1 = 6$ و $a_4 - a_3 = 54$ ، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

تمرین ۸: در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی دهم ۹ برابر جمله‌ی ششم است اگر جمله‌ی سوم برابر ۱۲ باشد مجموع ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.

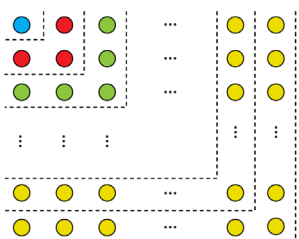
تمرین ۹: حداقل چند جمله از دنباله‌ی $1, 2, \dots, \frac{1}{p}$ را با هم جمع کنیم تا حاصل بزرگتر از ۹۰۰ گردد.

تمرین ۱۰: تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است و مجموع همه این جمله‌ها ده برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد است. قدر نسبت این دنباله هندسی چقدر است؟

تمرین ۲

تمرین ۱: در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

تمرین ۲: الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

تمرین ۳: مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

تمرین ۴: در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

تمرین ۵: جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر ۲۵۵ شود؟

تمرین ۶: طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

تمرین ۷: برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛
الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

تمرین ۳


تمرین ۱: مجموع سه عدد که تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند ۱۲ و مجموع مربعاتشان ۶۶ است. این اعداد را بیابید.

تمرین ۲: مجموع ۵ عدد که تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند ۱۵ و حاصل ضربشان ۱۱۵۵ است. آنها را بیابید.


تمرین ۳: پنج جعبه‌ی متوالی از دنباله‌ی زیر را معین کنید بطوریکه مجموعشان $187/5$ گردد: $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{15}{2}, \dots$

تمرین ۴: چهار عدد تشکیل یک دنباله‌ی حسابی داده‌اند که $a_1 \times a_4 = \frac{91}{9}$ و $a_2 \times a_3 = 11$ می‌باشد. این چهار عدد را بیابید.


تمرین ۵: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع سه جمله اول، مجموع سه جمله آخر و مجموع کل جملات به ترتیب ۱۲ و ۳۸ و ۳۵۰ می‌باشد. تعداد این جملات را به دست آورید.


تمرین ۶: اگر $S_n = -2n^2 + (5+x)n - k + 2$ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد قدر نسبت و جمله اول دنباله را مشخص کنید. 


$$\frac{(m+1)S_m}{(n+1)S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$


تمرین ۷: در دنباله‌ای حسابی داریم: $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ ثابت کنید: 

$$\frac{S_n}{S_{n-2}} = \frac{n+2}{n-2}$$

تمرین ۸: در یک دنباله حسابی $S_1 = 6$ و $S_7 = 105$ ثابت کنید: 

تمرین ۹: در یک دنباله هندسی مجموع دو جمله اول و چهارم ۵۶ و مجموع دو جمله دوم و سوم ۲۴ است این دنباله را مشخص کنید. 

تمرین ۱۰: در یک بانک سالیانه ۱۰٪ سود به حساب سپرده بلند مدت تعلق می‌گیرد اگر حسابی با ۲ میلیون تومان در این بانک باز کنیم. پس از ۱۰ سال موجودی حساب چقدر خواهد بود؟ 

تمرین ۱۱: حاصل هر یک از مجموع‌های زیر را به دست آورید: 

$$S_1 = 54 - 18 + 6 - 2 + \dots + \frac{2}{81}$$

$$S_2 = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \dots + \frac{1}{16}$$

$$S_3 = -\sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{2}}{81}$$

تمرین ۱۲: حاصل هر یک از مجموعه های زیر را به دست آورید.


$$S_1 = 9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{9999 \dots 9}^{n \text{ رقم}}$$

$$S_2 = 4 + 44 + 444 + \dots + \overbrace{444 \dots 4}^{n \text{ رقم}}$$

تمرین ۱۳: در یک دنباله هندسی اولین و سومین و پنجمین جمله را به ترتیب جملات اول و چهارم و ششم یک دنباله حسابی گرفته ایم. اگر جمله اول دنباله حسابی ۵ باشد جمله چهارم آن را حساب کنید.

تمرین ۱۴: مقدار a را به گونه ای تعیین کنید که :

$$\frac{(a^8 + a^4 + 1)(a^3 + a^2 + a + 1)}{a^9 + a^6 + a^3 + 1} = 21$$

تمرین ۱۵: ثابت کنید: 

الف) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$: $n \in \mathbb{N}$

ب) $a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$: n عددی فرد

تمرین ۱۶: درباره دنباله هندسی a_1, a_2, \dots می‌دانیم $a_1 = 1$ و $a_n a_{n+1} = 4^n$ ، مجموع $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ را بدست آورید.

تمرین ۱۷: معادله $1 + x + x^2 + \dots + x^{1397} = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۸: مجموع زیر را محاسبه کنید.

$$S = \frac{2}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{2}{5^{99}} + \frac{4}{5^{100}}$$

تمرین ۱۹: ثابت کنید در هر دنباله هندسی داریم:

$$S_n (S_{2n} - S_n) = (S_{2n} - S_n)^2$$

تمرین ۲۰: مجموع پنجاه جمله اول دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت مثبت برابر ۱ و مجموع پنجاه جمله بعدی آن برابر 5^{100} است. جمله اول و قدر نسبت این دنباله را بیابید.

چند نمونه تست کنکور و تألیفی

تست ۱: بین دو عدد ۱۲، $\frac{۳۹}{۲}$ چهار واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. بزرگ‌ترین عدد بین این چهار واسطه کدام است؟

$$\frac{۳۳}{۲} \quad (۴)$$

$$\frac{۳۵}{۲} \quad (۳)$$

$$۱۷ \quad (۲)$$

$$۱۸ \quad (۱)$$

تست ۲: در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی n ام بصورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول آن کدام است؟

(تقریبی ۱۹)

$$۱۳۰ \quad (۴)$$

$$۹۰ \quad (۳)$$

$$۱۰۵ \quad (۲)$$

$$۱۲۰ \quad (۱)$$

تست ۳: اگر مجموع هشت جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی به جملات $a_1 = 1 + 2p$ و $a_7 = p - 1$ برابر با ۶۰ باشد قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

$$-۷ \quad (۴)$$

$$-۹ \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۹ \quad (۱)$$

تست ۴: اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل یک دنباله‌ی حسابی را می‌دهند نسبت محیط این مثلث به ضلع کوچکتر آن چقدر است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$\frac{۹}{۲} \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$\frac{۷}{۲} \quad (۱)$$

تست ۵: اگر اعداد $۲x - 1$ و $x^2 + 2$ و $۲x + 5$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند مجموع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

$$۳ \quad (۴)$$

$$-۲ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۰ \quad (۱)$$

تست ۶: حاصل $(1-x+x^2-\dots+x^8)(1+x+x^2+\dots+x^8)$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۲)

۵۰۷ (۱) ۵۱۱ (۲) ۵۱۲ (۳) ۵۱۶ (۴)

تست ۷: در یک دنباله‌ی هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن ۳ است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱۰۸ (۴) ۱۲/۶ (۳) ۱۱/۲ (۲) ۱۳/۴ (۱)

تست ۸: در یک دنباله‌ی هندسی مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول ۱۵۳ است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟ (ریاضی ۸۹)

۱۶ (۴) ۸ (۳) ۹ (۲) $\frac{81}{16}$ (۱)

تست ۹: در یک دنباله‌ی هندسی مجموع ده جمله‌ی اول $(4\sqrt{2}+1)$ برابر مجموع ۵ جمله‌ی اول در این دنباله است. مجموع ۸ جمله‌ی اول چند برابر مجموع چهار جمله‌ی اول است؟

۱۷ (۴) ۹ (۳) ۳ (۲) ۵ (۱)

تست ۱۰: دنباله‌ی هندسی $\dots, \frac{1}{4}, x, 2$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

$\frac{23}{16}$ (۴) $\frac{11}{8}$ (۳) $\frac{21}{16}$ (۲) $\frac{41}{32}$ (۱)

تست ۱۱: اعداد $\frac{5}{4}, \dots, y, x, 1$ چهار جمله اول یک دنباله حسابی اند، مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام است؟

(ریاضی قارچ ۸۶)

۶۸ (۴)

۶۷/۵ (۳)

۶۲/۵ (۲)

۵۷ (۱)

تست ۱۲: در یک دنباله حسابی با جمله اول a ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات اضافه شود آنگاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده می شود؟

(ریاضی ۸۳)

۱۹۰ (۴)

۱۸۰ (۳)

۱۷۰ (۲)

۱۶۰ (۱)

تست ۱۳: در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{4}$ کمتر است، مجموع ده جمله اول آن کدام است؟

(مشابه تیربی ۸۲)

۳۰ (۴)

۲۷/۵ (۳)

۲۵ (۲)

۲۲/۵ (۱)

تست ۱۴: در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله صفر است؟

(تیربی قارچ ۸۸)

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

تست ۱۵: در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد جمله دهم کدام است؟

(ریاضی ۹۰)

۳۸ (۴)

۳۶ (۳)

۳۴ (۲)

۳۲ (۱)

تست ۱۶: در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

(ریاضی فارج ۱۵)

۹ (۴)

۸/۵ (۳)

۸ (۲)

۷/۵ (۱)

تست ۱۷: در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جمله اول کدام است؟

(تجربی فارج ۱۵)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

تست ۱۸: مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی بصورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟

(ریاضی فارج ۹۰)

۱۸ (۴)

 $\frac{49}{3}$ (۳) $\frac{29}{3}$ (۲)

۹ (۱)

تست ۱۹: اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد... (۱, ۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹, ۱۰), (۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰) مجموع جملات در دسته بیستم کدام است؟

(تجربی فارج ۹۴)

۴۰۴۰ (۴)

۴۰۳۰ (۳)

۴۰۲۰ (۲)

۴۰۱۰ (۱)

تست ۲۰: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است؟

(تجربی ۱۵)

۸۸۴ (۴)

۸۶۷ (۳)

۸۵۲ (۲)

۸۱۶ (۱)

تست ۲۱: بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است. که پنج عدد حاصل یک دنباله هندسی دهند.

