

توابع نمایی:  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$  و  $a \neq 1$ )

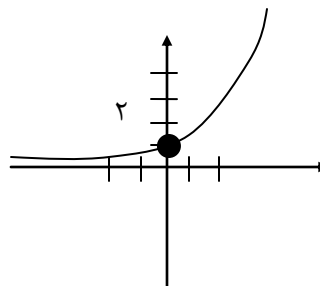
x	y
0	1
1	2
2	4
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

حالت اول ( $a > 1$ ) مثال:  $f(x) = 2^x$

تابع در این حالت اکیدا صعودی و یک به یک است.

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad R_f = (0, \infty)$$

خط  $y = 0$  مجانب افقی منحنی است.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

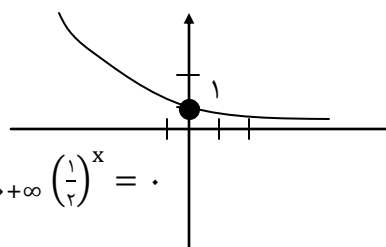
حالت دوم ( $0 < a < 1$ ) مثال:  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  یا  $f(x) = 2^{-x}$

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4

تابع در این حالت اکیدا نزولی و یک به یک است.

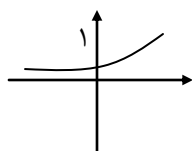
$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad R_f = (0, +\infty)$$

خط  $y = 0$  مجانب افقی منحنی است.

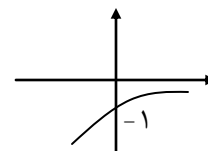


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

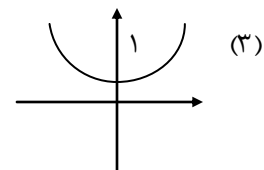
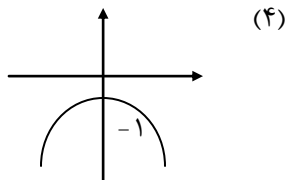
تست: نمودار تابع  $f(x) = e^{|x|}$  کدام است؟



(2)



(1)



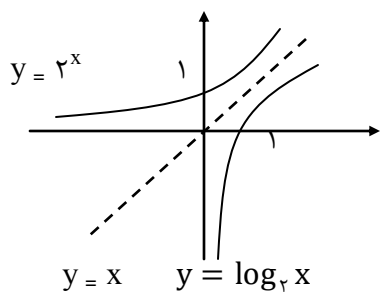
تابع لگاریتمی :

میدانیم که  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) اکیدا یکنوا و در نتیجه یک به یک است ، بنابراین معکوس پذیر است ، معکوس تابع نمایی که از قرینه کردن نمودار آن نسبت به خط  $y = x$  بدست می آید تابع لگاریتمی نامیده می شود .

$$f^{-1}(x) = \log_a x \quad (x > 0) \quad (\text{لگاریتم } x \text{ در مبنای } a)$$

حالت اول :  $y = \log_a x$  ( $a > 1$ )      مثال :  $y = \log_2 x$

← توابع  $y = 2^x$  و  $y = \log_2 x$  هر دو صعودی اکیدا هستند .



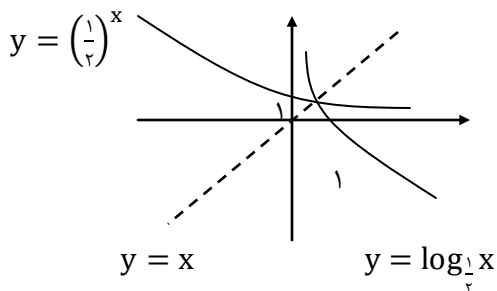
دامنه و برد  
 $\xrightarrow{y = \log_2 x}$ 
 $\begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ R_f = (-\infty, +\infty) \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{If } x > 1 \longrightarrow \log_a x > 0 \\ \text{If } x < 1 \longrightarrow \log_a x < 0 \\ \text{If } x = 1 \longrightarrow \log_a x = 0 \end{cases} \quad \{\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$x = 0$  مجانب قائم تابع  $y = \log_2 x$  است .

حالت دوم :  $y = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ )      مثال :  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

← توابع  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  و  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  هر دو نزولی اکید هستند.



دامنه و برد  $\rightarrow \begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ R_f = (-\infty, +\infty) \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{If } x > 1 & \rightarrow \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x < 0 \\ \text{If } x < 1 & \rightarrow \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x > 0 \\ \text{If } x = 1 & \rightarrow \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x = 0 \end{cases} \quad \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x = +\infty \right.$$

خط  $x = 0$  مجانب قائم منحنی  $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$  است.

