تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع نمایی به فرم $y = a^x$ در هر دو حالت $a > ۰ , ۰ < a < ۱$ یک به یک و وارون پذیر است. وارون تابع $y = a^x$ تابع $y = log_a x$ می باشد(می خوانیم لگاریتم x در مبنای a)

$$y = a^x \Leftrightarrow x = log_a^y$$

$$a > ۰ \quad , \quad a \neq ۰ \quad , \quad y > ۰$$

a مبنای لگاریتم است.

نکته: لگاریتم عدد یک در هر مبنایی برابر صفر است.

$$m^۰ = ۱ \quad \Leftrightarrow \quad log_m^۱ = ۰$$

نکته: لگاریتم هر عددی در مبنای خودش برابر یک می باشد.

$$m^۱ = m \quad \Leftrightarrow \quad log_m^m = ۱$$

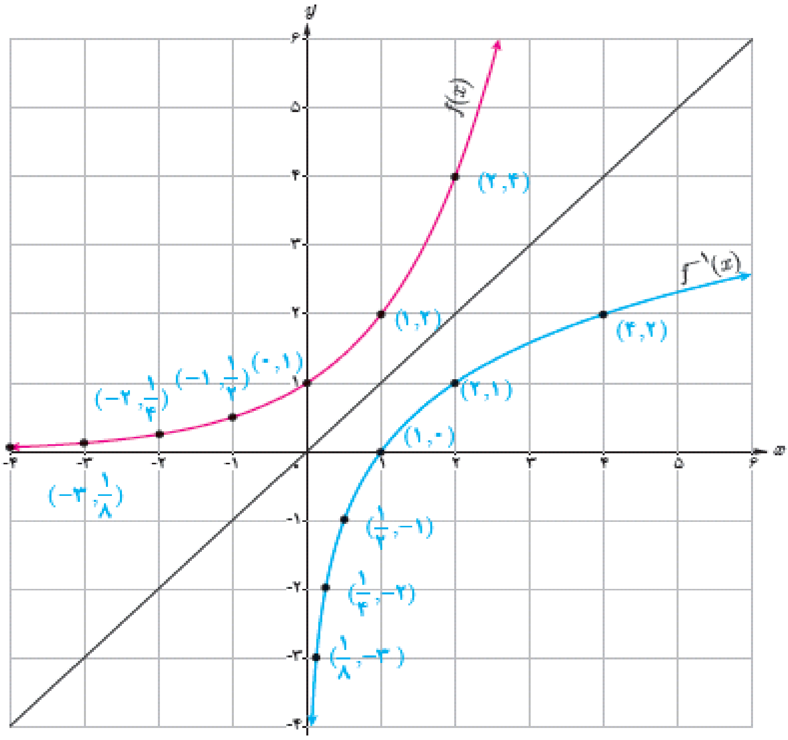
نکته: اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد می توانیم آن را ننویسیم.

$$log_{۱۰}^m = \log m$$

نمودار توابع لگاریتمی

همانطور که گفته شد تابع $y = log_a x$ وارون تابع $y = a^x$ می باشد، پس نمودار تابع $y = log_a x$ قرینه نمودار $y = a^x$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم می باشد.

به طور مثال داریم:



$$f(x) = ۲^x \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-۱}(x) = log_۲^x$$

مثال) **مقدار x را در تساوی های زیر بیابید.**

الف) $log_{\sqrt[۳]{۵}}^{(x+۲)} = ۶$

حل)

$$(۵^{\frac{۱}{۳}})^۶ = x + ۲ \qquad ۲۵ = x + ۲ \qquad x = ۲۳$$

ب) $log_{۰.۲}log_۲log_۳x = -۱$

حل)

$$log_۲log_۳x = (۰.۲)^{-۱} = ۵ \longrightarrow log_۳x = ۲^۵ = ۳۲ \longrightarrow x = ۳^{۳۲}$$

محاسبه دامنه و برد توابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ همزمان باید سه شرط زیر را داشته باشد.

۱) $g(x) > ۰$
۲) $h(x) > ۰$
۳) $h(x) \neq ۱$

مثال)دامنه و برد تابع را بدست آورید.

$$f(x) = \log\left(-x + \sqrt{x}\right)$$

محاسبه دامنه :

$۱)\ x > ۰$
$۲) -\ x + \sqrt{x} > ۰ \ \rightarrow \sqrt{x} > x \rightarrow x > x^{۲} \rightarrow \ x^{۲} - x < ۰$
$\rightarrow x(x - ۱) < ۰$
$\mathrm{D_f} = (۰.۱)$

محاسبه برد :

$$۱۰^{y} = -x + \sqrt{x} \ \ (\sqrt{x} = A) \rightarrow ۱۰^{y} = -A^{۲} + A + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۱}{۴} - ۱۰^{y} = (A - \frac{۱}{۲})^{۲} \geq ۰$$

$$۱۰^{y} \leq \frac{۱}{۴} \ \rightarrow \ \log_{۱۰} \frac{۱}{۴} \geq y \ \ \rightarrow \ \ R_f = (-\infty . \log_{۱۰} \frac{۱}{۴})$$

نکته مهم : اگر در یک نامساوی، لگاریتمی با مبنای بزرگتر از یک به طرفینی بچسبانیم یا از طرفین بکنیم،نامساوی تغییر نمیکند ولی اگر مبنای لگاریتم عددی مابین صفر و یک باشد،نامساوی تغییر میکند.

به طور مثال :

$$۱۰^{۵} \geq ۲ \ \ \rightarrow \ \ ۵ \geq \log ۲$$

$$(۰.۲)^{۳} \geq (۰.۰۲)^{۳} \ \ \rightarrow \ \ ۳\log_{۰.۳} ۰.۲ \leq ۳\log_{۰.۳} ۰.۰۲$$

قوانین لگاریتم

۱) $\log_a m + \log_a n = \log_a mn$

۲) $\log_a m - \log_a n = \log_a m/n$

۳) $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$

۴) $\log_b a^m = m\log_b a$

۵) $\log_{b^n} a = \frac{۱}{n}\log_b a$

۶) $\log_b \frac{۱}{a} = -\log_b a$

۷) $\log_{\frac{۱}{b}} a = -\log_b a$

۸) $\log_{\frac{۱}{b}} \frac{۱}{a} = \log_b a$

۹) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

۱۰) $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$

۱۱) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

۱۲) $a^{\log_a b} = ۱$

نکته بسیار مهم

تبدیل لگاریتم ۲ به لگاریتم ۵ در مبنای ۱۰

$$\log ۲ = \log_{۱۰} \frac{۱۰}{۵} = \log ۱۰ - \log ۵ = ۱ - \log ۵$$

$$\log ۵ = \log_{۱۰} \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲$$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی ابتدا سعی میکنیم طرفین تساوی را بصورت لگاریتم هایی با مبناهای برابر بنویسیم سپس از لگاریتم ها صرف نظر میکنیم و ریشه های معادله را می‌یابیم. و در نهایت ریشه هایی قابل قبول است که هیچ یک از لگاریتم ها را بی معنی نکند.

مثال) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$۱)\quad \log_{۳} x\sqrt{x} + \log_{x\sqrt{x}} ۳ = ۲$$

پاسخ)

$$\log_{۳} x\sqrt{x} = A$$

$$A + \frac{۱}{A} = ۲ \quad \to \quad A^{۲} - ۲A + ۱ = ۰ \quad \to \quad (A-۱)^{۲} = ۰ \quad \to \quad \log_{۳} x\sqrt{x} = ۱ \quad \to x\sqrt{x} = ۳$$

$$x^{۳} = ۹ \quad \to \quad x = \sqrt[۳]{۹}$$

$$۲)\quad (۳x)^{\log ۳ + \log x} = ۱۰^{۴}$$

پاسخ)

$$\to \quad (۳x)^{\log ۳x} = ۱۰^{۴} \qquad \log(۳x)^{\log ۳x} = \log ۱۰^{۴} = ۴$$

$$\log ۳x \times \log ۳x = ۴ \quad \to \quad \log ۳x = ۲ \quad \to \quad ۳x = ۱۰۰$$

$$\to x = \frac{۱۰۰}{۳} \to \log ۳x \times \log ۳x = ۴ \quad \to \quad \log ۳x = -۲ \quad \to \quad ۳x = ۰.۰۱$$

$$\to x = \frac{۱}{۳۰۰}$$

نامعادلات لگاریتمی :

برای حل نامعادلات لگاریتمی ابتدا دامنه هر یک از توابع را می‌یابیم بعد به کمک قوانین لگاریتم محدوده نامساوی را محاسبه میکنیم.در آخر بین تمام محدوده های به دست آمده اشتراک میگیریم.