(ریاضی قارج ۹۱)

مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

۴۸۸ (۴)

۴۸۶ (۳)

۴۸۴ (۲)

۴۸۲ (۱)

تست ۲۲: بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل

(ریاضی قارج ۸۸)

داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

$۳۶(\sqrt{۲}+۱)$ (۴)

$۳۰(\sqrt{۲}+۱)$ (۳)

$۴۸\sqrt{۲}$ (۲)

$۳۰(۲+\sqrt{۲})$ (۱)

تست ۲۳: در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، $\frac{۵}{۴}$ مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر

(ریاضی ۱۵)

جمله اول است؟

$\frac{۱}{۴}$ (۴)

$\frac{۵}{۳۲}$ (۳)

$\frac{۱}{۸}$ (۲)

$\frac{۱}{۱۶}$ (۱)

تست ۲۴: تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با

(ریاضی ۹۴)

ردیف فرد باشد قدر نسبت آن کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{۱}{۲}$ (۲)

$\frac{۱}{۳}$ (۱)

تست ۲۵: حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{۱۷}}{۲}$ کدام است؟

(ریاضی قارج ۹۳)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

تست ۲۶: حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{۵}}{۲}$ کدام است؟

(ریاضی ۹۳)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



♦ یادآوری روش‌های حل معادله درجه دوم $: ax^2 + bx + c = 0$


♦ روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $: ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 =$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 \times x_2 =$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a}$$

مثال ۲۶  اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۱) $\alpha + \beta =$

۲) $\alpha \cdot \beta =$

۳) $\alpha^2 + \beta^2 =$

$$\alpha^2 + \beta^2 =$$

۴) $\alpha^3 + \beta^3 =$

$$\alpha^3 + \beta^3 =$$

۵) $\alpha - \beta =$

$$|\alpha - \beta| =$$


۶) $(2\alpha - 2\beta)(2\alpha - 2\beta) =$

۷) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$

۸) $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} =$

۹) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} =$

۱۰) $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha =$

مثال ۲۷  اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بیش ضرایب و ریشه‌ها بدست آورید.

مثال ۲۸ در معادله‌ی $4x^2 - 8x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگتر از ریشه‌ی دیگر است. هر دو ریشه و مقدار m را به دست آورید.

مثال ۲۹ اگر $\alpha = 3, \beta = -5$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند با استفاده از $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ معادله درجه دوم را مشخص کنید.

تَشکیل معادله‌ی درجه دوم با داشتن ریشه‌ها:

مثال ۳۰ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن α, β باشند.

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

مثال ۳۱ معادله‌ی درجه دومی بسازید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشد.

مثال ۳۲ معادله‌ی درجه دومی بسازید که ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ باشند.

مثال ۳۳ معادله‌ی $x^2 - 3x - 7 = 0$ مفروض است. معادله‌ی درجه دومی بسازید که ریشه‌هایش از ۳ برابر ریشه‌های معادله‌ی فوق دو واحد کمتر باشد.

مثال ۳۴ اگر α, β ریشه ای معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ ریشه های $\frac{2}{\alpha} - 3\beta$ و $\frac{2}{\beta} - 3\alpha$ باشد.

مثال ۳۵ محیط یک مستطیل ۳۶ سانتی متر و مساحت آن ۸۰ سانتی متر مربع است. ابعاد این مستطیل را به دست آورید.

نکته: معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض است. معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ درجه دومی که ریشه های آن :

الف - عکس ریشه های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشد ←

ب - قرینه ریشه های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشد ←

الف - عکس و قرینه ریشه های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشد ←

نکته: بحث در وجود و علامت ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ درجه دوم بدون حل آن :

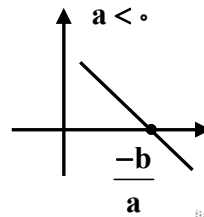
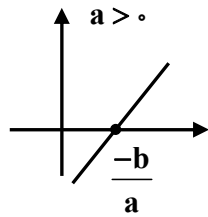
$\Delta > 0 \rightarrow$ معادله دو ریشه دارد	$\rightarrow \frac{c}{a} > 0$ ریشه ها هم علامت	$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow \text{هر دو ریشه مثبت} \\ \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \text{هر دو ریشه منفی} \end{array} \right.$

مثال ۳۶ بدون حل معادله $3x^2 - 5x + 1 = 0$ علامت ریشه های $3x^2 - 5x + 1 = 0$ بحث کنید.

◇ صفرهای تابع:

برای تابع f جواب های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می گوئیم. که در واقع همان نقاط تلاقی نمودار f با محور x ها می باشند.

۱) $y = f(x) = ax + b$



۲) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$a \neq 0$

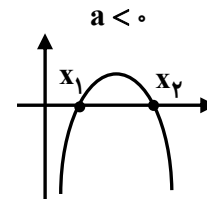
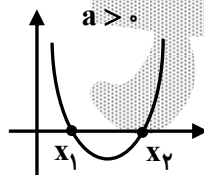
نمودار این توابع به صورت یک سهمی بوده که برای رسم آن به یکی از دو صورت زیر عمل می کنیم.

۱) تابع را به صورت $y = a(x - x_1)^2 + y_1$ نوشته و سپس به کمک مختصات راس سهمی $S \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ و دو نقطه کمکی آن را

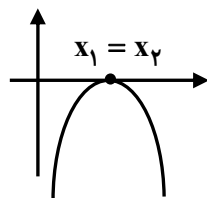
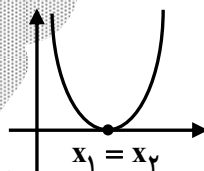
رسم می کنیم.

۲) تابع را مستقیماً به کمک مختصات راس سهمی $S \begin{cases} -\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$ و دو نقطه ی کمکی رسم می کنیم.

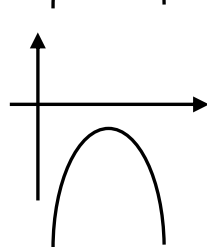
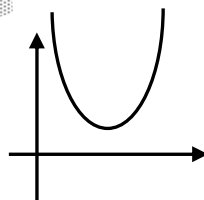
$$\Delta > 0: f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$




$$\Delta = 0: f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$



$$\Delta < 0: f(x) = 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$




نکته: 

- اگر $a > 0$: تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = \frac{-b}{2a}$ دارای مینیمی برابر $y = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

- اگر $a < 0$: تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = \frac{-b}{2a}$ دارای ماکزیمی برابر $y = \frac{-\Delta}{4a}$ است.


- خط $x_s = \frac{-b}{2a}$ همواره محور تقارن نمودار سهمی می باشد $(x_s = \frac{x_1 + x_2}{2})$

یادآوری 


با رسم نمودار صفرهای تابع زیر را به دست آورید: **مثال ۳۷** 

$$1) f(x) = x^2 + 4x + 3$$

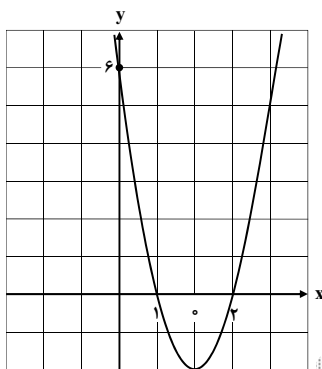
چگونه می‌توان از طریق صفرهای تابع، طول نقطه \max (یا \min) را به دست آورد؟

اگر x', x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید: **مثال ۳۸** 


$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

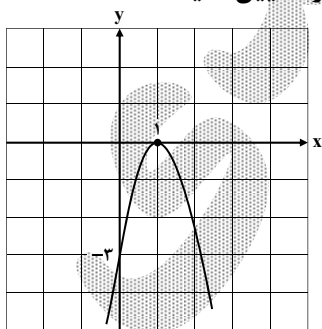
اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ضابطه‌ی سهمی را تعیین کنید. **مثال ۳۹** 

روش اول:



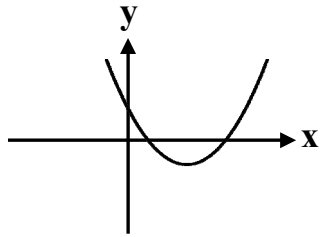
روش دوم:

اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ضابطه‌ی سهمی را تعیین کنید. **مثال ۴۰** 

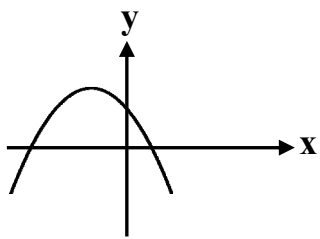




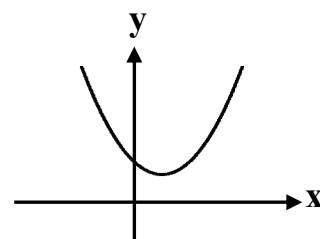
مثال ۴۱ در هر یک از شکل‌های زیر سهمی به معادله‌ی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a و b و c و تعداد و علامت جواب‌های $P(x) = 0$ را تعیین کنید.



