

۰۹۳۸۳۳۵۰۹۸۳



مهندس حامد دلیجه

فارغ التحصیل صنعتی امیر کبیر تهران

کسی که ریاضی کنکور را ۱۰۰ درصد زد!!!

برنامه ریزی تحصیلی کاملاً حرفه ای جهت افزایش تراز ۱۰۰۰

کلاس خصوصی ویژه



دی وی دی مفهومی تکنیکی



کلاس آنلاین ریاضی



کلاس نکته و تست ریاضیات - تهران و سراسر کشور

مشاوره ی انگیزشی ، برنامه ریزی، نحوه ی مطالعه درس، نحوه ی تست زدن و...

کلاس های ریاضی : حضوری و آنلاین خصوصی، گروهی

دی وی دی های ریاضی مفهومی + تکنیکی

جزوات و کتاب های برتر آموزشی کنکور

همین الان تماس بگیرید (در صورت پاسخ ندادن پیامک دهید)

0938 - 335 - 0983

شیوه تفکر ریاضی مهم تر از دانستن راه حل مسائل ریاضی است



مبنای آموزشی ما تأکید بر این نکته است

www.Riazi100.ir

دانلود از اپلیکیشن پادرس



حسابان

فصل ۳

www.Riazi100.ir



❖ توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ از ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند که به ازای هر مقدار x تعریف شده‌اند به عبارتی دامنه این توابع، مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} است و با تغییر x مقداری که برای $\sin x$ و $\cos x$ به دست می‌آید اعدادی بین -1 و 1 می‌باشند که در حقیقت برد این توابع $[-1, 1]$ می‌شود.

❖ در حالت کلی‌تر، بیش‌ترین مقدار توابع $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ ، $|a|$ و کم‌ترین مقدار $-|a|$ و دوره تناوب آن‌ها $\frac{2\pi}{b}$ می‌باشند.

❖ هم‌چنین بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ عبارتست از:

$$\max = |a| + c \quad \text{و} \quad \min = -|a| + c$$

مثال: در تابع $f(x) = -2 \sin 3x$ مقادیر حداقل و حداکثر و T ، دوره تناوب تابع را مشخص کرده، نمودار آن را در بازه $[0, T]$ رسم کنید.

حل:

$$\min f = -|-2| = -2, \quad \max f = |-2| = 2, \quad T = \frac{2\pi}{3}$$

www.Riazil100.ir

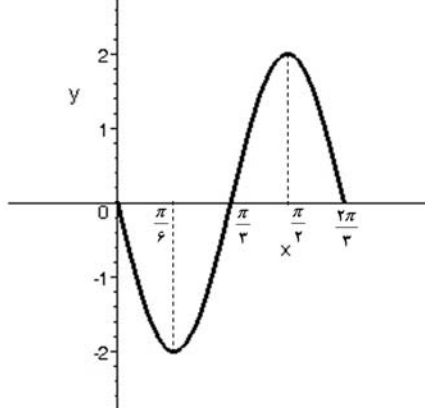
برای رسم، نقاطی که تابع مقادیر حداکثر و حداقل دارد را به دست آورده، هم‌چنین نقاطی که تابع صفر می‌شود را نیز مشخص می‌کنیم. سپس با توجه به نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ شکل را کامل می‌کنیم.

$$2 = -2 \sin 3x \Rightarrow \sin 3x = -1 \Rightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

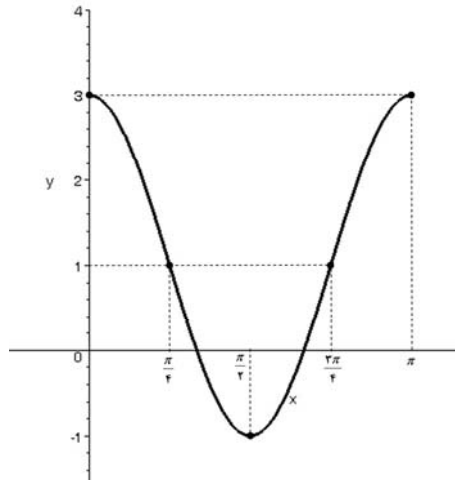
$$-2 = -2 \sin 3x \Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$0 = -2 \sin 3x \Rightarrow \sin 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

نمودار تابع به صورت زیر است:



مثال: تابع مثلثاتی مربوط به نمودار رسم شده را بنویسید (موج کسینوسی)



حل:

$$\left. \begin{array}{l} \min y = -1 = -|a| + c \\ \max y = 3 = |a| + c \end{array} \right\} \Rightarrow c = 1, |a| = 2$$

با توجه به شکل $a = 2$ می‌باشد چون موج کسینوسی از بالا شروع شده است. هم‌چنین:

$$T = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = 2 \cos(2x) + 1$$

مثال: اگر آونگ یک ساعت بزرگ، نوسانات عمودی داشته باشد و ضابطه این نوسانات $d(t) = 2 \cos \frac{\pi t}{10} + 6$

باشد (t بر حسب ثانیه و d بر حسب متر)،

(الف) آونگ از حالت تعادل حداکثر چند متر بالا می‌رود.

(ب) چه مدت طول می‌کشد تا یک نوسان کامل انجام گیرد.

(ج) پاندول چند نوسان کامل در مدت ۲ دقیقه انجام می‌دهد.

(د) نمودار تابع را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل: الف)

در واقع باید بیشترین مقدار تابع را محاسبه نمود، بنابراین کفایست به جای $\cos \frac{\pi t}{10}$ عدد یک قرار داده

$$\text{یعنی } \max d = |a| + c = 2 + 6 = 8$$

(ب)

$$b = \frac{\pi}{10} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20 \quad \text{در ۲۰ ثانیه یک نوسان کامل انجام می‌گیرد}$$

(ج)

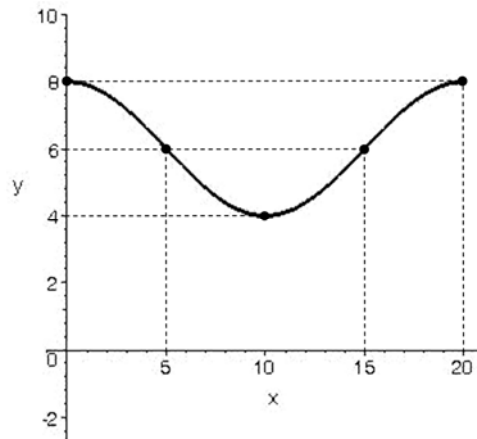
$$2 \times 60 = 120 \quad \text{ثانیه} \quad \Rightarrow 120 \div 20 = 6 \quad \text{نوسان کامل}$$