مثال) نامعادله زیر را حل کنید.

$$\log_{\frac{۱}{۲}} \log_۲ \log_{x-۱} ۹ > ۰$$

محاسبه دامنه :

$\log_{x-۱} ۹ : x-۱>۰ \quad \rightarrow \quad x>۱ \quad (i) \quad \& \; x-۱ \neq ۱ \rightarrow x \neq ۲$

$\log_۲ \log_{x-۱} ۹ : \; \log_{x-۱} ۹ > ۰ \quad \rightarrow \quad \log_{x-۱} ۹ > \log_{x-۱} ۱$

$۰ < x-۱ < ۱ \quad \rightarrow \quad ۱ < x < ۲ \quad \rightarrow \quad ۹ < ۱$ غقق

$x-۱ > ۱ \quad \rightarrow \quad x > ۲ \;\; (ii) \rightarrow ۹ > ۱$ قق

$\log_{\frac{۱}{۲}} \log_۲ \log_{x-۱} ۹ \; : \; \log_۲ \log_{x-۱} ۹ > ۰ \quad \rightarrow \log_۲ \log_{x-۱} ۹ > \log_۲ ۱$

$\log_{x-۱} ۹ > ۱ \quad \rightarrow \quad \log_{x-۱} ۹ > \log_{x-۱}(x-۱) \rightarrow \; ۹ > x-۱$

$\rightarrow ۱۰ > x \quad (iii)$

حل نامعادله :

$\log_{\frac{۱}{۲}} \log_۲ \log_{x-۱} ۹ > ۰ \quad \rightarrow \quad \log_{\frac{۱}{۲}} \log_۲ \log_{x-۱} ۹ > \log_{\frac{۱}{۲}} ۱$

$\log_۲ \log_{x-۱} ۹ < ۱ \quad \rightarrow \quad \log_۲ \log_{x-۱} ۹ < \log_۲ ۲$

$\log_{x-۱} ۹ < ۲ \quad \rightarrow \quad \log_{x-۱} ۹ < \log_{x-۱}(x-۱)^۲$

$۹ < (x-۱)^۲ \; : \; x-۱ > ۳ \quad \rightarrow \quad x > ۴ \qquad (iiii)$

$۹ < (x-۱)^۲ \; : \; x-۱ > -۳ \quad \rightarrow \quad x < -۲ \quad (iiii)$

مجموعه جواب اشتراک هر ۴ بازه میباشد :

$$(i) \cap (ii) \cap (iii) \cap (iiii) = (۴.۱۰)$$

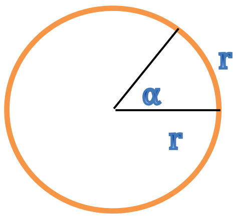
مثلثات

تا کنون زاویه ها را بر حسب درجه اندازه گیری می کردیم. استفاده از واحد «درجه» در هندسه بسیار متداول است. یک درجه را $\frac{۱}{۳۶۰}$ام محیط یک دایره می نامیم و با علامت ۱° نمایش می دهیم. حال می خواهیم اندازه یک زاویه را بر حسب واحد جدیدی به نام رادیان بیان کنیم.

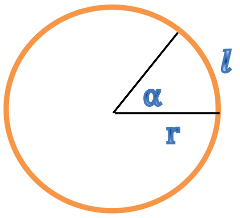
رادیان

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه ای مرکزی است که طول کمان روبه رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولا از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می شد.

در دایره مقابل اندازه زاویه α برابر یک رادیان می باشد.



نکته: اندازه زاویه α بر حسب رادیان در دایره ای به شعاع r برابر است با:



$$\alpha = \frac{\text{طول کمان روبه رو به زاویه ی } \alpha}{\text{شعاع دایره}} = \frac{l}{r}$$

نکته: اگر D زاویه ای بر حسب درجه و R اندازه آن بر حسب رادیان باشد، داریم:

$$R = \frac{D\pi}{۱۸۰}$$

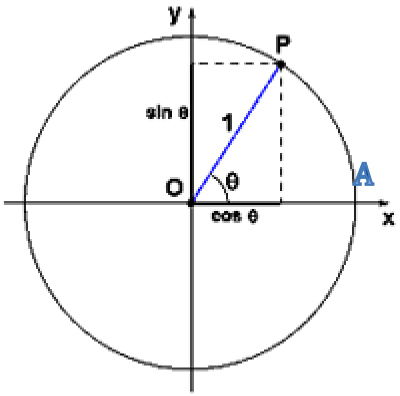
یعنی برای تبدیل یک زاویه بر حسب درجه به رادیان، آن را در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب می کنیم.

به طور مثال اندازه زاویه ۳۰ بر حسب رادیان برابر است با:

$$R = \frac{۳۰\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶}$$

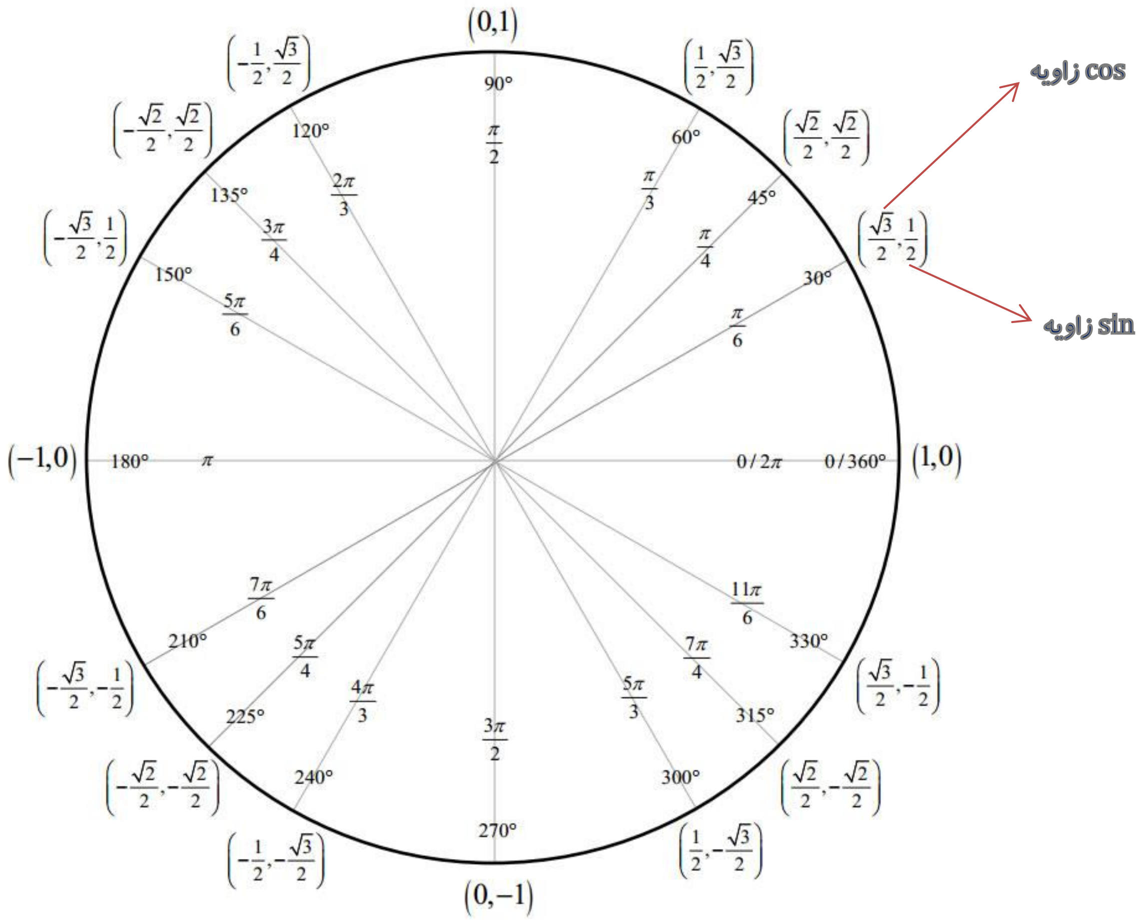
دایره مثلثاتی:

دایره مثلثاتی دایره ای است به شعاع واحد جهت مثبت آن در خلاف جهت عقربه های ساعت و جهت منفی زاویه ها در آن ، جهت حرکت عقربه های ساعت می باشد.