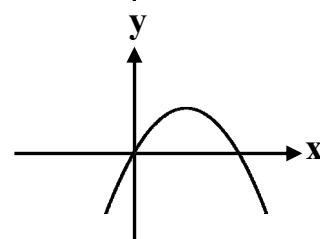
(۱)



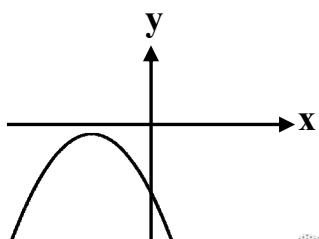
(۲)



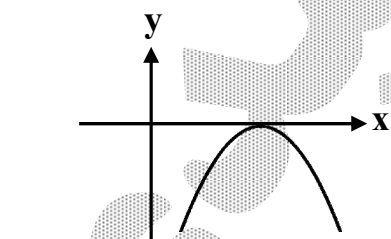
(۳)



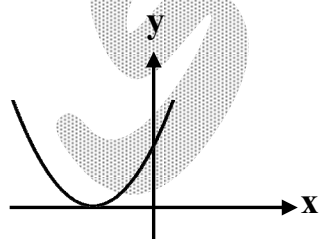
(۴)




(۵)





(۶)



(۷)

مثال ۴۲  اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

مثال ۴۳  مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

نکته:  $x = a$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = 0$ است: (۱) $p(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر است.
 (۲) $(x - a)$ یک عامل (فاکتور) $p(x)$ است.
 (۳) نمودار $y = p(x)$ محور x ها را در نقطه $x = a$ قطع می کند.

مثال ۴۴  صفرهای توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

۱) $f(x) = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2$

۲) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 16$

$$۳) f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - ۸\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - ۹$$

$$۴) f(x) = (x^2 - ۳)^2 + x^2 - ۵$$

◆ حل معادلات به روش هندسی (نموداری):

اگر $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دو تابع باشند طول نقاط تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ خواهد بود و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است.

مثال ۴۵  به روش هندسی معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) (x-1)^2 = 2x+1$$

$$۲) |x| = x^2 - 2x$$

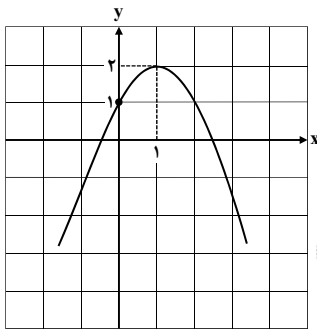
$$۳) x^2 - 1 = |x+1|$$

تمرین ۱

تمرین ۱: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + mx + 8 = 0$ باشند و داشته باشیم $2\beta + \alpha = 10$ ، مقدار m و α و β را بدست آورید.

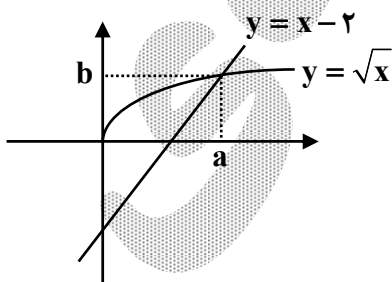
تمرین ۲: به ازای چه مقادیری از m ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + 2m + 3 = 0$ دو عدد صحیح متوالی‌اند؟

تمرین ۳: معادله‌ی $x^2 - 3x - 7 = 0$ مفروض است. معادله‌ی درجه دومی بسازید که:
 الف) ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد.
 ب) ریشه‌هایش عکس و قرینه ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند.




تمرین ۴: نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ بصورت شکل مقابل است.

الف) مقادیر a و b و c را بیابید.
 ب) $f(x)$ را تعیین علامت کنید.



تمرین ۵: با توجه به نمودار مقابل a و b را بیابید:

تمرین ۶: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند حاصل عبارات زیر را بدست آورید: 

۱) $\alpha^r + \beta^r =$

۲) $\frac{\alpha}{\beta-2} + \frac{\beta}{\alpha-2} =$

۳) $\frac{\alpha}{\beta^r} + \frac{\beta}{\alpha^r} =$


۴) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} =$

۵) $\alpha^r - \frac{1}{\beta} + \beta^r - \frac{1}{\alpha} =$


۶) $|\alpha^r - \beta^r| =$

تمرین ۷: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + mx + 1 = 0$ برابر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ می‌باشند؟


تمرین ۸: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + (2m+3)x + 4 = 0$ و $\alpha\beta^2 - 4 = 0$ را بیابید.

تمرین ۹: a را چنان بیابید که رابطه $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6}$ بین ریشه‌های معادله $x^2 - (a+2)x + (a+1) = 0$ برقرار 

باشد.


تمرین ۱۰: معادله یک سهمی را بنویسید که از نقطه $(-2, 0)$ و $(1, 0)$ و $(-3, 5)$ بگذرد. 

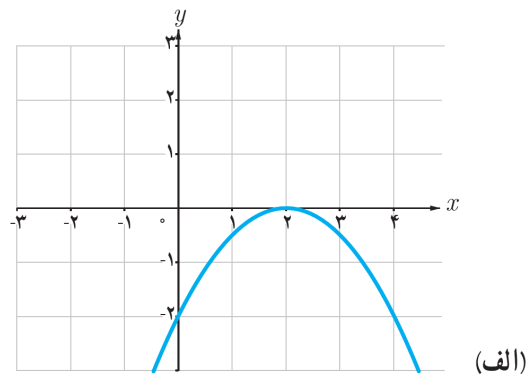
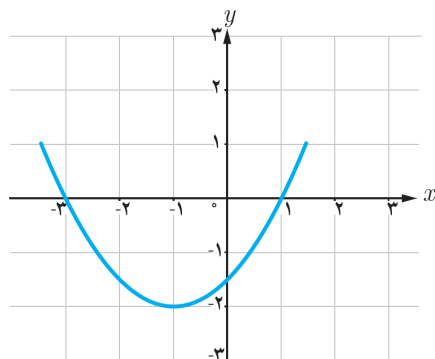
تمرین ۲


تمرین ۱: معادله درجه دومی بنویسید که: 


الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟)

تمرین ۲: در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید. 




تمرین ۳: یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t ، از رابطه $h(t) = -16t^2 + 144t$ به دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به دست آورید. 

تمرین ۴: صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. 

الف) $f(x) = x^2 - 4x$

ب) $g(x) = 2x^2 + x^2 + 3x$


پ) $h(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

تمرین ۵: معادلات زیر را حل کنید. 

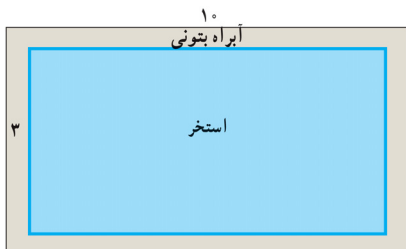
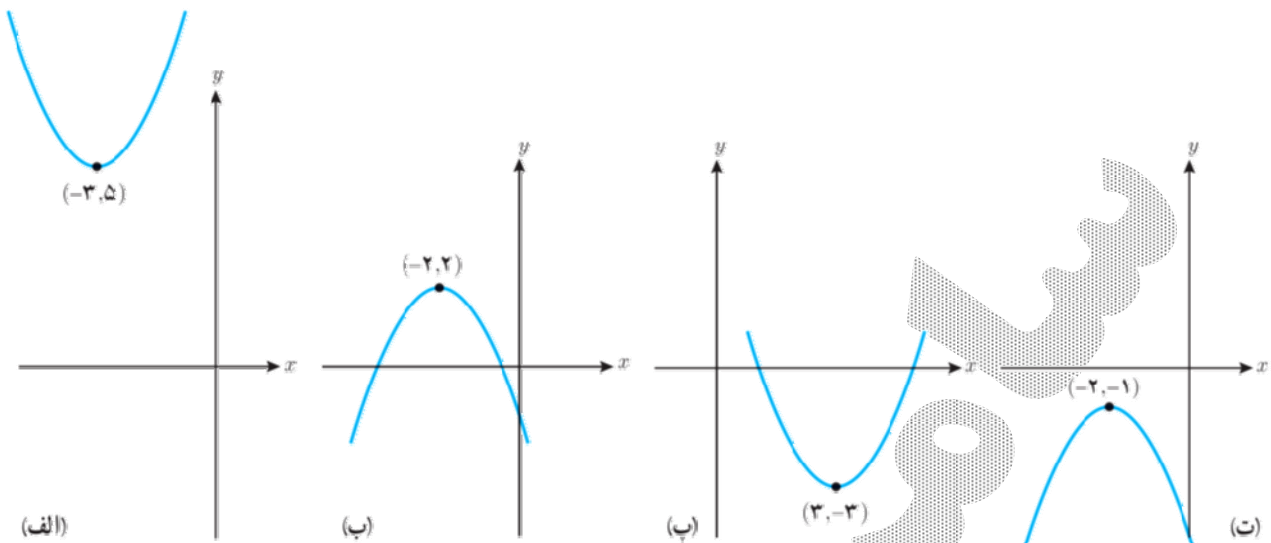
الف) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

ب) $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

پ) $(4 - x^2)^2 - (4 - x^2) = 12$

تمرین ۶: تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید. 

تمرین ۷: هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.





تمرین ۸: یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.




تمرین ۹: طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. ب رای پوشانیدن دیواری به مساحت $52/8$ متر مربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی متر است؟

تمرین ۳

تمرین ۱: در معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ حاصل عبارت $(x_1^2 - 4x_1 + 2)(x_2^2 - 4x_2 + 4)$ را بیابید. 


تمرین ۲: به ازای چه مقادیری از m تابع $y = mx^2 + 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه به طول مثبت قطع می‌کند؟ 


تمرین ۳: معادلات زیر را حل کنید: 


$$1) \quad 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$$

$$2) \quad \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^4 - \frac{10}{3}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 + 1 = 0$$

$$3) \quad (x-2)(x-1)(x+5)(x+4) = -8$$


تمرین ۴: در معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ حاصل $\sqrt{x_1^2(3x_2 - 1)}$ را بیابید. 