(د)

$$\max d = 8 \Rightarrow 8 = 2 \cos \frac{\pi}{10} t + 6 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{10} t = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{10} t = 0, \frac{\pi}{10} t = 2\pi \Rightarrow t = 0, t = 20$$

$$\min d = 4 \Rightarrow 4 = 2 \cos \frac{\pi}{10} t + 6 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{10} t = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{10} t = \pi \Rightarrow t = 10$$

$$d = 6 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi t}{10} = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi t}{10} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 5, t = 15$$

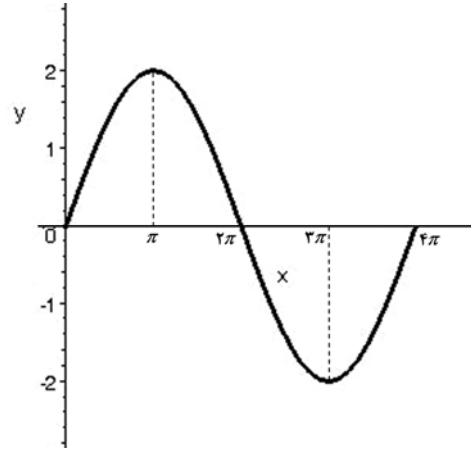


www.Riazi100.ir

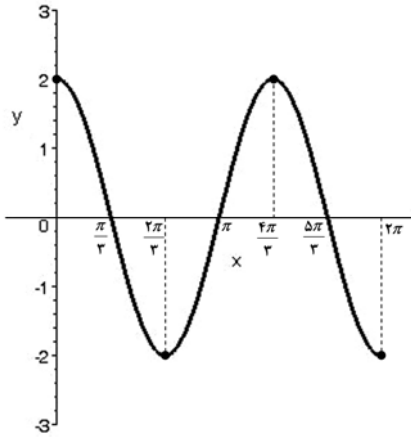


۱- معادله توابعی که شکل آن‌ها رسم شده‌اند را بنویسید.

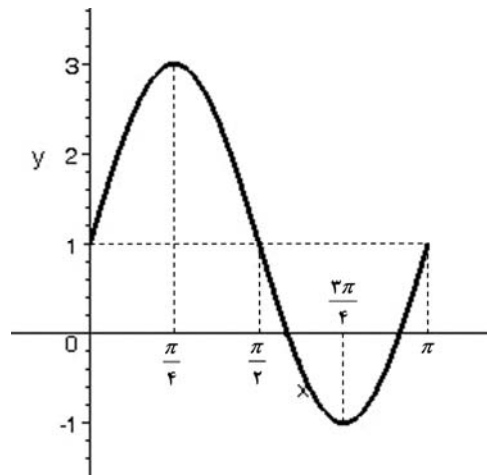
(الف)



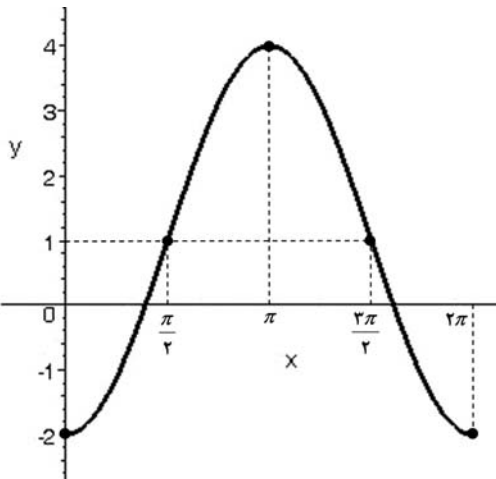
(ب)



(ج)



(د)



www.Riazi10.com

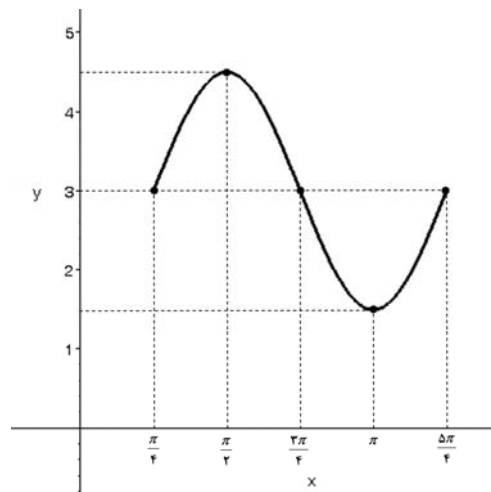
۲- در یک نمایشگاه چرخ و فلکی قرار دارد که در هر کابین آن دو نفر می‌توانند سوار شوند. مریم و زهرا تصمیم گرفتند سوار یکی از کابینهای چرخ و فلک شوند که محل استقرار آنها ۴ متر با زمین فاصله دارد حرکت این چرخ و فلک بدین گونه است که در بدو حرکت به طرف پایین‌ترین نقطه که یک متر با زمین فاصله دارد، آمده و سپس به بالاترین نقطه که ۷ متر با زمین فاصله دارد حرکت می‌کند و مدت زمان یک دور کامل ۱۲ ثانیه طول می‌کشد تابع مربوط به ارتفاع کابین مریم و زهرا نسبت به زمین را

به صورت یک تابع سینوسی بنویسید؟ آیا می‌توان این تابع را به صورت تابع کسینوسی نیز نوشت؟

۳- اگر حداقل و حداکثر تابع کسینوسی $y = a \cos bx + c$ به ترتیب ۵ و ۹ و دوره تناوب آن ۱۲ باشد (با شرط $a < 0$, $b < 0$) معادله این تابع را بنویسید. آیا موج کسینوسی این تابع حتماً باید از $x = 0$ آغاز شود.