تست : فاصله نقطه برخورد تابع نمایی  $y = 2^x$  با محور  $y$  ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور  $x$  ها کدام است ؟

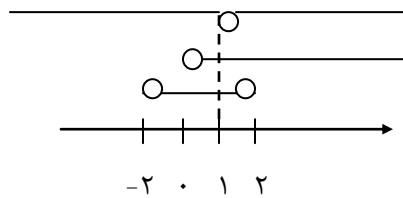
- (۱) ۱      (۲)  $\sqrt{2}$       (۳) ۲      (۴)  $2\sqrt{2}$

تعیین دامنه‌ی توابع لگاریتمی :

در تابع  $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$  برای تعیین دامنه اشتراک سه شرط  $\begin{cases} g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$  را بدست می‌آوریم .

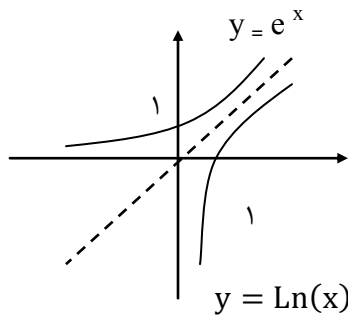
مثال : دامنه‌ی تابع  $f(x) = \log_x(4 - x^2)$  را بدست آورید .

$$\left. \begin{array}{l} 4 - x^2 > 0 \rightarrow 4 > x^2 \rightarrow -2 < x < 2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(اشتراک)}} D_f = (0, 1) \cup (1, 2) \quad \text{حل :}$$



تابع لگاریتم طبیعی - تابع نمایی طبیعی :

تابع لگاریتم در پایه e را تابع لگاریتم طبیعی می نامیم ، این تابع معکوس تابع نمایی طبیعی (  $y = e^x$  ) است .



لگاریتم طبیعی x ( لگاریتم نپری x ) را بصورت  $L_n(x)$  می نویسیم .

$y = \ln(x)$  یا  $\log_e x$

لگاریتم اعشاری ( دهگانی ) :

لگاریتمی که مبتای آن عدد ۱۰ میباشد لگاریتم اعشاری یا دهگانی نامیده می شود ، در لگاریتم اعشاری از نوشتن مبتای لگاریتم خودداری می شود و مثلا بجای آنکه بنویسیم  $\log_{10} 7$  می نویسیم  $\log 7$  .

تعریف لگاریتم : بطور کلی اگر  $a > 0$  و  $a \neq 1$  باشد و داشته باشیم  $a^n = b$  در اینصورت عدد n را لگاریتم عدد b در مبنای a می نامیم و چنین می نویسیم .

$$a^n = b \iff n = \log_a b$$

مثال : تساوی های زیر را بصورت لگاریتم بنویسید .

$$5^4 = 625 \longrightarrow \log_5 625 = 4$$

$$10^{-3} = 0.001 \longrightarrow \log_{10} 0.001 = -3$$

$$3^4 = 81 \longrightarrow \log_3 81 = 4$$

مثال : لگاریتم‌های زیر را بصورت اعداد توانی بنویسید.

$$\log_2 32 = 5 \longrightarrow 2^5 = 32$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \longrightarrow 10^3 = 1000$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \longrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$$

نکته : در تعریف لگاریتم همیشه فرض بر آن است که پایه ( مبنای ) لگاریتم عدد مثبت و مخالف ۱ می باشد .

$$(a \neq 1 \text{ و } a > 0)$$

نکته : لگاریتم عدد ۱ در هر مبنایی برابر صفر است .

$$\log_a 1 = 0 \text{ زیرا } a^0 = 1 \text{ می باشد}$$

نکته : لگاریتم هر عدد در مبنای همان عدد برابر ۱ است .

$$\log_a a = 1 \text{ زیرا } a^1 = a \text{ می باشد}$$

نکته : اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند ( لگاریتم آن‌ها تعریف نشده است )

مثلا  $\log_a -3$  و  $\log_a -7/5$  تعریف نشده و بی معنی هستند .

$$\text{نکته : } (0 < a < 1) \log_a \cdot^+ = +\infty \text{ و } (a > 1) \log_a \cdot^+ = -\infty$$

خواص لگاریتم :

(۱) اگر A و B اعدادی مثبت و a عددی مثبت و مخالف یک باشد آنگاه :

$$\log_a A \cdot B = \log_a A + \log_a B$$

اثبات: اگر  $\log_a A = x$  و  $\log_a B = y$  آنگاه  $a^x = A$  و  $a^y = B$

سمت چپ تساوی  $\log_a A \cdot B = \log_a a^{(x+y)} = x + y = \log_a A + \log_a B$

نکته: لگاریتم حاصلضرب چند عدد برابر مجموع لگاریتم‌های آن اعداد است:

$$\log_a A \cdot B \cdot C \dots = \log_a A + \log_a B + \log_a C + \dots$$

مثال: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  حاصل لگاریتم  $\log 18000$  را بر حسب  $a$  و  $b$  بدست آورید.