تمرین ۵: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 5x - 2 = 0$ باشند حاصل عبارت $(\alpha^3 + 5\alpha^2 + 3\alpha + 1)(\beta^3 + 5\beta^2 + 3\beta + 1)$ را بیابید. 

تمرین ۶: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند معادله‌ی درجه دومی بسازید که: 

الف) ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha^3} - 2\beta^2$ و $\frac{1}{\beta^3} - 2\alpha^2$ باشد.

ب) ریشه‌هایش $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1$ و $\beta^3 + 3\beta^2 + 1$ باشد.

تمرین ۷: به ازای چه مقادیری از a معادله‌ی $x^4 + ax^2 + 12 = 0$ چهار جواب دارد؟ 


تمرین ۸: در معادله $x^4 - 4x^2 + m^2 - 5 = 0$ مقادیر را طوری بیابید که: 


الف- معادله چهار جواب داشته باشد.

ب- معادله سه جواب داشته باشد.


پ- معادله دو جواب داشته باشد.


ت- معادله جواب نداشته باشد.


تمرین ۹: معادله $(2x-7)(x^2-9)(2x+5) = 91$ را حل کنید. 


تمرین ۱۰: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند مقدار $5x_1^4 + 12x_2^3$ را بدست آورید. 


تمرین ۱۱: اگر α و β ریشه‌های معادله $8x^2 - 30x + 27 = 0$ باشند مقدار $\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\alpha}}$ را بدست آورید. 


تمرین ۱۲: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2m - 2 = 0$ باشند و $x_1^2 + x_1x_2 = 8$ ، مقدار m چقدر است؟ 


تمرین ۱۳: اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ یکی از جواب‌ها k برابر دیگری باشد ثابت کنید: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)}{k}$ 

تمرین ۱۴: اگر a و b اعدادی متمایزند و $a^2 = 5a - 3$ و $b^2 = 5b - 3$ معادله درجه دومی بسازید که ریشه‌هایش $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ باشد. 

تمرین ۱۵: اگر $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 3$ و $3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 9$ ، معادله درجه دومی بسازید که ریشه‌هایش x_1 و x_2 باشد. 

تمرین ۱۶: ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ به یک اندازه از ریشه‌های معادله $x^2 + cx + b = 0$ بیشترند ثابت کنید $b + c = -4$ (فرض کنید $b \neq c$) 

تمرین ۱۷: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + k - 1 = 0$ باشند کمترین مقدار $(x_1 - x_2)^2$ چقدر است؟ 

تمرین ۱۸: بیشترین مقدار محیط مستطیلی‌هایی را که یک ضلع آن‌ها بر محور طول‌ها منطبق است و دو رأس آن‌ها روی سهمی $y = x^2 - 4$ قرار دارند را بدست آورید. 

تمرین ۱۹: پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای روی آن است، اگر محیط پنجره ۲ متر باشد ابعاد آنرا چطور انتخاب کنید تا بیشترین مقدار نور به درون بتابد؟

تمرین ۲۰: معادله $x^2 + |x| + 1 = k$ مفروض است. مقدار k را چنان بیابید که:

الف- معادله دو جواب داشته باشد.
ب- معادله یک جواب داشته باشد.
پ- معادله جواب نداشته باشد.

چند نمونه تست کنکور و تالیفی

تست ۱: یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + mx + 24 = 0$ سه برابر مربع ریشه‌ی دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱۴ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۵ (۴)

تست ۲: در معادله $(x+1)(x^2 - 2x + 6m) = 0$ حاصل ضرب سه ریشه -6 است. مقدار m کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

تست ۳: در معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ ، حاصل $x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

۴ (۴) ۸ (۳) ۴ (۲) ۸ (۱)

تست ۴: در معادله $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ ، حاصل $x_1^6 + x_2^6$ کدام است؟

۹ (۴)

۱۷ (۳)

۶۵ (۲)

۵ (۱)

تست ۵: ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادله $x^3 - x = 0$ یک واحد بیشتر است؟

$$x^3 + 3x^2 - 2x = 0 \quad (۲)$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \quad (۱)$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \quad (۴)$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x = 0 \quad (۳)$$

تست ۶: حدود m برای آن که معادله $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامة داشته باشد کدام است؟

$$0 < m < 1 \quad (۴)$$

$$m < 1 \quad (۳)$$

$$1 < m < 3 \quad (۲)$$

$$m > 2 \quad (۱)$$

تست ۷: حدود m برای آن که معادله $x^2 - x + m = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد کدام است؟

$$m < 0 \text{ یا } m > \frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$m > 0 \quad (۳)$$

$$0 < m < \frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$m < \frac{1}{4} \quad (۱)$$

تست ۸: معادله $(x - \sqrt{x})^2 - \frac{11}{10}(x - \sqrt{x}) + \frac{1}{10} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

تست ۹: معادله دو مجذوری $mx^2 - 4x^2 + m - 3 = 0$ به ازای چه مقادیری از m دارای چهار ریشه حقیقی متمایز است؟

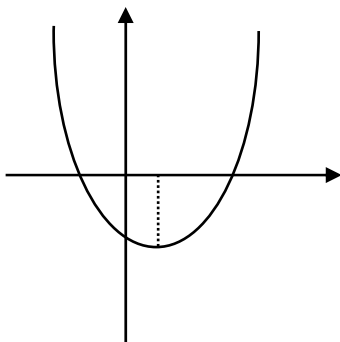
(۴) $3 < m < 4$

(۳) $m > 4$

(۲) $m < 0$ یا $m > 3$

(۱) $-1 < m < 4$

تست ۱۰: با توجه به شکل مقابل کدام گزینه صحیح است؟



(۱) $\Delta < 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$

(۲) $\Delta < 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$

(۳) $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$

(۴) $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$

تست ۱۱: اگر α و β ریشه های معادل $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چه قدر است؟ (ریاضی فارج ۱۵)

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

تست ۱۲: در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است m کدام است؟ (ریاضی فارج ۹۱)

(۴) ۱۵

(۳) ۱۴

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

تست ۱۳: در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از ۳ برابر ریشه دیگر، ۳ واحد بیشتر است m کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵ (ریاضی ۱۷)

تست ۱۴: به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟ (تقریبی فارغ ۹۰)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

تست ۱۵: به ازای کدام مقدار m ، عدد $\frac{1}{8}$ واسطه حسابی بین دو ریشه معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴ (ریاضی ۱۴)

تست ۱۶: به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳ (ریاضی فارغ ۱۴)

تست ۱۷: به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{9}{5}, 1$ (۴) $-\frac{9}{5}, \frac{9}{5}$ (تقریبی ۹۳)

تست ۱۸: اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (ریاضی خارج ۱۷)

تست ۱۹: ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 - 2x + 1 = 0$ چگونه است؟ (ریاضی ۱۳)

- (۱) ریشه مضاعف مثبت - یک ریشه منفی (۲) ریشه مضاعف منفی - یک ریشه مثبت
(۳) یک ریشه مثبت - دو ریشه منفی (۴) دو ریشه مثبت - یک ریشه منفی

تست ۲۰: به ازای کدام مقدار a معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟

- (۱) $a < -4$ (۲) $a > -4$ (۳) $a < 4$ (۴) $a > 4$ (تقریبی خارج ۹۴)

تست ۲۱: ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. b کدام است؟ (تقریبی ۱۷)

است. b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

تست ۲۲: اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند مجموعه جواب‌های کدام معادله،

به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟ (ریاضی ۹۲)

- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 5x - 1 = 0$
(۳) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

تست ۲۳: اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند به ازای کدام مقدار x مجموع جواب معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ بصورت $\{\alpha\beta^2, \beta\alpha^2\}$ است؟

(ریاضی فارج ۹۰)

۹ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

تست ۲۴: اگر α و β ریشه‌های معادله $x(\Delta x + 3) = 2$ باشند به ازای کدام مقدار x مجموع جواب معادله $4^2 - kx + 25 = 0$ بصورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟

(ریاضی ۹۰)

۳۱ (۴)

۲۹ (۳)

۲۸ (۲)

۲۷ (۱)

تست ۲۵: مجموع جواب‌های حقیقی معادله $0 = 72 + (x^2 + x) - 18(x^2 + x) + (x^2 + x)^2$ کدام است؟

(تجربی ۹۰)

۲ (۴)

-۲ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

تست ۲۶: اگر معادله $0 = x^4 - (m+2)x^2 + m + 5$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

(تجربی ۱۵)

 $4 < m < 9$ (۴) $-4 < m < 4$ (۳) $m > 4$ (۲) $m < -4$ (۱)

تست ۲۷: به ازای کدام مجموع مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟

(ریاضی فارج ۱۹)

 $1 < a < 2$ (۴) $a > 2$ (۳) $a > 1$ (۲) $a < -1$ (۱)

تست ۲۸: به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x هاست؟ (ریاضی ۱۵)

(۱) $m < -\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2} < m < 1$ (۳) $1 < m < \frac{3}{2}$ (۴) $m > \frac{3}{2}$

تست ۲۹: نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$ از طرف بالا بر محور x ها مماس است طول نقطه تماس

(ریاضی خارج ۱۳)

کدام است؟

(۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2

تست ۳۰: منحنی به معادله $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را در یک نقطه قطع می کنند. مجموع مقادیر a به

(ریاضی ۱۳)

کدام صورت است؟

(۱) $0 < a < 4$ (۲) $-4 < a < 0$ (۳) $0 < a < 2$ (۴) $a > 4$

تست ۳۱: اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد مقدار k کدام است؟