❖ معادله‌ی توابع سینوسی و کسینوسی در حالت کلی به صورت $y = a \sin[b(t-c)] + d$ و $y = a \cos[b(t-c)] + d$ می‌باشد که مقدار c نمایشگر تعداد وامدی است که $y = a \sin(bt)$ و $y = a \cos(bt)$ در راستای محور طول‌ها انتقال می‌یابند. هرگاه $c > 0$ انتقال به طرف راست محور طول‌ها و هرگاه $c < 0$ انتقال در جهت چپ محور طول‌ها صورت می‌گیرد. d تعداد وامدی است که توابع $y = a \sin[b(t-c)]$ و $y = a \cos[b(t-c)]$ در راستای محور عرض‌ها منتقل می‌شود. اگر $b > 0$ انتقال به طرف بالا و اگر $b < 0$ انتقال در جهت پایین صورت می‌گیرد.

مثال: معادله تابع مربوط به نمودار مثلاتی زیر که در یک دوره‌ی تناوب رسم شده است را بنویسید (با شرط $a > 0$).



حل:

$$a = \frac{4/5 - 1/5}{2} = 1/5$$

$$T = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$$

هم‌چنین با توجه به شکل، نمودار شبیه نمودار سینوسی است که از $x = \frac{\pi}{4}$ شروع شده است. یعنی موج

سینوسی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به طرف راست منتقل شده است. پس $c = \frac{\pi}{4}$ و مقدار d نیز برابر است با:

$$d = \frac{\max y + \min y}{2} = \frac{4/5 + 1/5}{2} = 3$$

در نتیجه معادله‌ی تابع به صورت زیر است:

$$y = 1/5 \sin[2(t - \frac{\pi}{4})] + 3$$

تحقیق کنید آیا معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت $y = -1/5 \cos 2t + 3$ نیز نوشت؟

مثال: ارتفاع یک موج سوار نسبت به سطح زمین در حرکت بر روی آب از رابطه‌ی

$$h(t) = 10 \sin\left[\frac{\pi}{30}(t - 15)\right] + 12$$

بدست می‌آید. (h بر حسب متر و t بر حسب ثانیه)

الف) بیش‌ترین و کم‌ترین ارتفاع موج سوار چقدر است؟

ب) چه مدت طول می‌کشد تا موج سوار از نقطه با کم‌ترین ارتفاع به نقطه با بیش‌ترین ارتفاع برسد؟

ج) چه مدت طول می‌کشد تا یک حرکت نوسانی کامل انجام گیرد؟

د) در طول یک دقیقه در چه زمان‌هایی ارتفاع موج سوار نسبت به سطح زمین ۱۷ متر خواهد بود؟

حل: الف)

$$\max h = 10 + 12 = 22$$

$$\min h = 12 - 10 = 2$$

ب)

$$\left. \begin{aligned} 10 \sin\left[\frac{\pi}{30}(t - 15)\right] + 12 = 22 &\Rightarrow \sin\left[\frac{\pi}{30}(t - 15)\right] = 1 \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{30}(t - 15) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t - 15 = 15 \Rightarrow t = 30 \\ 10 \sin\left[\frac{\pi}{30}(t - 15)\right] + 12 = 2 &\Rightarrow \sin\left[\frac{\pi}{30}(t - 15)\right] = -1 \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{30}(t - 15) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t - 15 = -15 \Rightarrow t = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 30 - 0 = 30 \text{ s}$$

ج)

www.Riazi100.ir

$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60 \text{ s}$$

با استفاده از قسمت ب نیز می‌توان تشخیص داد که دوره تناوب $2 \times 30 = 60$ ثانیه می‌شود.

د)

$$h(t) = 17 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{30}(t - 15)\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{30}(t - 15) = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{30}(t - 15) = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = 20, t = 40$$

تمرین:

۱- ارتفاع آب در یکی از ورودی‌های جزیره‌ی ونکوور در کانادا در هر ساعت از شبانه‌روز از تابع

$$h(t) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3}\right) + 13$$

به دست می‌آید.

(الف) در هر روز چند بار عمق آب ماکسیمم می‌گردد؟

(ب) در چه ساعتی از روز عمق آب ماکسیمم می‌شود؟

(ج) ارتفاع بیش‌ترین عمق آب چقدر است؟

۲- در نزدیکی یک لنگرگاه بیشترین مقدار عمق آب $1/8m$ در ساعت ۹ صبح و کمترین عمق آب $0/1m$ ، ۶ ساعت بعد اتفاق می‌افتد.

(الف) ارتباط بین عمق آب و زمان را به صورت یک تابع کسینوسی بنویسید.

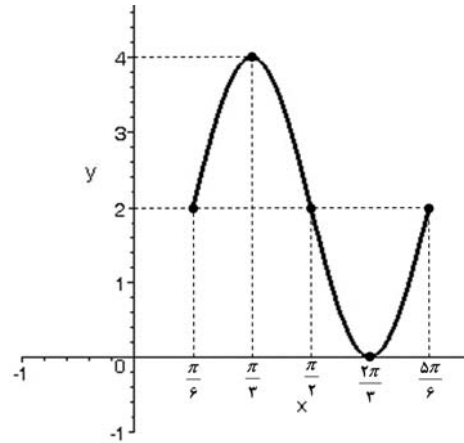
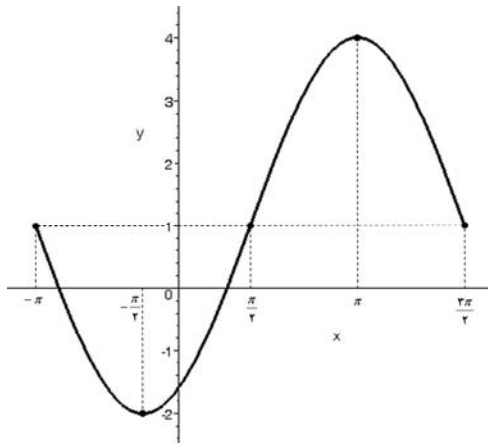
(ب) ارتباط بین عمق آب و زمان را به صورت یک تابع سینوسی بنویسید.

(ج) در ساعت ۵ بعد از ظهر عمق آب چقدر است؟

۳- معادله توابع مثلثاتی که شکل آن‌ها رسم شده‌اند را بنویسید. برای هر شکل یک معادله سینوسی و یک معادله کسینوسی بنویسید.