حل:  $\log 18000 = \log 2 \times 3 \times 3 \times 1000 = \log 2 + \log 3 + \log 3 + \log 1000$

$$\longrightarrow = a + b + b + 3 = \boxed{a + 2b + 3}$$

(۲) اگر  $A, B > 0$  و  $a > 0$  و  $a \neq 1$  آنگاه:

$$\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

مثال: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  و  $\log 7 = c$  باشد، حاصل  $\log \left(\frac{14}{900}\right)$  را بدست آورید.

حل:  $\log(14) - \log(900) = \log(2 \times 7) - \log(3 \times 3 \times 100)$

$$= \log 2 + \log 7 - \log 3 - \log 3 - \log 100 = a + c - 2b - 2$$

(۳) اگر  $x > 0$  و  $a > 0$  و  $a \neq 1$  آنگاه:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

مثال: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  و  $\log 7 = c$  باشد، حاصل  $\log\left(\frac{270}{32}\right)$  را بدست آورید.

$$= \log 270 - \log 32 = \log 3^3 \times 10 - \log 2^5 \quad \text{حل:}$$

$$\longrightarrow = \log 3^3 + \log 10 - \log 2^5 = 3 \log 3 + \log 10 - 5 \log 2$$

$$\longrightarrow 3b + 1 - 5a = 3b - 5a + 1$$

(۴) لگاریتم ریشه  $n$  ام توان  $m$  ام یک عدد برابر است با  $\frac{m}{n}$  لگاریتم آن عدد.

$$\log_a \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \log_a A$$

مثال: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  حاصل  $\log\left(\sqrt[4]{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[5]{81}\right)$  را بدست آورید.

$$\log 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\sqrt{3}} + \log \sqrt[5]{3^4} = \log \sqrt[20]{2^5 \sqrt{3}} + \frac{4}{5} \log 3 \quad \text{حل:}$$

$$= \log \sqrt[20]{2^{11}} + \frac{4}{5} \log 3 = \log \sqrt[20]{2^{11}} + \frac{4}{5} \log 3 =$$

$$= \frac{11}{20} \log 2 + \frac{4}{5} \log 3 = \frac{11}{20} a + \frac{4}{5} b$$

$$\log_B A^m = \frac{m}{n} \log_B A \quad (5)$$

مثال: اگر  $\log_3 2 = a$  آنگاه حاصل  $\log_{27} 64$  را بدست آورید.

$$\log_{3^2} 2^6 = \frac{6}{2} \log_3 2 = 2 \log_3 2 = 2a \quad \text{حل :}$$

$$\log_B A \times \log_C B = \log_C A \xrightarrow{\text{نتیجه}} \log_B A \times \log_A B = \log_A A = 1 \quad (6)$$

$$\log_B A = \frac{1}{\log_A B} \quad \text{نتیجه :}$$

مثال : حاصل  $\log_{625} 5$  را بدست آورید :

$$\log_{625} 5 = \frac{1}{\log_5 625} = \frac{1}{4} \quad \text{حل :}$$

$$\log_B A = \frac{\log_a A}{\log_a B} \quad (7) \text{ قضیه تغییر مبنا :}$$

$$\log_3 17 = \frac{\log_5 17}{\log_5 3} \quad \text{مثال : (تبدیل مبنا از 3 به 5)}$$

مثال : اگر  $\log 2 = a$  باشد مقدار  $\log_8 625$  را بر حسب  $a$  بدست آورید .

$$\log_8 625 = \frac{\log_{10} 625}{\log_{10} 8} = \frac{\log 5^4}{\log 2^3} = \frac{4 \log 5}{3 \log 2} \quad \text{حل :}$$

$$= \frac{4 \log\left(\frac{10}{2}\right)}{3 \log 2} = \frac{4(\log 10 - \log 2)}{3 \log 2} = \frac{4(1-a)}{3a}$$

(8) اگر  $x > 0$  و  $a > 0$  و  $a \neq 1$  آنگاه :

$$a^{\log_a x} = x$$

$$5^{\log_5 3} = 3 \quad \text{مثال :}$$



مثال : حاصل  $\frac{\log(\log a)}{\log a}$  را بدست آورید .

حل :  $(a)^{\log_a(\log a)} = \log a$  عبارت =

$$\log_a \frac{1}{A} = -\log_a A \quad (9)$$

مثال :  $\log_7 \frac{1}{81} = -\log_7 81 = -4$

$$\log_{a^m} A = \frac{1}{m} \log_a A \quad (10)$$

مثال :  $\log_{256} 2 = \log_{2^8} 2 = \frac{1}{8} \log_2 2 = \frac{1}{8}$

(۱۱) (نتایجی از قضیه تغییر مبنا)

$$(1) \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\log_d a}{\log_d b}$$

$$(2) \log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$(3) \log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

(۱۲) اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  مثبت و  $c \neq 1$  باشد آنگاه :

اثبات : با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتم اگر نشان دهیم لگاریتم این دو عبارت مساویند خودشان نیز مساوی می شوند .