(ریاضی ۱۳)

(۱) -4 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 4

تست ۳۲: در تابع $f(x) = ax^2 + bx + 1$ رأس سهمی روی خط $x+1=0$ قرار دارد و منحنی تابع، محور x ها را در

نقطه‌ای به طول ۲ قطع می کند. مقدار a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{-1}{4}$ (۴) $\frac{-1}{8}$

تست ۳۳: منحنی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ ، خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموع مقادیر m کدام است؟ (ریاضی ۱۱)

(۴) $5 < m < 13$

(۳) $7 < m < 15$

(۲) $15 < m < 23$

(۱) $9 < m < 25$

تست ۳۴: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۵)

(۲) $-2 < m < 1$

(۱) $m > 1$ یا $m < -2$

(۴) فقط $m > 1$

(۳) فقط $m < -2$

تست ۳۵: نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟ (تجربی خارج ۹۳)

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) $1/5$

(۱) ۱

تست ۳۶: اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند آنگاه مجموعه مقادیر m ، به کدام صورت است؟ (ریاضی ۱۷)

(۴) $m > 3$

(۳) $3 < m < 4$

(۲) $3 < m < 5$

(۱) $4 < m < 5$

تست ۳۷: به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه به

(ریاضی فارج ۹۲)

طول های منفی قطع می کند؟

(۴) $-3 < a < 0$

(۳) $a > -1$

(۲) $a < -3$

(۱) $a < -9$

تست ۳۸: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ ، محور x ها را در

(ریاضی ۹۵)

دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

(۴) هیچ مقدار m

(۳) هر مقدار m

(۲) $-1 < m < 2$

(۱) $m > 2$

تست ۳۹: به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات

(ریاضی ۹۲)

نمی گذرد؟

(۴) $0 < a < 3$

(۳) $2 < a < 3$

(۲) $0 < a \leq 2$

(۱) $a \leq 2$

تست ۴۰: به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ ، از ناحیه دوم محورهای مختصات

(ریاضی ۱۹)

نمی گذرد؟


(۴) \emptyset


(۳) $2 < a < 3$

(۲) $a \geq 2$

(۱) $a \leq -2$


◆ معادلات شامل عبارتهای گویا:


مثال ۴۶  دو کارگر کاری را با هم به مدت ۱۸ روز تمام می‌کنند اما اگر هر کدام به تنهایی کار کنند کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم کار را تمام می‌کند. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟


مثال ۴۷  در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. چگونه می‌توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند؟
حالت اول: با اضافه کردن نمک

حالت دوم: با تبخیر محلول

حالت سوم: فقط ۵ کیلوگرم نمک در مغازه موجود است و آن را به محلول می‌افزاییم حال چقدر از آب محلول باید تبخیر شود تا به غلظت مورد نظر رسد.

مثال ۴۸  معادله‌ی $\frac{۳}{x+۲} + \frac{۲}{x} = \frac{۴x-۴}{x^2-۴}$ را حل کنید.

مثال ۴۹  معادله $\frac{۱}{x^2-۲x+۲} - \frac{۱}{x^2-۲x} = ۲$ چند جواب دارد؟


معادلات زیر را حل کنید.  مثال ۵۰


۱) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ (مجهول: p)

۲) $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$

۳) $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$

۴) $\frac{x-2}{x^2-x-6} = \frac{1}{x^2-4} + \frac{3}{2x+4}$

 مثال ۵۱ کیکاووس می خواهد با ۸۰۰۰ تومان پولی که دارد تعدادی خودکار بخرد اگر فروشنده در قیمت هر خودکار ۲۰۰ تومان به او تخفیف دهد می تواند با پولش دو خودکار دیگر نیز بخرد قیمت هر خودکار قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

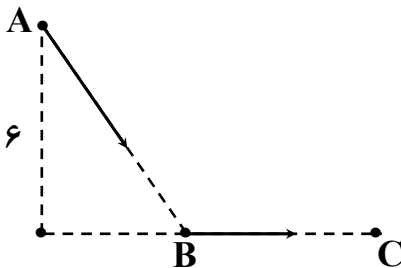
 مثال ۵۲ در فرمول $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ یکبار متغیر V_1 و یکبار متغیر T_2 را بر حسب سایر متغیرها بدست آورید.

نکته: اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطه $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ برقرار باشد، می‌گوییم در این مستطیل رابطه‌ی طلایی برقرار است.

مثال ۵۳ اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه‌ی طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد طول و عرض این زمین چقدر است؟


◆ معادلات شامل عبارتهای گنگ:

مثال ۵۴ معمولاً مرغ‌های دریایی برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر را در هوا و بخشی را در سطح آب طی می‌نند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله‌ی تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه‌ی B می‌رود سپس در سطح آب از B به C می‌ود تا ماهی را شکار کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلو کالری و برای طی هر متر در آب ۱۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند. نقطه B در چه فاصله‌ی از C باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند؟



اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز کند چقدر کالری مصرف می‌کند؟

مثال ۵۵ معادله $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$ را حل کنید.

مثال ۵۶  معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{x+2} = x-4$


۲) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$


۳) $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0$

۴) $\sqrt{5x-1} + 3 = 0$

۵) $\sqrt{15 + \sqrt{2x+80}} = 5$

۶) $\sqrt{3-2P} + 3 = \sqrt{2P+2}$

مثال ۵۷  آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد؟

مثال ۵۸  معادله $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{3x-2}$ را حل کنید.

تمرین ۱



تمرین ۱: ۳۰۰ گرم محلول چای شیرین با غلظت ۵ درصد داریم اگر بخواهیم به محلول ۸ درصد تبدیل کنیم.

الف) چقدر باید شکر اضافه کنیم؟
ب) اگر شکر در دسترس نبود چقدر باید آب محلول را تبخیر کنیم؟



تمرین ۲: آب استخری توسط سه شیر بزرگ تأمین می‌شود شیر اول به تنهایی در ۳ ساعت، شیر دوم در ۴ ساعت و هر سه شیر با هم در $\frac{4}{3}$ ساعت استخر را پر از آب می‌کنند. شیر سوم به تنهایی در چند ساعت استخر را پر از آب می‌نماید؟




تمرین ۳: معادلات زیر را حل کنید:

الف)
$$\frac{6}{x} - \frac{x}{x+1} = 2$$

ب)
$$\frac{y-2}{y+2} + \frac{y}{y-2} = \frac{8}{y^2-4}$$

ج)
$$\frac{3}{2a} = \frac{a+2}{a^2-3a}$$

د)
$$\frac{1}{t^2-2t+1} = \frac{3}{t^2-2t+3}$$


تمرین ۴: معادلات زیر را حل کنید: 


الف) $\sqrt{x+15} - \sqrt{x+3} = 2$

ب) $\sqrt{x^2+9} = 2x-3$

ج) $\sqrt{2x+10} + \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-2}$

د) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = x-1$

تمرین ۵: اگر مقداری محلول آب و الکل با غلظت ۸۰٪ الکل را با ۵ میلی لیتر محلول با غلظت ۲۰ درصد الکل اضافه کنیم محلولی به غلظت ۵۰ درصد الکل به دست می آید. حجم محلول اولیه چقدر بوده است؟ 

تمرین ۶: در نصب نوعی پنجره، نصاب اول ۳۰ دقیقه زودتر از نصاب دوم کارش را تمام می کند. اگر هر دو نصاب با هم کار کنند ۱۰ دقیقه زودتر از حالتی که نصاب اول به تنهایی کار می کرد کار را تمام می کند. هر نصاب به تنهایی در چند دقیقه کار را تمام می کند؟ 



تمرین ۷: معادله $\frac{2}{x^2 - 10x + 25} - \frac{1}{x + 5} = \frac{10}{x^2 - 25}$ را حل کنید.

تمرین ۸: معادله $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x - \frac{1}{x}\right) = 5$ چند جواب دارد؟

تمرین ۹: به ازای چه مقادیری از a معادله $\sqrt{x^2 + x + 3} = x - a$ جواب حقیقی دارد؟

تمرین ۱۰: معادله $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$ را حل کنید.

تمرین ۲

تمرین ۱: معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

$$2) \frac{p}{2-p} + \frac{2}{p} = \frac{-3}{2}$$

$$۳) \frac{۳y+۵}{y^2+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y}$$

$$۴) ۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x+۴}$$

$$۵) \frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} = ۱-x$$

$$۶) \frac{۵}{\sqrt{x+۲}} = ۲ - \frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$$

$$۷) \sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴$$


تمرین ۲: پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

تمرین ۳: ماشین A کاری را به تنهای ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهای انجام دهند؟

تمرین ۴: فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را بر می‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



تمرین ۳

معادلات زیر را حل کنید. 

$$۱) \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}} = 3$$

$$۲) 3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$۳) \sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$$

$$۴) x + 12\sqrt{x} - 64 = 0$$



$$۵) \sqrt{۴-x}\sqrt{x^2+۴} = x+۲$$

$$۶) \frac{۶}{x^2-۲x} - \frac{۱۲}{x^2+۲x} = \frac{۱}{x}$$

$$۷) \frac{۶}{۲x+x^2+۱} + \frac{۴}{x+۲x^2+x^3} = \frac{۵}{۲x+۲x^2}$$

$$۸) \frac{۱}{x+۱} + \frac{۴}{x+۴} = \frac{۲}{x+۲} + \frac{۳}{x+۳}$$

$$۹) \sqrt{۲x+۳} + \sqrt{۳x+۲} - \sqrt{۲x+۵} = \sqrt{۳x}$$



$$۱۰) x^2 + \frac{1}{x^2} + 5\left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

$$۱۱) \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}$$

$$۱۲) \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$$

$$۱۳) \frac{1}{6x^2 - 5x + 1} + \frac{1}{2x^2 - 3x + 1} = 2x^2 - 4x$$


$$۱۴) \frac{x}{(x+3)(x-1)} - \frac{x}{(x-3)(x+1)} = 4$$


$$۱۵) \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1} = 1$$

$$۱۶) \sqrt{x^2-3x+5} + \sqrt{x^2-3x-2} = 4$$

$$۱۷) \sqrt{x-\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 3$$

$$۱۸) \sqrt[3]{13x+27} - \sqrt[3]{13x-27} = \sqrt[3]{2}$$

تمرین ۱۹: به ازای چه مقادیری از a معادله $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{4x+a}{x^2+x}$ جواب ندارد؟ 