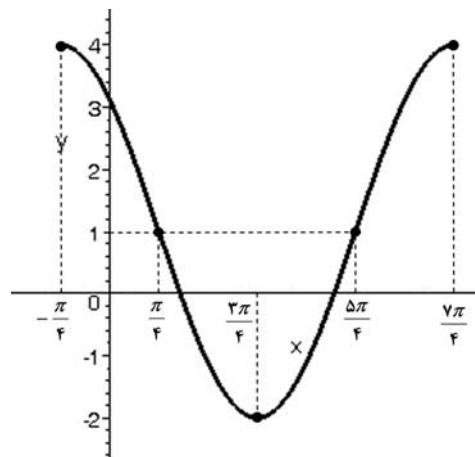
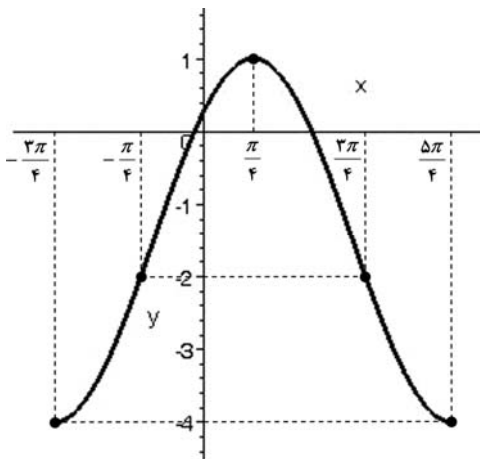
(ب)

(الف)



(د)

(ج)



۴- اگر $\frac{-\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ و $3 - m^2 = 2 \cos \alpha - 1$ ، حدود m را بیابید.

۵- برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = 3 \sin^2 x + 1$

ب) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 1$

ج) $y = \sin^2 x + \sin x - 1$

د) $y = \sin^2 x + 3 \sin x + 1$

۶- یک تابع سینوسی را چگونه می توان به صورت یک تابع زوج درآورد؟

۷- یک تابع کسینوسی را چگونه می توان به صورت یک تابع فرد درآورد؟

۸- اگر $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ و $\sin x = \frac{2-m^2}{4+m^2}$ مقدار m در چه فاصله ای قرار می گیرد؟

۹- صعودی یا نزولی بودن توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را در چهار ناحیه دستگاه مختصات بررسی کنید.

۱۰- اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، چه رابطه ای بین $\sin x$ و $\cos x$ وجود دارد؟ و اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، این

رابطه چگونه خواهد بود؟

۱۱- یک به یک بودن توابع سینوس و کسینوس را در یک دوره تناوب آن بررسی کنید و سپس دامنه را به گونه ای تحدید کنید تا تابع یک به یک شود.

❖ یکی دیگر از توابع مثلثاتی $y = \tan x$ است که از رابطه $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ به دست می آید.

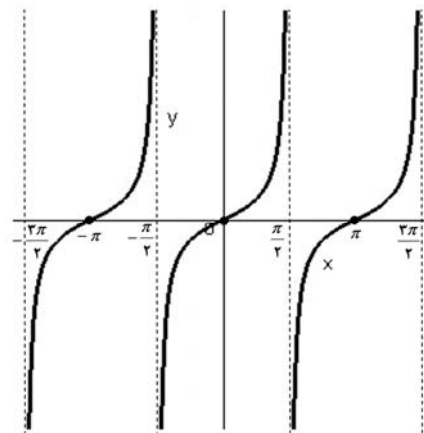
بنابراین $\tan x$ به ازای x هایی که $\cos x = 0$ تعریف نمی شود. یعنی تانژانت زوایایی که کمان آن ها بر مسب رادیان به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ تعریف نمی شوند. بنابراین دامنه تابع تانژانت برابر است با $\mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ و با توجه به این که $\tan(x + \pi) = \tan x$ ، دوره تناوب تابع تانژانت $T = \pi$ می باشد.

❖ یکی دیگر از توابع مثلثاتی $y = \cot x$ است که برابر است با $y = \frac{1}{\tan x}$ و چون

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ بنابراین تابع $y = \cot x$ به ازای هر x که $\sin x = 0$ تعریف نمی شود. یعنی

دامنه تابع کتانژانت برابر است با $D = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

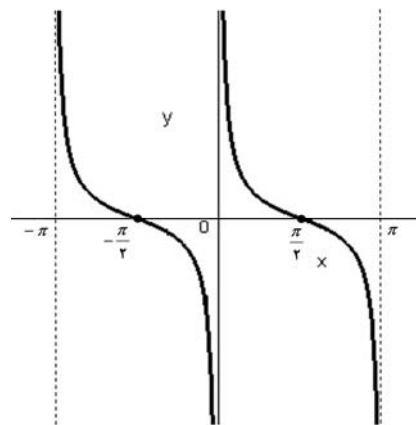
نمودار تابع $y = \tan x$ در فاصله $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ به صورت زیر می باشد:



www.Riazi100.ir

دیده می شود که هر شاخه در فاصله های به طول π تکرار می گردد. واضح است که هر شاخه از منحنی صعودی است. اما تابع در دامنه اش نه صعودی و نه نزولی است.

هم چنین نمودار تابع $y = \cot x$ در فاصله $-\pi < x < \pi$ به صورت زیر می باشد:



واضح است که هر شاخه از منحنی نزولی است.

مثال: اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آن گاه مقادیر تابع $y = \tan x$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ قرار دارند.

مثال: اگر $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ آن گاه مقادیر تابع $y = \cot x$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ قرار می‌گیرند.

تمرین:

۱- دامنه تابع $y = \tan(x + \frac{\pi}{4}) + 1$ را به دست آورید.

۲- اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ و $\tan \alpha = \frac{2}{m-1}$ حدود m را به دست آورید.

۳- اگر $0 < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ و $\tan \alpha = m - 1$ ، حدود m را بیابید.

۴- دامنه تابع $y = -2 \cot(x + \frac{2\pi}{5}) - 2$ را بیابید.

۵- آیا تابع تانژانت را می‌توان به یک تابع کتانژانت تبدیل کرد؟ چگونه؟

۶- یک به یک بودن تابع تانژانت و کتانژانت را در یک دوره تناوب آن بررسی کنید.