نکته ۱: مبدا حرکت زاویه ها نقطه A می باشد.

نکته ۲: همانطور که در شکل بالا می بینید $\sin$ زاویه θ برابر اندازه تصویر پاره خط OP بر محور y ها و $\cos$ زاویه θ برابر اندازه تصویر پاره خط OP بر محور x ها می باشد.



طول کمان

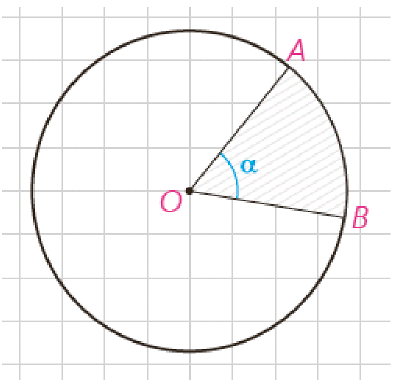
۱) اگر l طول کمان روبه رو به زاویه θ بر حسب **درجه** ،در دایره ای به شعاع r باشد، داریم:

$$l = \frac{\theta}{۳۶۰} \times (۲\pi r)$$

۲) اگر l طول کمان روبه رو به زاویه θ بر حسب **رادیان** ،در دایره ای به شعاع r باشد، داریم:

$$l = r\theta$$

نکته:اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ بر حسب **درجه** مساوی α باشد، مساحت قطاع برابر است با $S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$ و اگر α بر حسب **رادیان** باشد، مساحت قطاع برابر است با $S = \frac{۱}{۲} R^۲ \alpha$ می باشد.

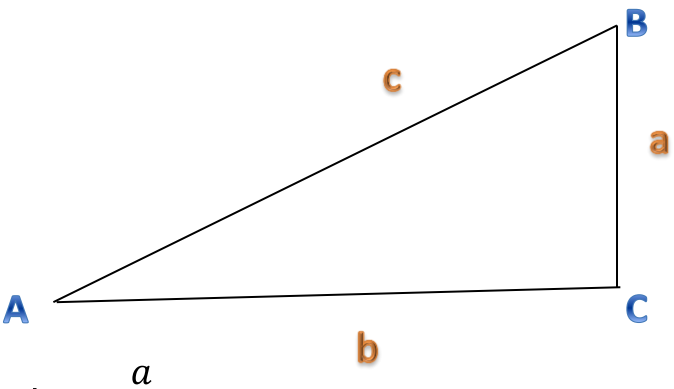


نکته: جدول زیر را به خاطر بسپارید:

زاویه (x) / نسبت مثلثاتی									
	درجه	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
	رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
Sin(x)		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ یا $\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos(x)		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ یا $\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tan(x)		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ یا $\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
Cot(x)		تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ یا $\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

نسبت های مثلثاتی

- **نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه**



$$\sin_{\hat{A}} = \frac{a}{c} \qquad \tan_{\hat{A}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos_{\hat{A}} = \frac{b}{c} \qquad \cot_{\hat{A}} = \frac{b}{a}$$

- **نسبت های مثلثاتی زاوایای متمم**

به دو زاویه ای که مجموع آن ها برابر ۹۰ درجه باشد ، زاوایای متمم می گویند.

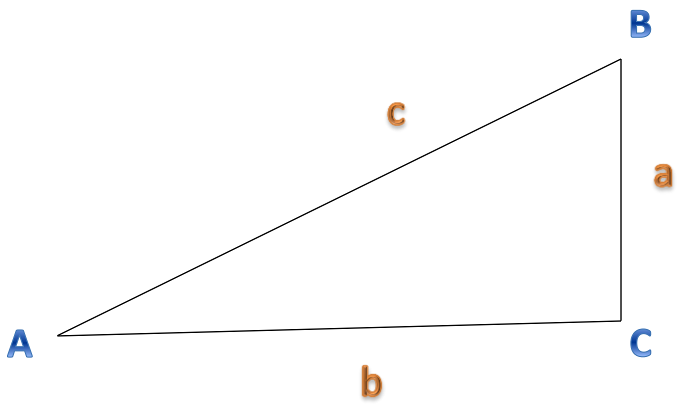
$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=tan\alpha$$

همچنین در هر مثلث قائم الزاویه ای داریم:



$$\hat{A}+\hat{B}=۹۰$$

$$\mathbf{sin}_{\hat{A}}=\boldsymbol{cos}_{\hat{B}} \qquad \mathbf{cos}_{\hat{A}}=\boldsymbol{sin}_{\hat{B}}$$

$$\mathbf{tan}_{\hat{A}}=\boldsymbol{cot}_{\hat{B}} \qquad \mathbf{cot}_{\hat{A}}=\boldsymbol{tan}_{\hat{B}}$$

- **نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم $\frac{\pi}{۲}$ رادیان اختلاف دارند.**

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-tan\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل**

به دو زاویه ای که مجموعشان برابر ۱۸۰ درجه باشد، زوایای مکمل می گویند.

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم π رادیان اختلاف دارند.**

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی دو زاویه قرینه**

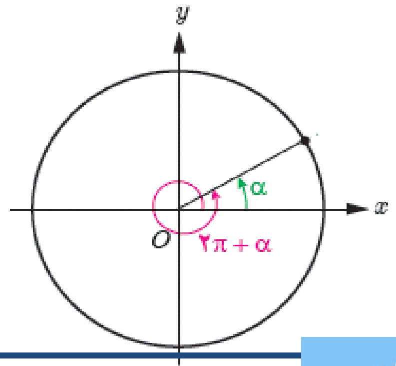
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی زوایای هم انتها**

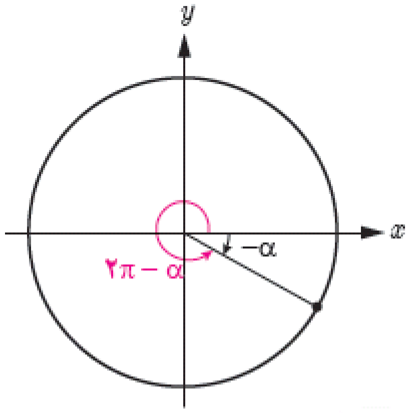
زاویه هایی مانند α و $2\pi+\alpha$ که انتهای کمان های آن ها بر هم منطبق می شود را زوایای هم انتها گویند.

$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha \qquad \sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha \qquad \tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

دقت شود که k هر عدد صحیحی می تواند باشد.



با استدلالی مشابه از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $۲k\pi - \alpha$ نیز هم انتها هستند، نسبت های مثلثاتی زوایای $-\alpha$ و $۲k\pi - \alpha$ نیز با هم برابرند.