$$(1) \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \times \log_c a$$

$$(2) \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \times \log_c b$$

$$\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = 0$$

(۱۳) اگر  $a > 0$  و  $b > 0$  و  $a \neq 1$  آنگاه :

$$\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = \cdot$$

(۱۴) اگر  $a > 0$  و  $b > 0$  و  $a \neq 1$  آنگاه :

$$\frac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n} = \log_{ab} n \quad (15)$$

$$e^{\text{Ln}x} = x \quad \text{و} \quad \text{Ln} e^x = x \quad (16)$$

تست: حاصل  $\log_5(\sqrt{125})^3$  کدام است؟

- (۱) ۴      (۲) ۴/۵      (۳) ۵      (۴) ۵/۵

تست: اگر  $\log_r \sqrt[5]{e^r} = A$  ، حاصل  $\log_{\sqrt{e}} 32$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{A}{4}$       (۲)  $\frac{A}{2}$       (۳)  $\frac{2}{A}$       (۴)  $\frac{4}{A}$

$$\log_{\frac{1}{a}N} = \log_a N \quad (17)$$

$$\log_a N = \log_{a^r} N^r = \log_{a^r} N^r = \dots = \log_{\sqrt[r]{a}} \sqrt[r]{N} = \log_{\sqrt[r]{a}} \sqrt[r]{n} = \dots \quad (18)$$

$$\log_{MN} a = \frac{1}{\log_a MN} = \frac{1}{\log_a M + \log_a N} \quad (19)$$

$$\log_a(\log_b(\log_c x)) = m \implies x = c^{b^{a^m}} \quad (20)$$

تست: حاصل  $A = \frac{1}{\log_9 6} + \frac{1}{\log_6 9}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

حل: (۲)  $A = \log_9 9 + \log_9 4 = \log_9 36 = 2$

تست: حاصل  $10 \cdot \log \sqrt[4]{6} - \log 2$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{6}$       (۲)  $2\sqrt{6}$       (۳)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$       (۴)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

حل: (۳) عبارت  $= 10 \cdot \log \sqrt[4]{6} - \log 2 = 10 \cdot \log\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

تست: حاصل عبارت  $\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 100!}$  کدام است؟

- (۱) ۵۰      (۲) ۱۰۰      (۳) ۲      (۴) ۱

حل: (۴) عبارت  $= \log_{100!} 2 + \log_{100!} 3 + \log_{100!} 4 + \dots + \log_{100!} 100$

$= \log_{100!} 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100 = \log_{100!} 100! = 1$

تست: اگر  $\log_4 27 = a$  آنگاه حاصل  $\log_{64} 81 \times \log_3 18$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{9a+6}{8}$       (۲)  $\frac{8a+6}{9}$       (۳)  $\frac{8a-6}{9}$       (۴)  $\frac{9a-6}{8}$

حل: (۲)  $\log_4 27 = a \implies \log_{2^2} 3^3 = a \implies \frac{3}{2} \log_2 3 = a$

$\implies \log_2 3 = \frac{2}{3}a$  و  $\log_3 2 = \frac{2}{3a}$

$$\log_{\sqrt{6}} 81 \times \log_3 18 = \log_{\sqrt{6}} 3^4 \times \log_3 3^2 \times 2 = \frac{4}{6} \log_3 3 \times (2 \log_3 3 + \log_3 2)$$

$$\implies = \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} a \right) \left[ 2 + \frac{2}{3a} \right] = \frac{4a}{9} \times \frac{4a+2}{3a} = \frac{4a+6}{9}$$

**معادلات لگاریتمی:** با توجه به اینکه لگاریتم تابعی یکنوا و در نتیجه یک به یک است، می‌توان گفت اگر  $\log_a x = \log_a y$

آنگاه  $x = y$ ، ( $x$  و  $y$  مثبت و  $a$  عددی مثبت و مخالف یک است). از این ویژگی برای حل معادلات لگاریتمی استفاده می‌شود.

**نکته:** پس از بدست آوردن جوابها باید آنها را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم تا اگر  $\log$  (منفی) حاصل شد آن جواب را قبول نکنیم.

**مثال:** اگر  $\log(x+1) + \log(x-1) = 1$  باشد حاصل  $x$  را بدست آورید.

**مثال:**  $\log(x+3) + \log(x-3) = 3 \log 2 + \log x$

**تست:** اگر  $\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1$  باشد، لگاریتم عدد  $x$  در پایه ۸ کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$       (۲)  $-\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{1}{3}$       (۴)  $\frac{2}{3}$

$$\log_1 \left( \frac{2x+2}{x} \right) = \log_1 10 \implies \frac{2x+2}{x} = 10 \implies 2x+2 = 10x \quad \text{حل: (1)}$$

$$\implies x^{10} = \frac{1}{4} \implies \log_8 \left( \frac{1}{4} \right) = \log_{2^3} 2^{-2} = -\frac{2}{3} \log_2 2 = -\frac{2}{3}$$