❖ روابط زیر بین توابع مثلثاتی برقرار است (اتماهای مثلثاتی):

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$3) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$4) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$5) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$6) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$7) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$8) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

مثال: درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

$$\text{الف) } \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{ب) } \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{ج) } \frac{2 \sin 2x}{2 \cos 2x + 1} = \frac{\sin x}{2 \cos x - 1} + \frac{\sin x}{2 \cos x + 1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\tan x}}{1 + \tan^2 x} &= \frac{\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= \sqrt{\sin x} \cos x \\ &= \sin \sqrt{x}\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos \sqrt{x}\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x - 1}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 1}} &= \frac{\sqrt{\sin x} \cos x + \sin x + \sqrt{\sin x} \cos x - \sin x}{\sqrt{\cos^2 x - 1}} \\ &= \frac{2\sqrt{\sin x} \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - 1}} \\ &= \frac{2\sqrt{\sin 2x}}{2(\sqrt{\cos^2 x - 1}) + 1} \\ &= \frac{2\sqrt{\sin 2x}}{2\cos 2x + 1}\end{aligned}$$

www.Riazi100.ir

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۷۵ درجه را بیابید.

حل:

$$\sin 75 = \sin(45 + 30) = \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75 = \cos(45 + 30) = \cos 45 \cos 30 - \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75 = \tan(45 + 30) = \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45 \tan 30} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\cot 75 = \frac{1}{\tan 75} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

به عنوان تمرین با قرار دادن ۴۵ - ۳۰ در مثال بالا نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵ درجه را بیابید.

۱- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos^2 x}{1 + 2 \sin x - 3 \sin^2 x} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\sin x - \tan \frac{x}{2}}{\cos x} = \tan \frac{x}{2} \quad (\text{د})$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\cos x} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{2}{\tan x + \cot x} = \sin 2x \quad (\text{و})$$

$$\tan 2x \cot x - \tan x \tan 2x = 2 \quad (\text{ه})$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1 \quad (\text{ح})$$

$$\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \cot x \quad (\text{ز})$$

۲- اگر $\cos 18^\circ = a$ نسبت های مثلثاتی زاویه ۹۹ درجه را به دست آورید.

۳- اگر $\sin 18^\circ = b$ نسبت های مثلثاتی زاویه ۳۶ درجه را به دست آورید.

۴- حاصل $\sin^2 2\alpha(2 + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$ را بیابید.

۵- اگر $\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ناحیه دوم باشد $\tan 2x$ را به دست آورید

۶- اگر $\tan(x + 17) = \frac{3}{4}$ حاصل $\cot(28 - x)$ را بیابید.

۷- اگر $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ حاصل $f(x) = \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2 x(1 + \tan x)}$ را به دست آورید.

۸- مقدار $\sin 40^\circ + \sqrt{3} \sin 50^\circ$ را به دست آورید.

۹- اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3$ مقدار $\tan 2x$ را به دست آورید.

۱۰- اگر $\frac{\sin(30 + x) - \cos(60 + x)}{\sin(30 + x) + \cos(30 + x)} = 2$ مقدار \cot را بیابید.

۱۱- درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (\text{ب})$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (\text{الف})$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \quad (\text{ج})$$

۱۲- عبارت $\cos 3x - \cot x \sin 3x$ را ساده کنید.

۱۳- اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$ حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ را بیابید.

۱۴- اگر $f(x) = (x^2 - 2)$ و $g(x) = f(f(f(2 \cos x)))$ حاصل $g\left(\frac{\pi}{16}\right)$ را بیابید.

❖ قوانین ضرب به جمع

$$1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$2) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$3) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

❖ قوانین جمع به ضرب

$$1) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$3) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

اثبات روابط فوق به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

مثال:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \end{aligned}$$

www.Riazi100.ir

مثال:

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x &= \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \sin x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \sin \frac{x + x - \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \end{aligned}$$

مثال: درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

الف) $\frac{\sin 7x + \sin x}{\cos 7x + \cos x} = \tan 4x$

ب) $\cos \Delta x \cos 7x + \sin 4x \sin 7x - \cos 4x \cos x = \sin 7x \sin 3x$

حل: الف:

$$\frac{\sin 7x + \sin x}{\cos 7x + \cos x} = \frac{2 \sin\left(\frac{7x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-x}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{7x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-x}{2}\right)} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x$$

ب:

$$\begin{aligned} \cos \Delta x \cos 7x + \sin 4x \sin 7x - \cos 4x \cos x &= \frac{1}{2} [\cos(\Delta x + 7x) + \cos(\Delta x - 7x)] \\ &+ \frac{1}{2} [\cos(4x - 7x) - \cos(4x + 7x)] \\ &- \frac{1}{2} [\cos(4x + x) + \cos(4x - x)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos 7x + \cos 3x + \cos x - \cos 7x - \cos \Delta x - \cos 3x] \\ &= \frac{1}{2} [\cos x - \cos \Delta x] \\ &= \frac{1}{2} (-2) \sin\left(\frac{x + \Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \Delta x}{2}\right) \\ &= -\sin 3x \sin(-2x) \\ &= \sin 3x \sin 2x \end{aligned}$$

www.Riazi100.ir

تمرین:

۱- تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin 20^\circ + \cos 50^\circ = \cos 10^\circ$

ب) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$

ج) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$

۲- مقدار عبارت $\frac{\sin 54^\circ}{\sin 18^\circ}$ را بیابید.

۳- عبارت $\cot 2x - \frac{2 \sin x}{\cos x - \cos 3x}$ را ساده کنید.

۴- حاصل $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ را بیابید.

۵- حاصل $\sin 70^\circ \sin 65^\circ (\tan 20^\circ + \tan 25^\circ)$ را بیابید.