مثال: نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را بدست آورید.

a) $\frac{-۷\pi}{۶}$ b) ۳۹۰ c) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

پاسخ)

a)

$$\sin\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \cos\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \tan\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \cot\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\cot\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\sqrt{۳}$$

b)

$$\sin(۳۹۰) = \sin\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos(۳۹۰) = \cos\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۳۹۰) = \tan\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = tan\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(۳۹۰) = \cot\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = cot\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \sqrt{۳}$$

c)

$$\sin\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{۱}{۲}$$

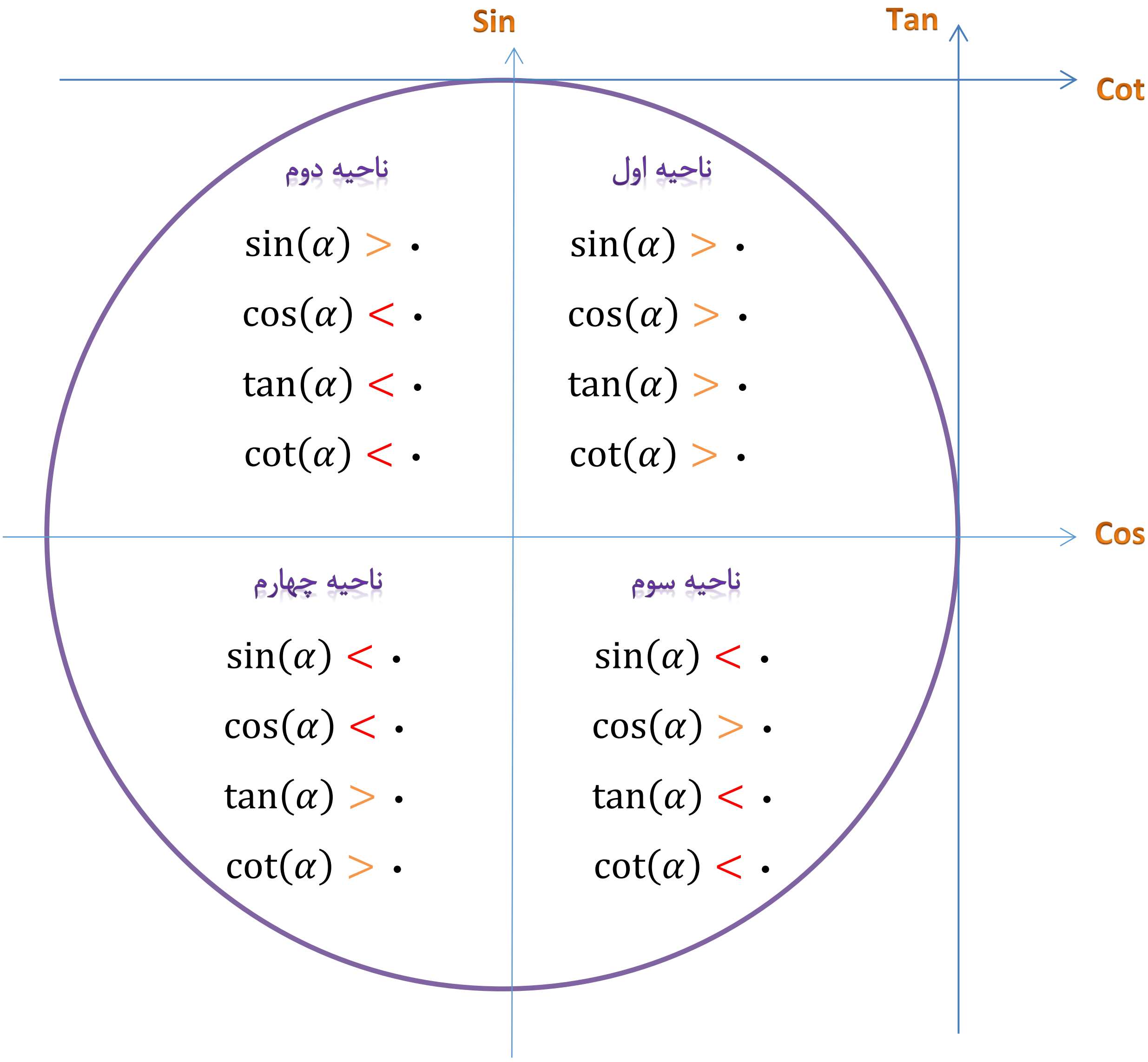
$$\cos\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\sqrt{۳}$$

نکته: هر گاه انتهای کمان زاویه ای در ناحیه ی

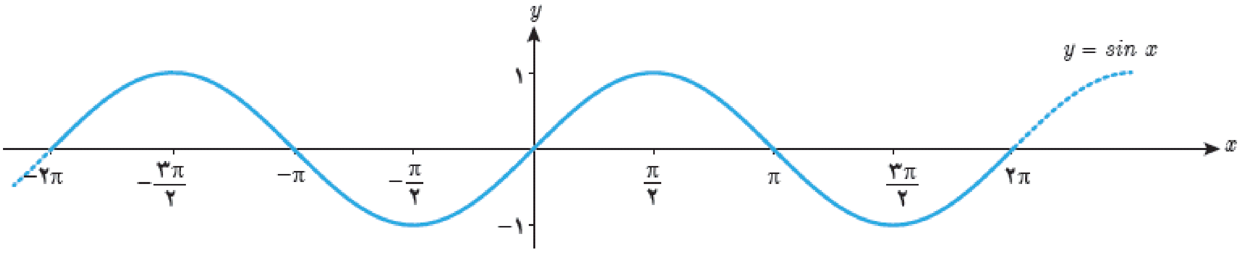
- **اول** باشد، همه ی نسبت های مثلثاتی آن زاویه **مثبت** اند.
- **دوم** باشد، فقط sin **مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** هستند.
- **سوم** باشد، sin و cos **منفی** و tan و cot **مثبت** اند.
- **چهارم** باشد، فقط cos **مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** اند.


Sin
Tan
Cot
Cos
ناحیه اول
$\sin(\alpha) > ۰$
$\cos(\alpha) > ۰$
$\tan(\alpha) > ۰$
$\cot(\alpha) > ۰$
ناحیه دوم
$\sin(\alpha) > ۰$
$\cos(\alpha) < ۰$
$\tan(\alpha) < ۰$
$\cot(\alpha) < ۰$
ناحیه سوم
$\sin(\alpha) < ۰$
$\cos(\alpha) > ۰$
$\tan(\alpha) < ۰$
$\cot(\alpha) < ۰$
ناحیه چهارم
$\sin(\alpha) < ۰$
$\cos(\alpha) < ۰$
$\tan(\alpha) > ۰$
$\cot(\alpha) > ۰$

توابع مثلثاتی

- **sin**

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع sin x همواره x را برحسب رادیان در نظر میگیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.به طور مثال منظور از sin ۴ سینوس ۴ رادیان و منظور از $\sin 4^\circ$ سینوس ۴ درجه است.

نکته۲: تابع sin x در بازه هایی به طول 2π تکرار می شود یعنی داریم:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

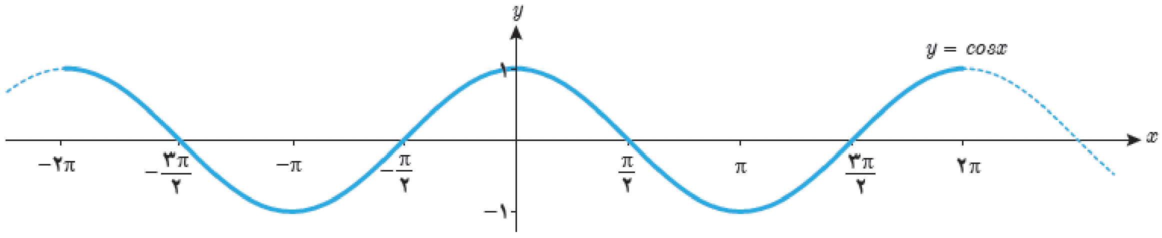
نکته۳: دامنه تابع sin کل اعداد حقیقی(R) و برد آن بازه بسته $[-1, +1]$ می باشد.