تست: حاصلضرب جوابهای معادله  $(\sqrt{x})^{(\log_5 x - 1)} = 5$  کدام است؟

$$\frac{1}{25} \quad (4) \quad 25 \quad (3) \quad \frac{1}{5} \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$

حل: (1) از طرفین معادله در مبنای 5 لگاریتم می‌گیریم.

$$\log_5 (\sqrt{x})^{(\log_5 x - 1)} = \log_5 5 \implies (\log_5 x - 1) \log_5 \sqrt{x} = 1$$

$$\implies \frac{1}{2} (\log_5 x - 1) \log_5 x = 1 \implies (\log_5 x)^2 - (\log_5 x) - 2 = 0$$

$$\implies \log_5 x = 2 \text{ یا } \log_5 x = -1 \implies x = 25 \text{ یا } x = \frac{1}{5} \quad (\text{هر دو جواب قابل قبول هستند})$$

تست: جواب دستگاه: 
$$\begin{cases} 2 \ln x + 3 \ln y = \ln \left( \frac{e^{12} \sqrt{e^7}}{\sqrt{e}} \right) \\ \ln(xy) = 5 \end{cases}$$
 کدام است؟

$$\begin{cases} x = e^7 \\ y = e^8 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x = e \\ y = e^7 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x = e^7 \\ y = e^7 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x = e^7 \\ y = e^7 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 y^7 = e^{12} \\ (*) \quad xy = e^5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (xy)^2 \times y = e^{12} \\ (e^5)^2 \times y = e^{12} \longrightarrow y = e^2 \end{cases} \quad \text{حل: (1)}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ (*) \longrightarrow x = e^7 \end{matrix}$$

تست: جواب معادله  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$  کدام است؟

$$4 \quad (4) \quad 7 \quad (3) \quad 16 \quad (2) \quad 49 \quad (1)$$

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} x = 7 \quad \text{حل: (2)}$$

$$\implies \frac{1}{\sqrt{2}} \log_2 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \log_2 x + \log_2 x = 7 \implies \frac{2}{\sqrt{2}} \log_2 x = 7$$

$$\implies \log_2 x = \frac{7\sqrt{2}}{2} \implies x = 16$$

تست: در دستگاه  $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = \log_8 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$  حاصل  $x \cdot y$  کدام است؟

(1) 1      (2) 2      (3) 4      (4) 6

$$\log_2 x - \frac{1}{\sqrt{2}} \log_2 y = 0 \implies \log_2 x - \log_2 \sqrt[2]{y} = 0 \quad \text{حل: (1)}$$

$$\implies \log_2 \left( \frac{x}{\sqrt[2]{y}} \right) = \log_2 1 \implies \frac{x}{\sqrt[2]{y}} = 1 \implies x^2 = y$$

$$2x - y = 1 \implies -x^2 + 2x = 1 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies (x-1)^2 = 0$$

$$\implies x = 1 \text{ و } y = 1 \implies x \cdot y = 1$$

تست: دامنه‌ی تابع  $y = \log_{[x]} \left( \frac{1}{x} \right)$  کدام است؟

(1)  $(0, +\infty) - \{1\}$       (2)  $(1, +\infty)$       (3)  $[1, +\infty)$       (4)  $[2, +\infty)$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \implies x > 0 \\ [x] > 0 \implies x \geq 1 \\ [x] \neq 1 \implies x \notin [1, 2] \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 2 \quad \text{حل: (4)}$$

$$(t \geq 0)$$

$$f(t) = f(0)e^{kt}$$

تابع رشد و زوال : تابع

را تابع نمایی رشد با نسبت افزایش  $k$  برای  $(k > 0)$  و تابع نمایی زوال با نسبت کاهش  $k$  برای  $(k < 0)$  می‌نامیم .

نکته :  $f(0)$  مقدار ثابت اولیه تابع است .

نکته : ممکن است تابع نمایی را بصورت  $f(t) = Be^{kt}$  بنویسیم که در آن  $B$  مقدار ثابت اولیه تابع است .

نکته : اگر  $k > 0$ ، تابع  $f$  صعودی و اگر  $k < 0$ ، تابع  $f$  نزولی است .

تست : جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ تقریباً ۶۰ میلیون نفر بوده است ، اگر رشد نمایی آن  $K = 0.02 \ln(2)$  فرض شود ، جمعیت ایران در سال ۱۴۱۵ تقریباً چند میلیون نفر است ؟

$$(1) \quad 100 \quad (2) \quad 120 \quad (3) \quad 80 \quad (4) \quad 90$$

$$t = 1415 - 1365 = 50 \text{ (سال)} \quad p(0) = 60 \quad \text{حل: (2)}$$

$$p(t) = p(0)e^{kt} \implies p(50) = 60 \cdot e^{(0.02 \ln 2)(50)}$$

$$\implies = 60 \cdot e^{(\ln 2)} = 60 \times 2 = 120$$

تست : قیمت فروش کالایی  $t$  سال پس از خرید ،  $f(t)$  تومان است .