۱) $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, x = 2k\pi + \pi - \alpha$

۲) $\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

۳) $\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

۴) $\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

مثال: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $2\cos^2 \theta + \cos \theta = 1$

ب) $1 - 2\cos 2x = 2\sin^2 x$

ج) $4\tan x + \cot x = 5$

(حل: الف)

$$2\cos^2 \theta + \cos \theta = 1 \Rightarrow 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = -1 = \cos \pi \Rightarrow \theta = 2k\pi + \pi \text{ یا } \theta = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

(ب)

$$1 - 2(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x \Rightarrow 1 - 2 + 4\sin^2 x = 2\sin^2 x \Rightarrow +4\sin^2 x = +2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$$

چهار جواب معادله‌ی مثلثاتی فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in Z$$

(ج)

$$4\tan x + \cot x = 5 \Rightarrow 4\tan x + \frac{1}{\tan x} = 5 \stackrel{\tan x \neq 0}{\Rightarrow} 4\tan^2 x + 1 = 5\tan x \quad (x \neq \frac{k\pi}{2})$$

$$\Rightarrow 4\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \tan x = \frac{1}{4} = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

چون کوچک‌ترین زاویه‌ای که مقدار تانژانت آن برابر با $\frac{1}{4}$ است را بدون ماشین حساب نمی‌توان یافت از زاویه α استفاده کردیم.

تمرین:

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

$$\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = 0 \quad (\text{ب}) \qquad 2 - 3 \cos^2 x - 2 \sin x = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 \quad (\text{د}) \qquad \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} \quad (\text{ج})$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1 \quad (\text{و}) \qquad \cos 3x + 2 \cos x = 0 \quad (\text{هـ})$$

$$2 \sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) \quad (\text{ح}) \qquad \tan x - \cot x = 4 \cos 2x \quad (\text{ز})$$

$$\sin 3x + \sin x = 0 \quad (\text{ی}) \qquad \sin x - \cos x = \cos 2x \quad (\text{ط})$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \quad (\text{ک})$$



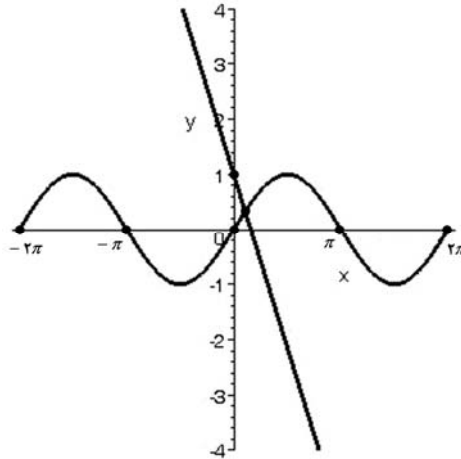
حل معادلات مثلثاتی به روش نمودار

بعضی از معادلات مثلثاتی از طریق جبری قابل حل نیستند و فقط با استفاده از رسم نمودار می‌توان تعداد جواب‌ها را بدست آورد و مقدار آن‌ها را تخمین زد.

مثال: معادله $\sin x + 2x = 1$ را حل کنید.

حل:

ابتدا معادله را به صورت $\sin x = -2x + 1$ می‌نویسیم. سپس نمودارهای $f(x) = \sin x$ و $g(x) = -2x + 1$ را رسم می‌کنیم طول نقاط تلاقی این دو نمودار جواب معادله مورد نظر می‌باشد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید معادله یک جواب دارد که بین صفر و $\frac{\pi}{4}$ است با روش آزمایش و خطا

می‌توان جواب تقریبی را بدست آورد. مثلاً:

www.Riazi100.ir

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1/4}{2} = 0.7 \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} + 1 \approx -\frac{3/14}{2} + 1 = -0.57 \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} + 1 \approx -\frac{3/14}{3} + 1 \approx -0.5 \end{cases}$$

$$x = 15^\circ = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin 15^\circ \approx 0.25 \\ g\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\pi}{12} + 1 \approx -\frac{3/14}{6} + 1 = \frac{2/86}{6} = 0.48 \end{cases}$$

لذا جواب معادله‌ی فوق نزدیک به $\frac{\pi}{12} \approx 0.26$ است و با ادامه‌ی این روش و با استفاده از ماشین حساب

می‌توان تقریب‌های بهتری یافت.

تمرین:

معادلات زیر را با روش نموداری حل کنید و تعداد جواب و حدود جواب را مشخص کنید.

$$1 - 2 \cot x = \frac{x}{3} \quad (\text{ب})$$

$$\tan 3x = x - 2 \quad (\text{الف})$$

$$2 \sin x = x^2 \quad (\text{د})$$

$$1 - 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\cos x - 2x = x^2 \quad (\text{و})$$

$$\sin x + |x - 2| = 1 \quad (\text{ه})$$

www.Riazi100.ir

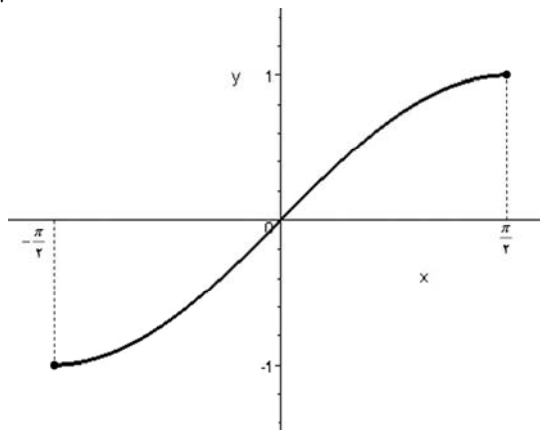


وارون توابع مثلثاتی

می‌دانیم تابعی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد بنابراین برای بدست آوردن وارون توابع مثلثاتی که یک به یک نیستند، باید دامنه‌ی آن‌ها را تحدید کنیم تا آن‌ها تبدیل به یک تابع یک به یک شوند.

تحدید تابع $y = \sin x$ به بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

$$y = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

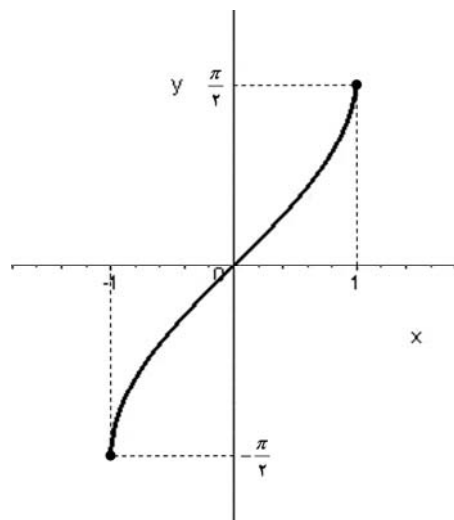


معکوس $y = \sin x$ را با نمادهای $y = \arcsin x$ یا $y = \sin^{-1} x$ نمایش می‌دهیم. پس:

$$y = \sin^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

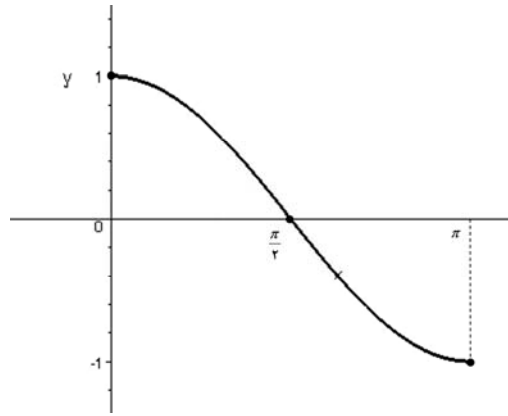
www.Riazi100.ir

و نمودار آن به صورت زیر است:



تحدید تابع $y = \cos x$ به بازه‌ی $[0, \pi]$ یک به یک بوده و معکوس پذیر است.

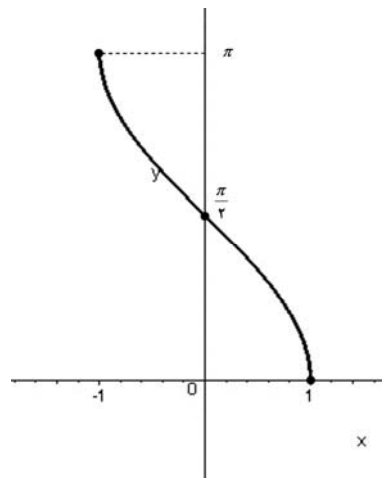
$$y = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$$



معکوس $y = \cos x$ را با نمادهای $y = \arccos x$ یا $y = \cos^{-1} x$ نمایش می دهیم. پس:

$$y = \cos^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

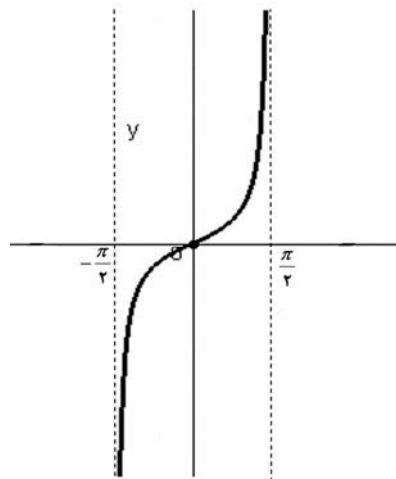
و نمودار آن به صورت زیر است:



www.Riazi100.ir

تحدید تابع $y = \tan x$ به بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یک به یک بوده و معکوس پذیر است.

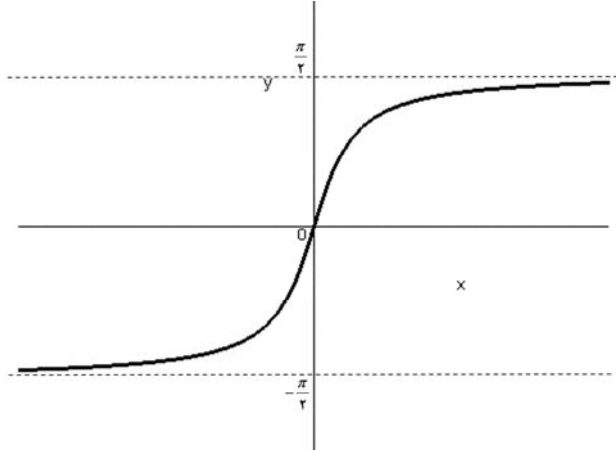
$$y = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



معکوس $y = \tan x$ را با نمادهای $y = \arctan x$ یا $y = \tan^{-1} x$ نمایش می دهیم. پس:

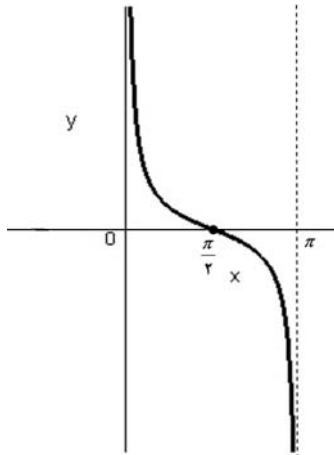
$$y = \tan^{-1} x : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



تابع $y = \cot x$ به بازه $(0, \pi)$ یک به یک بوده و معکوس پذیر است.

$$y = \cot x \quad , \quad x \in (0, \pi)$$

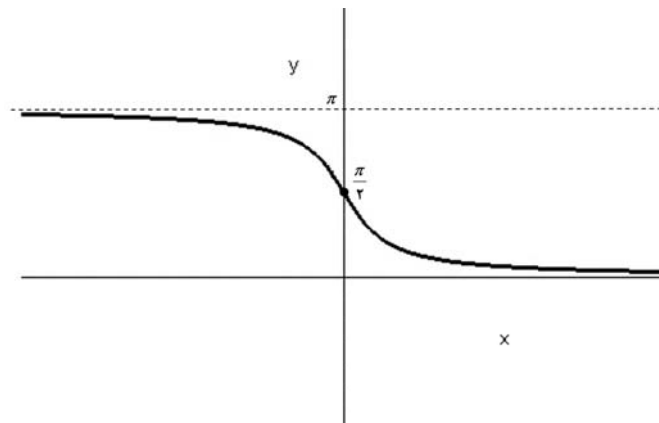


www.Riazi100.ir

معکوس $y = \cot x$ را با نمادهای $y = \text{arc cot } x$ یا $y = \cot^{-1} x$ نمایش می دهیم. پس:

$$y = \cot^{-1} x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



مثال: مقدار $\sin^{-1}(\cdot)$ و $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $\tan^{-1}(1)$ و $\cot^{-1}(-1)$ را بدست آورید.