نکته۴: تابع sin محور x هارا در ضرایب صحیح π قطع می کند.

نکته۵: گاهی به نمودار تابع $y = sinx$ موج سینوسی می گویند.

- **cos**

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع cos x همواره x را برحسب رادیان در نظر می گیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.

نکته۲: تابع cos x در بازه هایی به طول ۲π تکرار می شود یعنی داریم:

$$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

نکته۳: دامنه تابع cos کل اعداد حقیقی(R) و برد آن بازه بسته $\left[-۱ \text{ و } +۱\right]$ می باشد.

نکته۴: تابع cos محور x هارا در ضرایب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$ قطع می کند.

نکته۵: گاهی به نمودار تابع $y = cosx$ موج کسینوسی می گویند.

نکاتی در مورد رسم نمودار توابع مثلثاتی به کمک انتقال:

۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(x-\theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت راست انتقال دهیم.

۲) برای رسم نمودار تابع $y = f(x+\theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

۳) برای رسم نمودار تابع $y = f(x)+a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

۴) برای رسم نمودار تابع $y = f(x)-a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا پایین دهیم.

۵) برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۶) برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

۷) برای رسم نمودار تابع $y = f(ax)$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

۸) برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{x}{a})$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را a برابر کنیم.

۹) برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

۱۰) برای رسم نمودار تابع $y = \frac{1}{k}f(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

۱۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در سمت چپ محور xها قرار دارد را حذف و سمت راست محور xها را در سمت چپ قرینه کنیم.

۱۲) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در زیر محور yها قرار دارد را حذف و قرینه آن را در بالای محور yها رسم کنیم.

اتحاد های مثلثاتی

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
- $\cot x = \frac{1}{\tan x}$
- $\tan x \times \cot x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cos\alpha \neq 0)$
- $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad (\sin\alpha \neq 0)$

به کمک روابط بالا می توانیم اتحاد های کمکی زیر را استخراج کنیم:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x \times \cos x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \times \cos x}$$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(x+y) = \sin x \times \cos y + \cos x \times \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \times \cos y - \cos x \times \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \times \cos y - \sin x \times \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \times \cos y + \sin x \times \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{۱ - \tan x \times \tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{۱ + \tan x \times \tan y}$$

چند اتحاد پر کاربرد و مهم

$$\sin(۲x) = ۲\sin x \times \cos x$$
$$\cos(۲x) = \cos^۲ x - \sin^۲ x$$

از رابطه بالا دو اتحاد مهم زیر بدست می آید که به فرمول های توان شکن معروف اند:

$$\cos^۲ x = \frac{۱ + \cos(۲x)}{۲}$$
$$\sin^۲ x = \frac{۱ - \cos(۲x)}{۲}$$

نکته تستی: با استفاده از اتحاد های مجموع و تفاضل به رابطه مهم زیر می رسیم:

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{۲}\sin(x \pm \frac{\pi}{۴})$$
$$\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴})$$

مثال : اگر $k^2-\frac{1}{2}=\sin 5^\circ \cos 5^\circ$، مقدار $\sin 50^\circ$ بر حسب k کدام می‌تواند باشد؟

۱) $|k|$
۲) $\sqrt{2}\,|k|$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}|k|$
۴) $2\sqrt{2}\,|k|$

(آزمون ۲۴ بهمن ۹۳ کانون)

پاسخ)

$$\sin 50^\circ=\sin(45^\circ+\cos 5^\circ)=\sin 45^\circ\cos 5^\circ+\cos 45^\circ\sin 5^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 5^\circ+\cos 5^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{(\sin 5^\circ+\cos 5^\circ)^2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2\sin 5^\circ+\cos 5^\circ}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1+2(k^2-\frac{1}{2})}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}\,|k|)=|k|$$

مثال ۲) اگر $f(\tan x)=\tan 3x$، آن‌گاه حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{11}$
۲) $\frac{13}{11}$
۳) $\frac{-2}{11}$
۴) $\frac{-13}{11}$

(آزمون ۲۴ بهمن ۹۳ کانون)

پاسخ)

$$\tan 3x=\tan(2x+x)=\frac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}$$

$$=\frac{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\tan x}{1-\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)\tan x}=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

$$f(\tan x)=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\Rightarrow f(2)=\frac{6-8}{1-12}=\frac{2}{11}$$

حد و پیوستگی

مفهوم حد و فرایند های حدی

همسایگی

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می نامیم.

یعنی اگر $x_0 \in (a,b)$ آنگاه بازه (a,b) یک همسایگی x_0 است.

اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b) - \{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می نامیم.

همسایگی راست x_0

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x_0, x_0 + r)$ را یک همسایگی راست x_0 می نامیم.

همسایگی چپ x_0

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می نامیم.

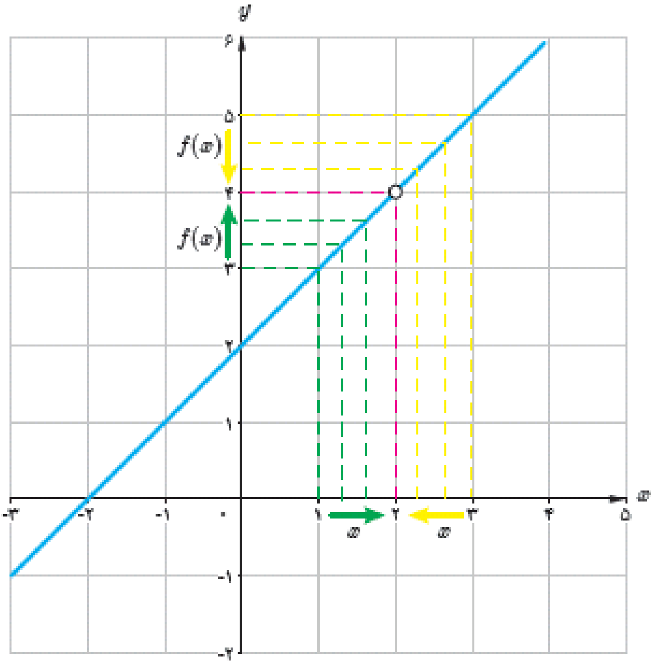
تعریف حد تابع

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد. می گوییم **حد تابع f وقتی x به a نزدیک می شود برابر عدد حقیقی L است** و می نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

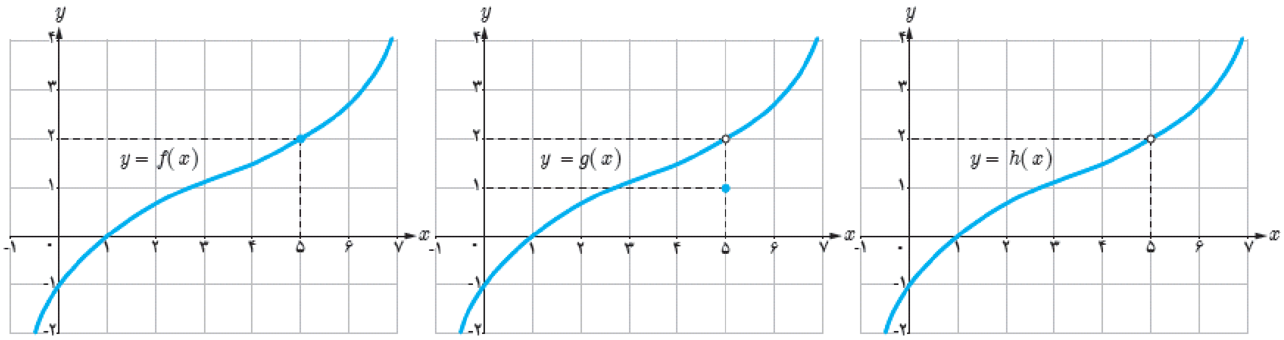
عدد L را حد تابع f در نقطه a می نامیم.