اگر  $f(t) = 1200 + 800 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$  ، چند سال پس از خرید ، قیمت این کالا ۲۰۰۰ تومان می‌شود ؟  $(\ln 10 = 2/3)$

$$(1) \quad 9/2 \quad (2) \quad 10/2 \quad (3) \quad 8/2 \quad (4) \quad 7/2$$

$$2000 = 1200 + 800 \cdot e^{-\frac{t}{4}} \implies 800 = 800 \cdot e^{-\frac{t}{4}} \quad \text{حل: (1)}$$

$$\implies \frac{1}{10} = e^{-\frac{t}{4}} \xrightarrow{\text{برای حل معادلات نمایی از طرفین لگاریتم می‌گیریم}} \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{t}{4}$$

$$\implies t = 4\ln(10) = 4 \times \frac{2}{3} = 9/2$$

تست : تعدادی باکتری را در شرایط ایدآل آزمایشگاهی کشت می‌دهند ، اگر مقدار باکتریها پس از ۳ ساعت به  $10^4$  و پس از ۵ ساعت به  $4 \times 10^4$  برسد ، تعداد باکتریها در آغاز کدام است ؟

- (۱) ۱۵۲۰      (۲) ۱۲۰۰      (۳) ۱۲۵۰      (۴) ۱۰۲۰

$$\text{حل: (۳)} \quad \begin{cases} (۱) \begin{cases} t = 3 \\ p(3) = 10^4 \\ 10^4 = p(\cdot)e^{rk} \end{cases} \\ (۲) \begin{cases} t = 5 \\ p(5) = 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 = p(\cdot)e^{\Delta k} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۲)-(۱)} e^{rk} = 4 \implies K = \ln(4)$$

$$(۱) \implies 10^4 = p(\cdot)e^{r\ln(3)} \implies 10^4 = p(\cdot)e^{\ln(3)} \implies 10^4 = 3p(\cdot) \implies p(\cdot) = 1250$$

تست : جمعیت شهری در سال ۱۳۷۵ ، ۱۰ میلیون و در سال ۱۳۹۵ ، جمعیت آن ۱۵ میلیون برآورد شده است ، در سال ۱۴۱۵ جمعیت شهر کدام است ؟

- (۱) ۲۳/۵      (۲) ۲۱/۵      (۳) ۲۰/۵      (۴) ۲۲/۵

$$p(20) = 15 = 10 \cdot e^{r \cdot k} \implies e^{r \cdot k} = 1/5 \quad \text{حل: (۴)}$$

$$p(40) = 10 \cdot e^{40k} = 10 \cdot (e^{20k})^2 = 10 \cdot (1/5)^2 = 22/5$$

تست : جمعیت کشوری پس از ۸ سال  $1/2$  برابر می‌شود ، اگر ثابت رشد تغییر نکند ، جمعیت کشور پس از ۱۶ سال چند برابر می‌شود ؟

- (۱)  $1/6$       (۲)  $1/5$       (۳)  $1/3$       (۴)  $1/4$



$$p(t) = p(\cdot)e^{kt} \implies 1/2 p(\cdot) = p(\cdot)e^{\lambda k} \implies e^{\lambda k} = 1/2 \quad \text{حل: (۴)}$$

$$p(16) = p(\cdot)e^{16k} = p(\cdot)(e^{\lambda k})^2 = 1/4 p(\cdot)$$

تست: اگر تعداد باکتری‌ها در یک ساعت دو برابر شود، چقدر طول می‌کشد تا تعداد آن‌ها ۸ برابر شود؟

(۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۲/۵

$$p(1) = 2p(\cdot) = p(\cdot)e^k \implies e^k = 2 \quad \text{حل: (۲)}$$

$$p(t) = 8p(\cdot) = p(\cdot)e^{kt} \implies 8 = (e^k)^t \implies 8 = 2^t \implies t = 3$$

تست: در یک نوع کشت تعداد باکتری‌ها بعد از  $t$  دقیقه برابر  $f(t) = Ae^{0.3t}$  است. اگر در این نوع کشت ۲۰۰ باکتری

موجود باشد بعد از چند دقیقه ۱۰۰۰ باکتری وجود خواهد داشت؟  $\ln(5) = 1/62$

(۱) ۴۵      (۲) ۴۸      (۳) ۵۴      (۴) ۵۶

$$f(t) = 200 \cdot e^{0.3t} \implies 1000 = 200 \cdot e^{0.3t} \quad \text{حل: (۳)}$$

$$\implies \ln(5) = 0.3t \implies t = 54$$

تست: از معادله  $e^{\log_e \sqrt{e^{(x+1)}}} = 4$ ، مقدار  $x$  کدام است؟

(۱) ۹      (۲) ۷      (۳) -۹      (۴) ۸

$$e^{\frac{1}{2} \log_e x+1} = 4 \implies (x+1)^{\frac{1}{2}} = 4 \implies (x+1)^2 = 64 \quad \text{حل: (۲)}$$

$$\implies x+1 = \pm 8 \implies x = -9 \quad \text{یا} \quad x = 7 \quad (\text{قابل قبول})$$