حل:

$\sin^{-1}(a) = b$ یعنی $\sin b = a$. با این توضیح داریم:

$$\sin^{-1}(\cdot) = \cdot$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cot^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

تمرین:

آیا تساوی‌های زیر نیز درست است؟ چرا؟

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin^{-1}(\cdot) = \pi$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos\left[2\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$

ب) $\cos\left(\sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

حل: الف)

www.Riazi100.ir

$$\left. \begin{array}{l} \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \\ \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 0 = 1$$

ب)

$\sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = A$ بنابراین $\sin A = -\frac{4}{5}$. چون سینوس A منفی است و دامنه تابع $y = \sin^{-1} x$ بازه‌ی

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است. پس A در ناحیه چهارم قرار دارد بنابراین $\cos A$ مثبت بوده و

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

تابع $f(x) = \arcsin(\sin x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است، زیرا:

$$f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x)$$

هم‌چنین اگر $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، داریم:

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

اگر $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ آن گاه $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$ و بنابراین:

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$$

به طور مشابه تابع $g(x) = \arccos(\cos x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است و به ازای $0 \leq x \leq 2\pi$ داریم:

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

همچنین تابع $h(x) = \arctan(\tan x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است و به ازای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\arctan(\tan x) = x$$

و بالاخره تابع $k(x) = \operatorname{arc cot}(\cot x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است و به ازای $0 < x < \pi$ داریم:

$$\operatorname{arc cot}(\cot x) = x$$

تمرین:

- ۱- نمودار توابع f ، g ، h و k تعریف شده در بالا را در فاصله‌ی $[2\pi, 2\pi]$ رسم کنید
 ۲- نمودار توابع $\sin(\arcsin x)$ و $\cos(\arccos x)$ را رسم کنید.
 ۳- دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

$$y = \arctan \frac{x}{1+x} \quad (\text{ب})$$

$$y = \arctan(\cos x) \quad (\text{الف})$$

$$y = \arcsin \frac{x}{1+x^2} \quad (\text{ج})$$

۴- درستی اتحاد های زیر را بررسی کنید.

$$\text{الف) } \tan(\sin^{-1} 0) + \cot(\cos^{-1} 0) = \cos(\sin^{-1} 1)$$

$$\text{ب) } \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$$

$$\text{ج) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \cos^{-1} \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

۵- دامنه تابع با ضابطه $y = \tan^{-1} \sqrt{x-1}$ را به دست آورید.

۶- مقدار عبارت های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \cot^{-1}\left(\tan \frac{19\pi}{4}\right) + \cos^{-1}\left(\sin \frac{21\pi}{4}\right)$$

ب) $\cot^{-1}(-1) + \cos^{-1}(\sin(\frac{-\pi}{3}))$

۷- برد تابع $y = 2 + \sin^{-1}(1+x^2)$ چند عضو دارد؟

۸- معادله $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{4}$ را در نظر گرفته تابع y بر حسب x را در این معادله بیابید.

۹- تابع $y = \sin^{-1} \frac{1}{x-1}$ صعودی است یا نزولی؟

۱۰- دامنه تابع $y = \sin^{-1} \sqrt{x-1} + \cos^{-1}(2x-1)$ را بیابید.

تمرین‌های تکمیلی:

۱- اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

۲- اگر $\sin \alpha = \frac{m+1}{2}$ و $\cos \alpha = \frac{m-1}{2}$ باشد، چند مقدار متمایز برای m به دست می‌آید.

۳- معادله $\tan x + \cot x = 5$ چند جواب در بازه $[0, 3\pi]$ دارد؟

۴- معادله $2 \sin x + \cos 2x = 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۵- حاصل $\cos(45+x) \cos(45-x)$ را بیابید.

۶- کسر $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + 2 \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$ را ساده کنید.

۷- معادله $\cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۸- حاصل $\frac{\sin 40 + \sin 20}{\cos 40 - \cos 20}$ را بیابید.

۹- معادله $\cos 5x + \cos 3x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ دارد؟

۱۰- معادله $\sin 5x - \sin 3x = \sin x$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{4}]$ چند جواب دارد؟

۱۱- معادله $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱۲- فرض کنیم $x \neq \frac{k\pi}{4}$ و $|\sin x + \tan x| = |\sin x| + |\tan x|$ انتهای کمان x در چه ناحیه‌ای از

دستگاه مختصات واقع است؟

۱۳- اگر $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ باشد و $|x| < \frac{\pi}{9}$. حدود مقادیر m را بیابید.

۱۴- کمترین مقدار عبارت $3 \sin^2 \pi x - 7 \sin \pi x$ را در فاصله $[\frac{3}{4}, \frac{11}{6}]$ را به دست آورید.

۱۵- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{4}$ آنگاه مقدار $\cos 4x$ چقدر است؟

۱۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$ را بیابید.

۱۷- معادله $2 \sin x - \tan x = 0$ چند جواب متمایز در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

۱۸- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.



$$\cos(\cos^{-1} \frac{1}{3}) \quad (\text{ب})$$

$$\cos^{-1}(\cos(-\frac{3\pi}{2})) \quad (\text{الف})$$

$$\tan(\sin^{-1} \frac{21}{29}) \quad (\text{د})$$

$$\tan(\cot^{-1} \frac{11}{6}) \quad (\text{ج})$$

۱۹- معادله $1 + \cos 2x = 4 \cos 4x$ در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

۲۰- جواب کلی معادله $\sin(x + \frac{\pi}{6}) \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$ را بیابید.

۲۱- از رابطه $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin \alpha$ با فرض $\sin 2x = 1$ چند مقدار برای α که $\alpha \in [0, 2\pi]$ بدست می‌آید.

۲۲- مقدار $A = (1 - \cot 22)(1 - \cot 22)$ را بیابید.

۲۳- معادله $2 \cot 2x + \tan x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ روی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۲۴- در صورتی که بدانیم $\sin \alpha = \frac{7}{12}$ و $\tan \beta = \frac{5}{12}$ و زوایای α و β حاده باشند مطلوبست محاسبه‌ی

هر یک از عبارتهای زیر:

$$\cos(\pi - \alpha + \beta) \quad (\text{ب})$$

$$\tan[\pi - (\alpha + \beta)] \quad (\text{الف})$$

۲۵- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

۱) $16 \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = 1$

۲) $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$

۳) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2 \sin 5^\circ}$

۴) $8 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$

www.Riazi100.ir



DVD شاهکار تدریس کسی که ریاضی را ۱۰۰ زد

۰۹۳۸۳۳۵۰۹۸۳ (همین الان تماس بگیرید) Riazi100.ir (نمونه فیلم)