تابع f(x)=x+۲ را در نظر بگیرید که نقطه (۲،۴) از آن جدا شده باشد. همانطور که در نمودار این تابع مشاهده می کنید وقتی که x را با مقادیر بزرگ تر یا کوچک تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می کنیم. مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می شوند. در این حالت می گوییم حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می شود برابر ۴ است و می نویسیم:



$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴$$

نکته: نمودار سه تابع f،g و h را در نظر بگیرید.



بین حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در همان نقطه چند حالت وجود دارد که در زیر به سه مورد آن اشاره می کنیم:

۱. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد و حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

مانند تابع f که حدش با مقدارش در نقطه ۵ برابر است.

$$\lim_{x\to ۵} f(x) = f(۵) = ۲$$

۲. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

مانند تابع g که حدش با مقدارش در نقطه ۵ برابر نیست.

$$\lim_{x\to ۵} g(x) = ۲$$

$$g(۵) = ۱$$

۳. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف نشده باشد ولی در نقطه a حد داشته باشد.

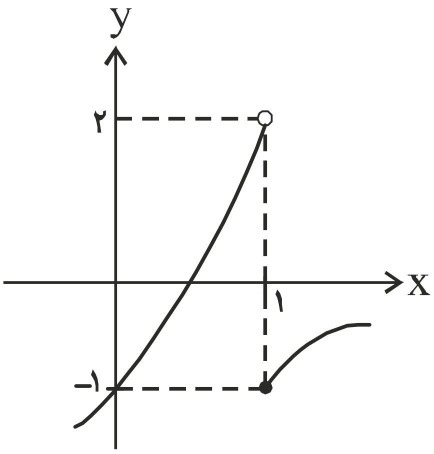
مانند تابع h که در نقطه ۵ تعریف نشده است ولی در این نقطه دارای حد می باشد.

$$\lim_{x\to ۵} h(x) = ۲$$

با توجه به نکته بالا نتیجه می گیریم که وجود یا عدم وجود مقدار تابع در نقطه دلخواه a ، تاثیری بر حد تابع در نقطه a ندارد.

حد های یک طرفه

نمودار تابعی مانند f(x) را در نظر بگیرید:

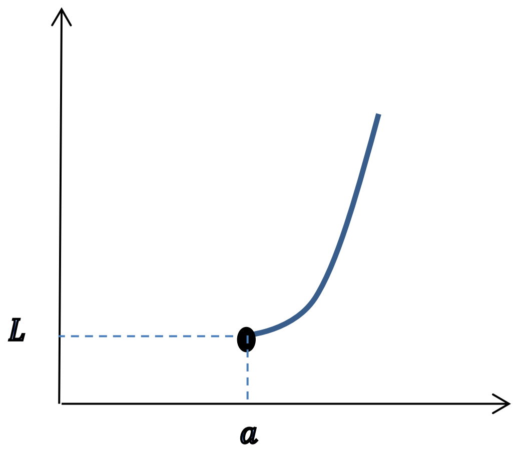


در این تابع می بینیم که اگر متغیر x را با مقادیر کوچک تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم مقادیر f(x) به عدد ۲ نزدیک می شوند و اگر متغیر x را با مغادیر بزرگ تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، مقادیر f(x) به عدد ۲- نزدیک می شوند. در این صورت می گوییم حد تابع f در نقطه ۱ وجود ندارد ولی تابع در این نقطه دارای حدود چپ و راست می باشد.

حد راست

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد راست تابع f در نقطه $x = a$ برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a نزدیک شود.

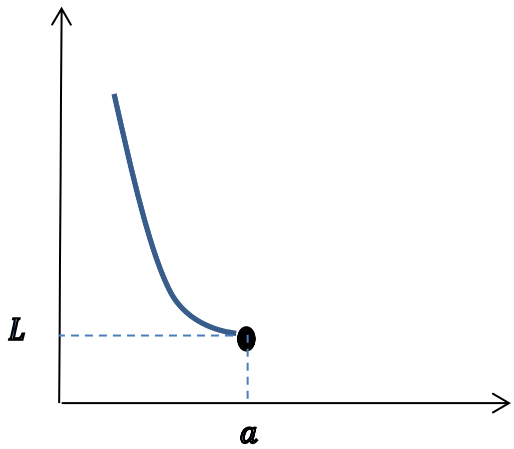
در این صورت می نویسیم: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$



حد چپ

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد چپ تابع f در نقطه x=a برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

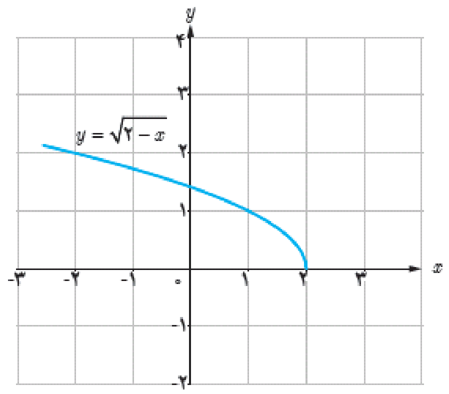


نکته: حد تابع f در نقطه $x = a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.

با توجه به نکته بالا می توان گفت که حد تابع f در نقطه $x = a$ موجود نیست اگر:

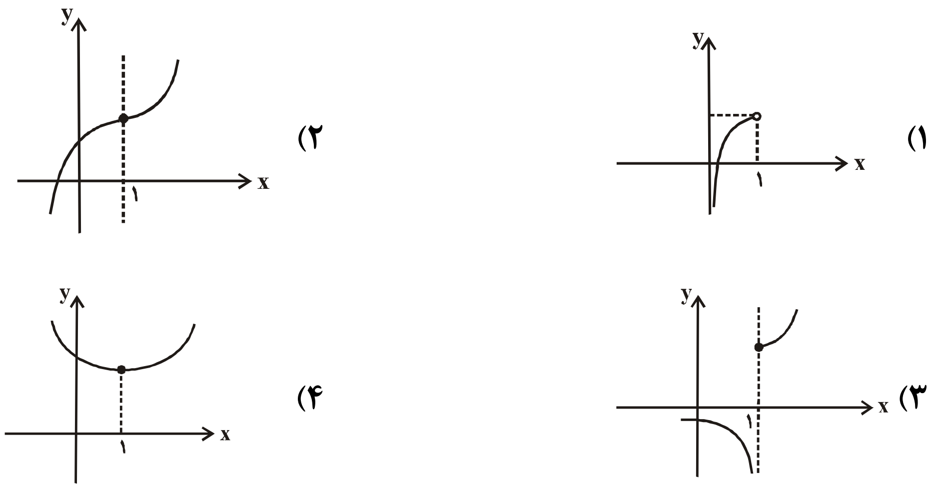
1. **حد چپ و راست در نقطه a موجود ولی دو مقدار متفاوت داشته باشند.**
2. **یکی از حد های چپ یا راست وجود نداشته باشد(تابع در همسایگی چپ یا راست تعریف نشده باشد.**

به طور مثال تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ در نقطه $x = ۲$ حد ندارد چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.



مثال ۱:

کدام‌یک از نمودارهای زیر نشان دهنده‌ی تابعی است که در نقطه‌ی $x=۱$ حد راست دارد ولی حد چپ ندارد؟



پاسخ)

در گزینه‌های «۲» و «۴» تابع موردنظر در $x=۱$ دارای حد راست و چپ می‌باشد. در گزینه‌ی «۱» تابع حد چپ دارد و حد راست ندارد و در گزینه‌ی «۳» تابع حد راست دارد ولی حد چپ ندارد.