تست: از دستگاه  $\begin{cases} \log x + \log y^2 = 2 \\ \log \sqrt{x} - \log y = -3 \end{cases}$  ، مقدار  $xy$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{10000}$  (۲)  $10000$  (۳)  $\frac{1}{10}$  (۴)  $1$

حل: (۴)  $\begin{cases} \log x + 2 \log y = 2 \\ \frac{1}{2} \log x - \log y = -3 \end{cases} \implies 2 \log x = -4 \implies \log x = -2 \implies x = \frac{1}{100}$  (۱)

(۲)  $2 \log y = 4 \implies \log y = 2 \implies y = 100$  و

(۱) و (۲)  $\implies xy = 1$

تست: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  باشد حاصل  $\log_{12} 10 + \log_3 2$  بر حسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

(۱)  $\frac{a+b}{b(2a+b)}$  (۲)  $\frac{1}{b(a+b)}$  (۳)  $\frac{2a+b}{b(a+b)}$  (۴)  $\frac{b}{(2a+b)}$

حل: (۱)  $\log_{12} 10 + \log_3 2 = \frac{1}{\log_{12} 10} + \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{1}{2 \log 2 + \log 3} + \frac{\log 2}{\log 3}$

$\implies = \frac{1}{2a+b} + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b(2a+b)}$

تست: اگر  $ab = 10$  باشد، ماکزیمم  $\log a \times \log b$  برابر است با:

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $1$

حل: (۱)  $ab = 10 \implies \log ab = 1 \implies \log a + \log b = 1 \implies \log a = \log b = \frac{1}{2}$

$\log a \times \log b = \frac{1}{4}$

نکته: وقتی مجموع دو عبارت برابر عدد ثابتی باشد، حاصلضرب آن دو وقتی Max است که آن دو با هم برابر باشند.

تست: حاصل  $x$  از معادله  $\log \sqrt{x} + \log_x 100 = 2$  کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۱۰۰۰۰

حل: (۲)

$$\log \sqrt{x} + \frac{1}{\log_{10} x} = 2 \implies \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{\frac{1}{2} \log x} = 2$$

$$\implies \left(\frac{1}{2} \log x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} \log x\right) + 1 = 0 \implies \left(\frac{1}{2} \log x - 1\right)^2 = 0$$

$$\implies \log x = 2 \implies x = 100$$

تست: معادله  $\log_{\Delta-x}(x-1) + \log_{\Delta-x}(x+2) = \log_{\Delta-x} 4$  دارای جواب ..... است.

- (۱) ۳ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۲

حل (۴)

$$\log_{\Delta-x}(x-1)(x+2) = \log_{\Delta-x} 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} x-1 > 0 \implies x > 1 \\ x+2 > 0 \implies x > -2 \\ \Delta-x > 0 \implies x < \Delta \\ \Delta-x \neq 1 \implies x \neq \Delta-1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < \Delta \text{ و } x \neq 4$$

$$x^2 + x - 2 = \log_{\Delta-x} 4 \implies x^2 + x - 2 = 4 \implies x^2 + x - 6 = 0$$

$$\implies x = -3 \text{ یا } x = 2 \quad (\text{قابل قبول})$$

تست: جواب معادله  $\log_{\Delta} \log_{\Delta} x = \log_{\Delta} 2 + \log_{\Delta} \log_{\Delta} x$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۶ (۴) ۴

حل: (۳)

$$\log_{\Delta} \log_{\Delta} \log_{\Delta} x = \log_{\Delta} 2 - \log_{\Delta} 5 \implies \log_{\Delta} \log_{\Delta} \log_{\Delta} x = \log_{\Delta} \left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\implies \log_{32} \log_2 x = \frac{2}{5} \implies \log_2 x = (32)^{\frac{2}{5}} \implies \log_2 x = 4 \implies x = 16$$

تست : حاصل  $\sqrt{10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \log 16}$  کدام است ؟

- (۱) ۱۰      (۲) ۲۰      (۳) ۱۵      (۴) ۲۵

$$\sqrt{10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \log 16} = \sqrt{10 \cdot 2 + 10 \cdot \log \sqrt{16}} = \sqrt{10 \cdot 2 + 10 \cdot \log 2} = \sqrt{10 \cdot 4} = 20 \quad \text{حل: (۲)}$$

تست : جواب معادله  $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$  کدام است ؟