تمرین ۲۰: دو کارگر، کاری را ۸ روز (روزی ۸ ساعت) به پایان می‌رسانند. اگر کارگر اول در هر روز ۲ ساعت و کارگر دوم ۴ ساعت کار کند. کار در ۲۰ روز به پایان می‌رسد. در صورتی که کارگر اول ۸ ساعت در روز کار کند به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کند؟ 

چند نمونه تست کنکور و تالیفی

تست ۱: معادله $\frac{2x}{3x+1} + \frac{3x+1}{2x} = \frac{2}{3}$ چگونه است؟

- (۱) دو ریشه مثبت دارد.
 (۲) دو ریشه منفی دارد.
 (۳) دو ریشه‌ی مختلف علامه دارد.
 (۴) ریشه ندارد.

تست ۲: معادله‌ی $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1-x} - 1$ چند جواب دارد؟

- (۱) جواب ندارد.
 (۲) دو جواب دارد.
 (۳) فقط یک جواب مثبت دارد.
 (۴) فقط یک جواب منفی دارد.

تست ۳: معادله‌ی $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} - \sqrt{9x+7} + \sqrt{x-2} = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳

تست ۴: معادله‌ی $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x^3-8} = 0$ دارای چند ریشه است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۲
 (۳) ۱
 (۴) صفر

تست ۵: وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3 = \left(\frac{x-2}{x+1} + 1\right)\left(\frac{2x}{1-x} + 1\right)$ چگونه است؟

- (۱) یک ریشه‌ی ساده
 (۲) یک ریشه‌ی مضاعف
 (۳) دو ریشه‌ی متمایز
 (۴) ریشه ندارد.

تست ۶: به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

(تجربی ۸۸)

(۱) $-\frac{3}{2} < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ (۴) $2 < m < 3$

تست ۷: حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

(ریاضی ۹۴)

(۱) -2 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 4

تست ۸: اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد جواب دیگر کدام است؟

(تجربی ۸۷)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 2 (۳) 3 (۴) جواب دیگر ندارد

تست ۹: معادله $3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0$ از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟

(تجربی فارج ۸۷)

(۱) یک جواب دارد (۲) دو جواب هم علامت دارد
(۳) دو جواب با علامت مخالف دارد (۴) جواب ندارد

تست ۱۰: اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W ، نسبت طولی برقرار باشد و محیط مستطیل 32 متر باشد طول


مستطیل چقدر است؟

(۱) $8(\sqrt{5} + 1)$ (۲) $8(\sqrt{5} - 1)$ (۳) $16(\sqrt{5} + 1)$ (۴) $16(\sqrt{5} - 1)$

◇ قدر مطلق:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

قدر مطلق عدد حقیقی x بصورت مقابل تعریف می شود:

مثال ۵۹  حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدون علامت قدر مطلق بنویسید:

۱) $|-5| =$

۲) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| =$

۳) $|2 - \sqrt{5}| =$

۴) $|10 - \pi^2| =$

۵) $|1/5 - 1/2| =$

۶) $|2x + 3| =$

۷) $|x^2 + x| =$

۸) $|x+1| - |x-2x| =$

مثال ۶۰  عبارات زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید:

۱) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} =$

۲) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} =$

۳) $\sqrt{5-\sqrt{24}} =$

نکته: 

$$۴) \sqrt{x^2 + 2x^2 + 1} =$$

$$۵) \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2} =$$

$$۶) \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} =$$

◆ ویژگی‌های قدر مطلق:

$$۱) |x| \geq 0$$

$$۲) \sqrt{x^2} = |x|$$

$$۳) |-x| = |x|$$

$$۴) |x|^2 = x^2$$

$$۵) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$۶) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$۷) |x| = a \begin{cases} a > 0 \rightarrow x = \pm a \\ a < 0 \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$۸) |x| = |y| \longrightarrow x = \pm y$$

$$۹) |x| < a \begin{cases} a > 0 \longrightarrow -a < x < a \\ a < 0 \longrightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$۱۰) |x| > a \begin{cases} a > 0 \longrightarrow \begin{cases} x > a \\ \text{یا} \\ x < -a \end{cases} \\ a < 0 \longrightarrow \text{همواره برقرار است} \end{cases}$$

$$۱۱) |x| \leq a \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$۱۲) |x| \geq a \longrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$۱۳) -|x| \leq x \leq |x|$$

$$۱۴) |x+y| \leq |x|+|y| \quad (\text{نامساوی مثلثی})$$

$$x, y \geq 0 \Leftrightarrow |x+y| = |x|+|y|$$



مثال ۶۱ تساوی $|3x+1|=|x|+|2x+1|$ در چه صورت برقرار است؟

مثال ۶۲ معادله $|2x-3|+|x-2|=|x-5|$ را حل کنید.

مثال ۶۳ نامعادله $|x+2|+|x-4|>2|x-1|$ را حل کنید.

◆ حل معادلات قدر مطلق:

به یکی از روش‌های: (۱) با استفاده از ویژگی‌ها (۲) به توان ۲ رساندن
(۳) تعریف قدر مطلق (۴) به کمک رسم (روش هندسی)


قابل حل است.

مثال ۶۴ فاصله چه نقاطی روی محور اعداد حقیقی از نقطه‌ی ثابت ۷ برابر با ۳ است؟

مثال ۶۵ معادله $|3x-2|=|x-4|$ را حل کنید:

روش اول:


روش دوم:


مثال ۶۶  معادله‌ی $|x-1| = 4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید:

روش به توان ۲ رساندن


روش تعریف قدر مطلق

روش هندسی

مثال ۶۷  معادله‌ی $|2x-1| + |x| = 7$ را به روش تعریف قدر مطلق حل کنید.

مثال ۶۸  معادله‌ی $x|x| = -4$ را به روش تعریف قدر مطلق حل کنید.


◆ رسم توابع شامل قدر مطلق:


مثال ۶۹  نمودار تابع $y = |x-1| + 2$ را رسم کنید.


روش اول




روش دوم:

مثال ۷۰  نمودار تابع $y = |x-1| + 2x$ را رسم کنید.


مثال ۷۱  نمودار تابع $y = |x-1| + |x+2|$ را رسم کنید.

مثال ۷۲  نمودار تابع $y = |x+1| - |2-x|$ را رسم کنید.


نکته: رسم تابع بصورت $y = |x-a| + |x-b|$ 


نکته: بحث در تعداد ریشه‌های معادله $|x-a| + |x-b| = k$ 


نکته: رسم تابع بصورت $y = |x-a| - |x-b|$ 

نکته: بحث در تعداد رشته‌های معادله‌ای $|x-a| - |x-b| = k$ 




مثال ۷۳  نمودار تابع $y = 2x + 1 + \frac{|x-1|}{x-1}$ را رسم کنید.

نکته:  رسم توابع به صورت $y = |f(x)|$:

مثال ۷۴  نمودار تابع $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.

روش اول:

روش دوم:

مثال ۷۵  نمودار تابع $y = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید.

روش اول:



روش دوم:

۷۶ مثال معادله $|2x-1| = |x^2-1|$ را حل کنید.

به روش هندسی

به روش جبری


۷۷ مثال نامعادله $|x-2| \leq |x^2-4|$ را حل کنید.

به روش هندسی

به روش جبری

۷۸ مثال خط $y = a$ نمودار تابع $y = ||x| - 2|$ را در چهار نقطه قطع می کند حدود a را بیابید.


تمرین ۱

تمرین ۱: حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید. 

الف) $|3 - \sqrt{10}| - \sqrt{2}|\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}| = ?$

ب) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} + \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = ? : a < 0 < b, |a| < |b|$

ج) $|a + b| + |a| + |b| = ? : b < 0 < a, |a| > |b|$


تمرین ۲: معادلات زیر را حل کنید. 


الف) $||2x - 1| - 3| = 5$


ب) $|x^2 - 9| = 9 - x^2$

ج) $|5 - \frac{2}{3}x| - 9 = 8x$

د) $|x + 1| = 4 + 2x$

تمرین ۳: نمودار تابع $f(x) = |x|(x + \frac{1}{x})$ را رسم کنید. 


تمرین ۴: نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ را رسم کنید. 

تمرین ۵: انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی باشد تا داشته باشیم: $|\sin \alpha + \cos \alpha| = |\sin \alpha| + |\cos \alpha|$ 

تمرین ۶: معادله‌های زیر را حل کنید. 

$$۱) |x^2 - 3|x| + 1| = 1$$

$$۲) |2x^2 - 1| = x^2 - 2x - 3$$


تمرین ۷: با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق نامعادلات زیر را حل کنید. 


$$۱) |3x - 2| \leq 5$$


$$۲) |3x - 1| \geq |x + 1|$$

$$۳) |3x - 2| \leq 5$$


$$۴) 1 < |x| \leq 5$$

تمرین ۸: اگر $-2 < x < -3$ باشد حاصل عبارت $\frac{|6x+36|-4|9-x|}{x}$ را بیابید. 