مثال ۲: حد چپ تابع $y=\left[\frac{۱}{x}\right]$ در نقطه‌ی $x=\frac{-۱}{۱۰}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۱ **۲) ۹-**

۳) ۱۰- **۴) ۱۱-**

پاسخ)

گزینه‌ی «۳»

وقتی $x \to \left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-$، یعنی $x<\frac{-۱}{۱۰}$ پس $\frac{۱}{x}>-۱۰$، لذا:

$$\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱۰$$

نکته مهم: حد تابع $f(x)=[x]$ در نقطه a در دو حالت زیر بررسی می شود،

1. **اگر a عددی صحیح باشد، f در a حد ندارد چون:**

$$\lim_{x\to a^-}[x]=a-۱ \quad , \quad \lim_{x\to a^+}[x]=a$$

همانطور که می بینید حدود چپ و راست موجود ولی نا برابر هستند پس تابع جز صحیح در هر نقطه صحیح، حد ندارد.

2. **اگر a عددی غیر صحیح باشد، f در a حد دارد و حد آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است:**

$$\lim_{x\to a}[x]=[a]$$

نکته: **اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آن ها در a وجود داشته باشد آنگاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند یعنی:**

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ **آنگاه:**

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به جز احتمالا خود a) با هم برابر باشند، مقدار حد آن ها نیز در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

به طور مثال مقدار حد راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{x}$ **در نقطه x=۰ برابر صفر است چون در این ناحیه تابع f با تابع g(x)=۰ برابر است.**

قضایای حد

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x) = c$ **در هر نقطه دلخواه برابر مقدار ثابت c است. یعنی:**

$$\lim_{x\to a} c = c$$

قضیه ۲: هر چند جمله ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ **در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله ای در نقطه a برابر است یعنی:**

$$\lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0$$

قضیه ۳: اگر دو تابع g و f در نقطه $x = a$ **حد داشته باشند** و $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L_1 . L_2$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \qquad L_2 \neq 0$$

قضیه ۴: فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد$(f(x) > 0)$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد،آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

قضیه ۵: اگر تابع f در نقطه a حد داشته باشد و حد آن نیز برابر L باشد داریم:

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| = |L|$$

مثال ۱: اگر f و g در اطراف $x=a$ تعریف شده و هر دو در این نقطه دارای حد باشند و $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=۱$ و $\lim_{x\to a}(f\times g)(x)=-۶$، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to a}(f^۲+g^۲)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

پاسخ)

گزینه‌ی «۲»

اگر فرض کنیم $\lim_{x\to a}f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to a}g(x)=L_۲$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=L_۱+L_۲=۱\\&\lim_{x\to a}(f.g)(x)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)=L_۱L_۲=-۶\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}L_۱=۳,L_۲=-۲\\ \text{یا}\\ L_۲=۳,L_۱=-۲\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a}(f^۲+g^۲)(x)=\lim_{x\to a}f^۲(x)+\lim_{x\to a}g^۲(x)=۹+۴=۱۳$$

مثال ۲: اگر $f(x)=\begin{cases}۳x^۲+x-۲ & x>۰\\ ۵x+۱ & x<۰\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۴

پاسخ)

گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲})=\lim_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱-x^۲}{۲x})=f(\frac{۰^+}{-۲})=f(۰^-)=۵(۰)+۱=۱$$

حد توابع مثلثاتی

برای هر عدد حقیقی a داریم:

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a$$

$$\lim_{x\to a}\cos x = \cos a$$

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

برای محاسبه حد توابع گویا در نقطه $x = a\ (a\epsilon R)$ در حالتی که حد صورت و مخرج در نقطه x=a برابر صفر باشد، نمی توانیم از قضایای حد و جانشینی نقطه در تابع استفاده کنیم زیرا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بر می خوریم. در این گونه موارد باید ابتدا صورت و مخرج را به عامل های مناسب تجزیه کنیم و بعد از ساده سازی کسر، به محاسبه حد با استفاده از قضایای حد، بپردازیم.

مثال ۱: حاصل $\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)^2}{x-\sqrt{3x-2}}$ کدام است؟

۱) صفر　　　　۲) ۴

۳) -4　　　　۴) ۸

پاسخ)

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)^2}{x-\sqrt{3x-2}} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)^2(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)^2(x+\sqrt{3x-2})}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)^2(2+2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{4(x-2)}{x-1} = 0$$

مثال ۲: حد کسر $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+x^2-1}{\sqrt[3]{x^2-1}+x^3-1}$ وقتی $x\to 1$ برابر با کدام است؟ (آزاد ریاضی صبح- ۸۲)

۱) ۱   ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

۳) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ۴) وجود ندارد.

پاسخ)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}+x^2-1}{\sqrt[3]{x^2-1}+x^3-1}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، عامل صفرشونده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم برای این منظور با استفاده از اتحادها داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}+(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{x^2-1}+(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\sqrt[3]{x-1}}(1+\sqrt[3]{(x-1)^2}(x+1))}{\cancel{\sqrt[3]{x-1}}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}(x^2+x+1))}$$

$$=\frac{1+0}{\sqrt[3]{2}+0}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

مثال ۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x\sin 8x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۴

۳) ۱   ۴) -4

پاسخ)

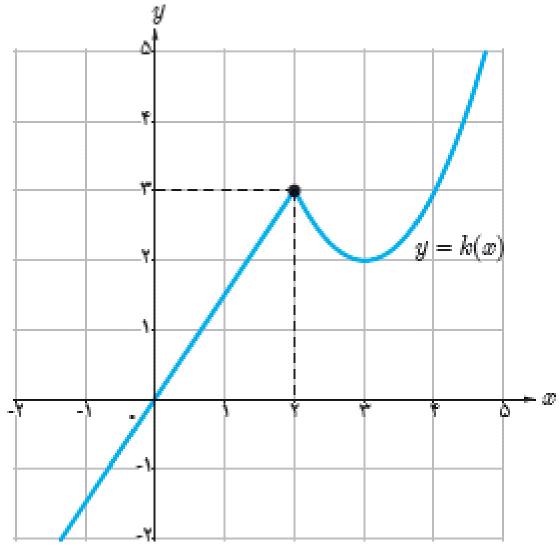
$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{2x\sin 4x\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{2x\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos 4x}=-1$$

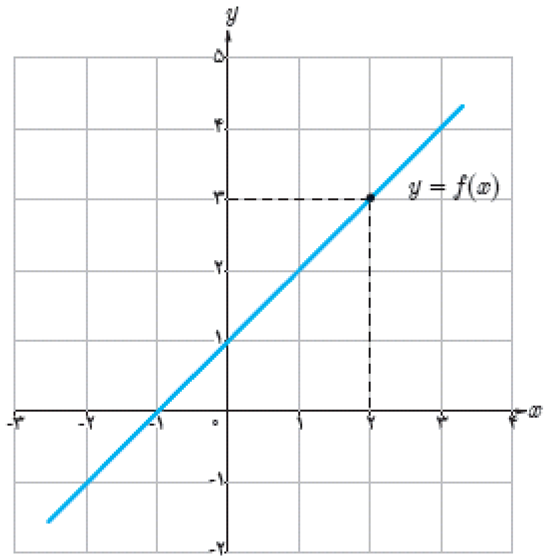
پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه x=a پیوسته است هرگاه

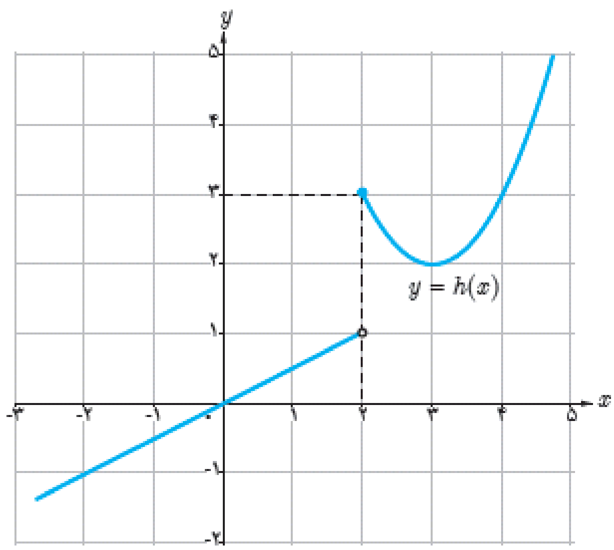
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

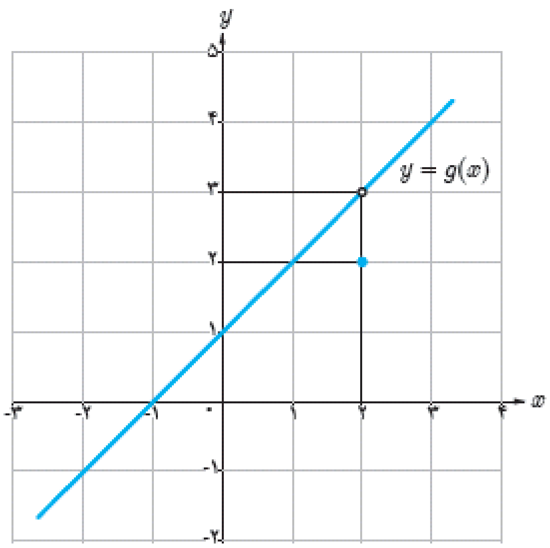
به توابع زیر دقت کنید:





همان طور که مشاهده می کنید در نمودار دو تابع بالا در نقطه x=۲ هیچ گسستگی وجود ندارد، یعنی حد توابع با مقدار آن ها در نقطه x=۲ با هم برابر می باشند. در این حالت اصطلاحا می گوییم، تابع در $x = ۲$ پیوسته است. اما دو تا بع زیر را در نظر بگیرید:





همان طور که میبینید در دو تابع بالا در نقطه x=۲ گسستگی وجود دارد یعنی حد تابع با مقدار تابع در نقطه x=۲ برابر نمی باشد، در این حالت می گوییم: تابع f در نقطه x=۲ ناپیوسته است.

بنابراین برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a باید شرایط زیر همزمان برقرار باشند:

۱- تابع f در a تعریف شده باشد،

۲- حد تابع f در a موجود باشد(حد چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.)

۳- مقدار حد تابع f در a با مقدار f(a) برابر باشد.

نکته: همه ی توابع چند جمله ای ، توابع sinx و cosx و $\sqrt[n]{x}$ به شرط آن که n عددی فرد باشد، a^x ، $|x|$در هر نقطه ای پیوسته می باشند.

پیوسته از راست

گوییم تابع f از راست پیوسته است(یا پیوستگی راست دارد) هرگاه:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

پیوسته از چپ

گوییم تابع f از چپ پیوسته است(یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

نکته: دقت کنید وقتی می گوییم تابع f در نقطه a پیوسته است، یعنی هم از راست پیوسته است و هم از چپ.

نکته: در مورد پیوستگی تابع $f(x) = [ax]$ در نقطه $x_٠$ می توان گفت:

۱- اگر $ax_٠ \in Z$ ، تابع f در $x_٠$ ناپیوسته است. در این حالت اگر $a > ٠$ باشد تابع f در $x_٠$ پیوستگی راست دارد و اگر $a < ٠$ تابع f در $x_٠$ پیوستگی چپ دارد.

۲- اگر $ax_٠ \notin Z$،تابع f در $x_٠$ پیوسته است.

مثال۱: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a[-x]+x^{۲} & , \quad x>۲ \\ ۵ & , \quad x=۲ \\ \dfrac{|۴-x^{۲}|}{bx-۲b} & , \quad x<۲ \end{cases}$ در نقطه‌ی ۲ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{-۱۷}{۱۵}$

۳) $\frac{۱۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۰}$

پاسخ)

تابع f در ۲ پیوسته است، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$$

$$f(۲)=۵ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۲^+}(a[-x]+x^{۲})=a[-(۲^+)]+۴=-۳a+۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{|۴-x^{۲}|}{bx-۲b}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|۲-x||۲+x|}{b(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(۲-x)(۲+x)}{-b(۲-x)}=-\frac{۴}{b}$$

$$\Rightarrow -\frac{۴}{b}=۵\Rightarrow b=-\frac{۴}{۵} \quad \text{و} \quad -۳a+۴=۵\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

$$a+b=(-\frac{۱}{۳})+(\frac{-۴}{۵})=\frac{-۱۷}{۱۵}$$

مثال۲: اگر تابع $f(x)=\dfrac{|x|-\sin x+۵}{\sqrt{۳x^{۲}+۶x+m}}$ در R پیوسته باشد، آن‌گاه m چند مقدار طبیعی نمی‌تواند اختیار کند؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ)

اگر در نظر بگیریم $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ ، $g(x)\ |x|\sin x+۵$ می‌باشد که به‌صورت مجموع چند تابع پیوسته است پس g پیوسته خواهد بود از طرفی $h(x)=\sqrt{۳x^۲+۶x+m}$ است که می‌بایست در R پیوسته باشد بنابراین باید عبارت زیر رادیکال همواره مثبت باشد.

$$۳x^۲+۶x+m>۰\Rightarrow\begin{cases}\Delta<۰\Rightarrow ۳۶-۱۲m<۰\Rightarrow m>۳\\ a=۳\end{cases}$$

بنابراین **m** نمی‌تواند اعداد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ را بپذیرد.

مثال ۳: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۹ax+۳b}{x^۳-۲۷} & ;\ [x]\le ۲\\ \frac{۳}{x} & ;\ [x]>۲\end{cases}$ **روی R پیوسته باشد، حاصل a−b کدام است؟**

([ ] ، نماد جزءصحیح است.)

۱) ۳۰ **۲) ۲۴**

۳) ۲۷ **۴) −۲۴**

پاسخ)

ابتدا تابع را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۹ax+۳b}{x^۳-۲۷} & x<۳\\ \frac{۳}{x} & x\ge ۳\end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در $x=۳$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۳}{x}=\frac{۳}{۳}=۱ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۳^-}=\lim\frac{۹ax+۳b}{x^۳-۲۷}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۹a(x+\frac{b}{۳a})}{(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}$$

برای این‌که حاصل حد چپ برابر ۱ شود چون به‌ازای $x=۳$ مخرج صفر می‌شود حتماً باید صورت هم صفر شود.

$$۳+\frac{b}{۳a}=۰\Rightarrow b=-۹a\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-}\frac{۹a(x-۳)}{(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}$$

$$=\frac{۹a}{۲۷}=\frac{a}{۳}\Rightarrow\frac{a}{۳}=۱$$

$$\Rightarrow a=۳\Rightarrow b=-۲۷\Rightarrow a-b=۳۰$$

پیوستگی روی بازه

- تابع f را در بازه (a,b) پیوسته گوییم هرگاه **در هر نقطه** (a,b) پیوسته باشد.
- تابع f را در بازه $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته ودر b از چپ پیوسته باشد.
- تابع f را در بازه $(a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد ودر b از چپ پیوسته باشد.
- تابع f را در بازه $[a,b)$پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته باشد.

نکته: توابع $log_a x$ و $\sqrt[n]{x}$ (n عددی زوج است) روی هر نقطه از دامنه شان پیوسته می باشند.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}۲x^۳+x+۱ & x\notin Z\\ ۳x^۲+۱ & x\in Z\end{cases}$ در چند نقطه به طول صحیح پیوسته است؟

۱) صفر　　　　۲) ۱

۳) ۲　　　　۴) ۳

پاسخ)

فرض کنیم $k\in Z$، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to k} f(x)=\lim\limits_{x\to k}(۲x^۳+x+۱)=۲k^۳+k+۱\\ f(k)=۳k^۲+۱\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۲k^۳+k+۱=۳k^۲+۱\Rightarrow ۲k^۳-۳k^۲+k=۰$$

$$\Rightarrow k(k-۱)(۲k-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۰\in Z & \text{قابل قبول}\\ k=۱\in Z & \text{قابل قبول}\\ k=\frac{۱}{۲}\notin Z & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

پس تابع داده شده در دو نقطه به طول صحیح، پیوسته است.