تمرین ۹: معادله $6 = x + |x+1| - |x-3|$ را حل کنید. 

تمرین ۱۰: معادله $\frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{x+1}$ را حل کنید. 


تمرین ۲

تمرین ۱: با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید. 

الف) $f(x) = x|x|$

ب) $g(x) = x|x^2 - 1|$


پ) $h(x) = |x-1| + |x+1|$

تمرین ۲: بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های -1 و 3 روی محور x ها برابر 6 باشد؟ 

تمرین ۳: هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.
الف) فاصله بین x و 3 برابر 7 است.


ب) دو برابر فاصله بین x و 6 برابر 4 است.

پ) فاصله بین x و -3 بزرگ‌تر از 2 است.

تمرین ۴: دو معادله زیر را حل کنید. 

الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$


ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

تمرین ۵: نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید. 


الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = x^2 - 6x$


تمرین ۶: نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید. 


تمرین ۷: نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید. 


تمرین ۳


تمرین ۱: اگر $x^2 + |x^2 - 1| = 1$ باشد حاصل $|2x - 3| - |x - 5|$ را بدست آورید. 

تمرین ۲: معادله $|x^2 - 4x + 5| + |x - 2| = 1$ را حل کنید. 

تمرین ۳: کمترین مقدار تابع $f(x) = |x^2 - x - 1| + |x^2 - x + 2|$ را بدست آورید. 

تمرین ۴: معادله $|x - 2| - |x - 3| + x = 1$ چند جواب دارد؟ 

تمرین ۵: حدود k را چنان بیابید که معادله $|x^2 + 2x + k| = 2$ چهار ریشه متمایز دارد؟ 

تمرین ۶: معادله $|x^2 - 4| - |x^2 - 9| = 5$ را حل کنید. 



تمرین ۷: نامعادله $|x^2 + |x| - 3| \leq 3$ را حل کنید.

تمرین ۸: نامعادله $2 \leq |3 - 2x| < 5$ را حل کنید.

تمرین ۹: کمترین مقدار تابع $f(x) = |x-1| - 2|x+1| - |2-x|$ را بدست آورید.

تمرین ۱۰: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$$۱) y = |x^2 - 1| + 2x$$

$$۲) y = ||x+1| - |x-2||$$

$$۳) y = |x|(2-|x|)$$



$$۴) y = ||x - ۲| - ۲| - ۲|$$

تمرین ۱۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$$۱) y = ||۲x - ۱| - ۲|$$

$$۲) y = ||x^۲ - ۱| - ۲|$$

$$۳) y = |x^۲ - ۳|x| + ۲|$$

$$۴) y = |x^۲ - ۲|x||$$



چند نمونه تست کنکور و تالیفی

تست ۱: معادله $|x-2| + |7-x| = 5$ چند جواب صحیح دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

تست ۲: معادله $|x-2| + |x+2| = 5$ چند جواب دارد؟

هیچ مقدار (۴)

بی شمار (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تست ۳: سطح محصور بین منحنی $y = |x-1| + |x|$ و خط $y = x+1$ کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{1}{2}$ (۱)

تست ۴: اگر $2 < x < 0$ آن گاه حاصل عبارت $|2x-5| + |x-3| - |10-3x|$ کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

تست ۵: اگر $x^2 + x < 0$ آن گاه حاصل $|2x-2| + |x+1| - |x+2|$ کدام است؟

 $x-3$ (۴) $3-x$ (۳) $1+3x$ (۲) $1-3x$ (۱)

تست ۶: مجموعه جواب نامعادله $|x+2| + |x-3| > |2x-1|$ شامل چند عدد صحیح می‌شود؟

(۴ بی‌شمار)

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

(تجربی فارج ۹۲)

تست ۷: مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 2x < |x-2|$ بصورت کدام بازه است؟

(۴) (۱, ۲)

(۳) (۰, ۲)

(۲) (-۱, ۲)

(۱) (-۱, ۱)

(تجربی ۹۲)

تست ۸: مجموعه جواب‌های نامعادله $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$ کدام است؟

(۲) $\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ (۱) $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (۴) $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ (۳) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

تست ۹: اگر مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2| < |x+1| - 1$ بازه (a, b) باشد طول وسط این بازه کدام است؟

(ریاضی فارج ۹۵)

(۴) ۲

(۳) $1/5$

(۲) ۱

(۱) $0/5$

(تجربی ۹۵)

تست ۱۰: مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ بصورت کدام بازه است؟

(۴) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (۳) $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (۲) $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ (۱) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

تست ۱۱: مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است؟ (ریاضی فارج ۹۲)

(۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

تست ۱۲: مجموعه جواب‌های نامعادله $2x - 5 < |x - 4|$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۲)

(۱) $(1, 5)$ (۲) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$
 (۳) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

تست ۱۳: مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 1$ به صورت کدام باز است؟ (تجربی فارج ۹۵)

(۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(1, 2)$

تست ۱۴: نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطعند؟ (تجربی ۹۳)

(۱) $-3/5$ (۲) -3 (۳) $-2/5$ (۴) -2

تست ۱۵: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

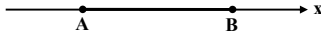
(۱) ۲ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۳

◆ آشنایی با هندسه تحلیلی:

فاصله‌ی بین دو نقطه:

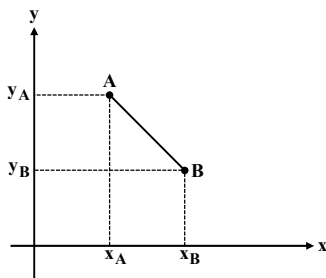
الف) در فضای یک بعدی:

$$AB = |x_B - x_A|$$



ب) در فضای دو بعدی:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال ۷۹ سه نقطه $A(1, 3)$ و $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC هستند.

الف - مثلث را رسم کنید.

ب - طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

پ - نشان دهید مثلث قائم‌الزاویه است.

ت - شیب دو خط AB و AC را به دست آورده با هم مقایسه کنید.نکته: اگر دو خط d, d' بر هم عمود باشند بین شیب‌های آنها رابطه‌ی زیر برقرار است:

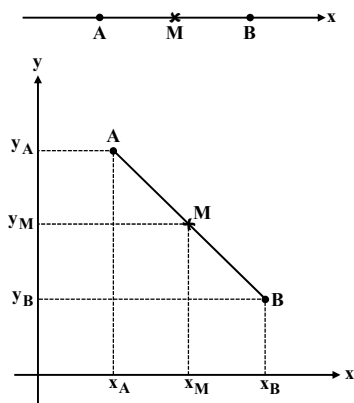
$$d \perp d' \Leftrightarrow m_d \cdot m_{d'} = -1 \quad \text{یا} \quad m_{d'} = \frac{-1}{m_d}$$



نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(6, 15)$ و $B(0, -3)$ قرار دارد.

مثال ۸۰

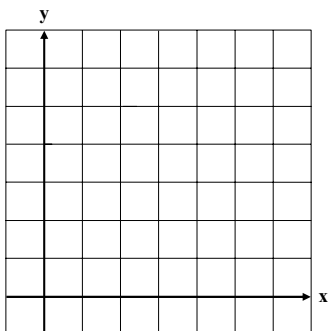
مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط:




$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \\ y_M = \end{cases} \text{ اگر } M \text{ وسط } AB \text{ باشد.}$$

اگر $A(1, 3)$ و $B(4, 1)$ باشد معادله‌ی عمود منصف AB را بنویسید.

مثال ۸۱




مثال ۸۲  خط $d: 2y + x = 5$ و نقطه $A(4, 3)$ مفروضند.

(۱) عمود AH را بر خط d رسم کنید.


(۲) معادله‌ی خط AH را بنویسید.


(۳) مختصات نقطه H (نقطه تلاقی دو خط AH و d) را به دست آورید.

(۴) طول پاره خط AH را حساب کنید.

نکته: فاصله‌ی نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط $d = ax + by + c = 0$ 

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۸۳  فاصله‌ی نقطه $A(4, 3)$ از خط $d: 2y + x = 5$ را به دست آورید.

مثال ۸۴  فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2, 4)$ از خط $y = \frac{4}{3}x + 4$ را به دست آورید.



فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

مثال ۸۵

در صورتی که $A(6, -4)$ رأس یک مربع و $2x - 5y = 3$ معادله‌ی یک ضلع مربع باشد مساحت این مربع

مثال ۸۶

چقدر است؟

خطوط $3x + 2y = 1$ و $2x - 3y = 2$ معادله‌ی دو ضلع یک مستطیل و $A(2, 5)$ یک رأس آن است مساحت

مثال ۸۷

مستطیل چقدر است؟

معادله یکی از قطرهای مربعی بصورت $2x + 3y + 3 = 0$ و مختصات یکی از رأس‌های آن $(-1, 4)$ است.

مثال ۸۸

مساحت مربع را بیابید.

مساحت مثلثی با رأس‌های $A(2, 7)$ و $B(3, -1)$ و $C(-5, 6)$ را بدست آورید.

مثال ۸۹

مثلث ABC ، $A(0, 0)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 4)$ مفروض است. فاصله رأس A را از میانه BM بدست آورید.

مثال ۹۰

تمرین ۱

تمرین ۱: اگر $A(1, 2)$ و $B(2, -1)$ و $C(5, 0)$ سه رأس یک مثلث باشند.

الف - معادله‌ی خط عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

ب - اندازه میانه A_M را به دست آورید.

پ - مختصات مرکز ثقل مثلث را به دست آورید. (نقطه‌ی برخورد میانه‌ها)

ت - مختصات رأس D را چنان بیابید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

تمرین ۲: نقاط $A(1, 3)$ و $B(-1, 1)$ و $C(3, 1)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر k, N, M وسط‌های اضلاع این مثلث


باشند نوع MNk را مشخص کنید.


تمرین ۳: معادله‌ی خطی را بنویسید که از وسط پاره خط AB : $A(-3, 2)$ و $B(-1, 4)$ گذشته و بر


خط $3x + 2y - 3 = 0$ عمود باشد. سپس فاصله‌ی نقطه A از خط به دست آمده را تعیین کنید.


تمرین ۴: فاصله‌ی نقطه $A(2, 3)$ از خط $2x - 5 = 0$ را به دست آورید.


تمرین ۵: سه نقطه‌ی $A(1, 2)$ و $B(0, 1)$ و $C(a, 3a)$ بر روی یک خط واقعند. مقدار a را به دست آورید.

تمرین ۶: معادله عمود منصف پاره خط $2x + 3y = 1$: $(-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4})$ را به دست آورید. 

تمرین ۷: فاصله‌ی دو خط با معادله‌های $3x - 4y + 5 = 0$ و $3x - 4y + 2 = 0$ از یکدیگر چقدر است؟ 

تمرین ۸: فرض کنید $A(1, -2)$ و $B(5, 1)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند طول قطر این مربع را حساب کنید. 

تمرین ۹: معادله قطرهای دایره‌ای بصورت $mx + (m-1)y = m+2$ است. اگر این دایره بر خط $3x - 4y - 2 = 0$ مماس باشد. شعاع دایره را بیابید. 

تمرین ۱۰: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(2, 3)$ گذشته و بر خط $x - 3y + 2 = 0$ عمود باشد. سپس مختصات محل تلاقی دو خط را به دست آورید. 

تمرین ۲

تمرین ۱: مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

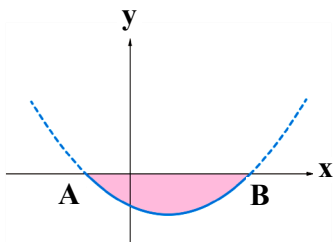
ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

تمرین ۲: $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

تمرین ۳: شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 2$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.




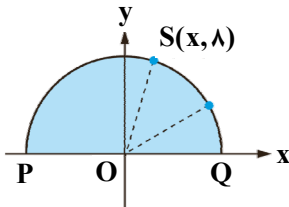
الف) مختصات نقاط انتهایی عدسی A و B را به دست آورید.


ب) اگر x بر حسب سانتی‌متر باشد طول AB را به دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

تمرین ۴: ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ می‌باشد.

تمرین ۵: خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟ 




تمرین ۶: نقطه $A(x, 8)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع 10 در شکل روبه‌رو داده شده است. 

الف) مقدار x را به دست آورید.

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به دست آورید.


پ) نشان دهید \hat{PSQ} قائمه است.

تمرین ۷: اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر 2 باشد، مقدار a چقدر است؟ 

تمرین ۸: سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 2)$ ، $C(3, 1)$ می‌باشند. 

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

تمرین ۹: نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر 5 باشد. 

تمرین ۱۰: نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به دست آورید.

تمرین ۳

تمرین ۱: اگر نقطه $(3, 5)$ قرینه نقطه $(-7, 3)$ نسبت به خط d باشد معادله خط d را بنویسید.

تمرین ۲: اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط $y = 2x$ و $x + 2y = 5$ و $x = 2$ است. نوع مثلث را مشخص کنید.

تمرین ۳: فاصله دو خط $2x - 3y + 6 = 0$ و $4x - 6y + 5 = 0$ را بدست آورید.

تمرین ۴: یک ضلع مستطیلی موازی یکی از محورهای مختصات بوده و نقطه $(4, 1)$ یک رأس آن می باشد اگر معادله یک قطر آن $2x - y = 3$ باشد مساحت آن را بدست آورید.

تمرین ۵: قرینه نقطه $(4, -13)$ را نسبت به خط $5x + y + 6 = 0$ بدست آورید.

تمرین ۶: اگر نقطه $(-۶, +۴)$ و $(-۲, -۱)$ و $(۲, ۳)$ وسط‌های اضلاع مثلثی باشند مختصات رأس‌های این مثلث را بدست آورید.

تمرین ۷: دو خط $۳x - ۴y = ۱$ و $۴x + ۳y = k$ مفروضند به ازای کدام مقدار k نقطه $A(۱, ۲)$ روی نیمساز زاویه بین این دو خط قرار می‌گیرد؟

تمرین ۸: معادله خط‌هایی را بنویسید که بر خط $۲x + y = ۰$ عمودند و فاصله مبدأ از آن‌ها برابر $\sqrt{۵}$ است.

تمرین ۹: ثابت کنید فاصله نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ از خط $d: ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



قرین ۱۰: دو نفر D و ABCD (مطابق شکل) ابتدای دو جاده موازی ایستاده‌اند.

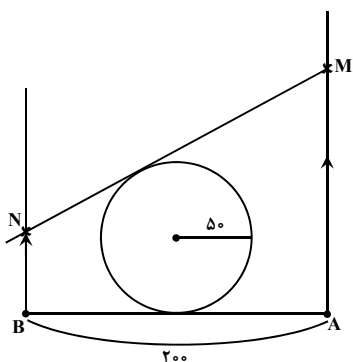
فاصله A و B برابر ۲۰۰ متر و خط AB بر دو جاده عمود است.

ساختمانی دایره شکل در بالای خط AB و مماس بر آن و در فاصله‌ی مساوی از دو

جاده قرار دارد. شعاع نمای این دایره ۵۰ متر است این دو نفر با سرعت ۳ و ۱ متر بر

ثانیه شروع به حرکت به سمت شمال می‌کنند. پس از چند ثانیه می‌توانند مجدداً

همدیگر را ببینند؟



چند نمونه تست کنکور و تألیفی

تست ۱: دایره‌ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن بصورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره

(تهری فارج ۹۰)

کدام است؟

۳ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

تست ۲: دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند مساحت این مربع کدام است؟

(تهری ۹۲)

$\frac{25}{4}$ (۴)

$\frac{25}{8}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$\frac{9}{8}$ (۱)



تست ۳: یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$

(تهربی ۸۰)

و $B(8, 3)$ عمود است. معادله آن خط کدام است؟

(۴) $3y - 2x = -5$

(۳) $2y - 3x = -5$

(۲) $2y + 3x = 1$

(۱) $2y + 3x = 4$

تست ۴: معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ و $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله خطی کوچکترین ارتفاع این مثلث بر

(تهربی ۸۴)

آن قرار دارد کدام است؟

(۴) $y + x = \frac{1}{3}$

(۳) $y + x = \frac{2}{3}$

(۲) $x = \frac{2}{3}$

(۱) $g = \frac{2}{3}$

تست ۵: نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع

(تهربی قارج ۹۳)

کدام است؟

(۴) ۸۰

(۳) ۷۵

(۲) ۴۵

(۱) ۴۰

تست ۶: نقطه‌ای با کدام طول روی محور x ها انتخاب شود بطوریکه تفاضل فواصل آن از دو نقطه $A(1, 5)$

(ریاضی ۹۳)

و $B(7, -2)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۹

(۱) ۸

تست ۷: دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(4, 7)$ و خط به معادله $y = x - 1$ در صفحه محورهای مختصات مفروضند. نقطه C بر

روی خط مفروض، با کدام طول انتخاب شود بطوریکه تفاضل فواصل آن از دو نقطه مفروض بیشترین مقدار را داشته باشد؟

(ریاضی قارج ۹۳)

(۴) ۳

(۳) ۱

(۲) صفر

(۱) -۱

تست ۸: سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ و $AC = y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله‌ی

(فارج ۱۹)

ارتفاع AH کدام است؟

$$3y + 2x = 9 \quad (4)$$

$$3y - 2x = 7 \quad (3)$$

$$9y - 6x = 17 \quad (2)$$

$$6y - 4x = 15 \quad (1)$$

تست ۹: به ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a, 3)$ و $(6, 4a + 1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟ (فارج ۱۵)

$$2, \frac{-9}{4} \quad (4)$$

$$2, \frac{-3}{4} \quad (3)$$

$$-2, \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-2, \frac{9}{4} \quad (1)$$

تست ۱۰: مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟ (تجزیی فارج ۹۲)

$$7/5 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6/5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$


تست ۱۱: فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟ (تجزیی فارج ۱۱)

$$2 + \sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} + 1 \quad (3)$$


$$\sqrt{3} - 1 \quad (2)$$

$$2 - \sqrt{3} \quad (1)$$

تست ۱۲: دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ 

(تجربی ۱۹)

برابر $\sqrt{13}$ است طول این ۲ نقطه کدام است؟(۴) $-11, 15$ (۳) $11, -9$ (۲) $-15, 11$ (۱) $-15, 9$

تست ۱۳: نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. 

(تجربی خارج ۹۳)


مساحت این مربع کدام است؟

(۴) 80 (۳) 75 (۲) 45 (۱) 40

تست ۱۴: دو ضلع مستطیلی منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن بر 

(تجربی خارج ۹۰)

نقطه $A(8, 5)$ واقع است مساحت این مستطیل کدام است؟(۴) $12/8$ (۳) $11/4$ (۲) $9/6$ (۱) $7/2$

تست ۱۵: نقطه $A(7, 6)$ رأس متوازی الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ 

(تجربی ۹۰)

می باشند مختصات وسط قطر کدام است؟

(۴) $(1, 5)$ (۳) $(3, 5)$ (۲) $(3, 4)$ (۱) $(4, 3)$