- (۱) ۱۰۰      (۲) ۱۰      (۳) ۱۰۰۰      (۴) ۱۰۰۰۰

$$5^{\log x} = x^{\log 5} \implies 2 \times 5^{\log x} = 50 \implies 5^{\log x} = 25 \quad \text{حل: (۱)}$$

$$\implies \log x = 2 \implies x = 100$$

تست : حاصل  $A = \log_x \sqrt{x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{6}} x}$  کدام است ؟

- (۱)  $\frac{7}{10}$       (۲)  $\frac{10}{7}$       (۳)  $\frac{15}{12}$       (۴)  $\frac{16}{15}$

$$A = \log_x \sqrt{\sqrt{x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{6}} x}} = \log_x \sqrt[3]{\sqrt{x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{6}} x}} = \log_x \sqrt[3]{x^{\frac{21}{6}}} = \frac{21}{3 \cdot 6} = \frac{7}{10} \quad \text{حل: (۱)}$$

تست : حاصل  $A = 10^{-1+2 \log 5}$  کدام است ؟

(۱)  $\frac{4}{5}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

حل: (۳)  $A = 10^{-1} \times 10^{2 \log 5} = \frac{1}{10} \times 10^{\log 25} = \frac{1}{10} \times 25 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

تست: اگر  $\log(a - b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$  باشد، مقدار  $a^2 + b^2$  کدام است؟

(۱)  $ab$  (۲)  $2ab$  (۳)  $3ab$  (۴)  $4ab$

حل: (۳)  $\log(a - b) = \frac{1}{2} \log ab \implies \log(a - b) = \log \sqrt{ab}$

$\implies a - b = \sqrt{ab} \implies (a - b)^2 = ab \implies a^2 + b^2 - 2ab = ab$

$\implies a^2 + b^2 = 3ab$

تست: حاصل عبارت  $A = \log_{\sqrt{xy}} x + \log_{\sqrt{xy}} y$  برابر است با:

(۱)  $x$  (۲)  $y$  (۳)  $xy$  (۴)  $2$

حل: (۴)  $A = \log_{\sqrt{xy}} xy = 2 \log_{xy} xy = 2$

تست: معادله‌ی  $9^{\frac{\log_3(x+2)}{3}} = 7^{\frac{\log_7(2x^2+3x+2)}{7}}$  دارای جواب ..... است.

(۱)  $2$  (۲)  $-1$  (۳)  $-2$  (۴)  $2$  و  $-1$

حل: (۴)  $(x+2)^{\frac{\log_3 9}{3}} = (2x^2+3x+2)^{\frac{\log_7 7}{7}} \implies (x+2)^{-2} = (2x^2+3x+2)^{-1}$

$\implies (x+2)^2 = 2x^2+3x+2 \implies x^2+4x+4 = 2x^2+3x+2 \implies$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1 \text{ یا } x = 2$$

تست : در دستگاه :

$$\begin{cases} \log x^2 y^2 = 2 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \text{ کدام است } x + y$$

(۱) ۱۰ (۲) ۱ (۳) ۱۱ (۴) ۹

حل : (۳)

$$\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 \log x + 2 \log y = 2 \\ 2 \log x - 2 \log y = 2 \end{cases}$$

$$\implies \Delta \log x = \Delta \implies \log x = 1 \implies x = 10 \text{ و } \log \frac{10}{y} = 1$$

$$\implies \left(\frac{10}{y}\right) = 10 \implies y = 1 \implies x + y = 11$$

تست : حاصل عبارت  $\frac{1}{\log_{18} 3} - \frac{1}{\log_2 3}$  برابر است با:

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۳

حل : (۲)

$$\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2$$

تست : جواب معادله‌ی  $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$  کدام است ؟

(۱) ۲۴ (۲) ۹ (۳) ۱ (۴) ۸

حل : (۴)

$$x = 2^{2^4} \implies x = 2^2 \implies x = 8$$

تست : دامنه‌ی تابع  $f(x) = \log(\log(\log x))$  کدام است ؟

(۱)  $(10, +\infty)$  (۲)  $(0, +\infty)$  (۳)  $(1, +\infty)$  (۴)  $(2, +\infty)$

حل: (۱)  $\log(\log x) > 0 \implies \log(\log x) > \log 1 \implies \log x > 1$

$\log x > \log 10 \implies x > 10$

تست: جواب معادله‌ی  $25^{\log x} = 5 + 4(5^{\log x})$  کدام است؟

(۱) 10 (۲) -1 (۳) 5 (۴) 1

حل: (۱)  $5^{2 \log x} = 5 + 4(5^{\log x})$

$\implies (5^{\log x})^2 - 4(5^{\log x}) - 5 = 0 \implies (5^{\log x} - 5)(5^{\log x} + 1) = 0$

$\implies 5^{\log x} = -1$  (غ ق) یا  $5^{\log x} = 5 \implies \log x = 1 \implies x = 10$

تست: معادله‌ی  $6^{\log x} + 8^{\log x} = x$  دارای جواب ..... است.

(۱) 10 (۲) 100 (۳) 1000 (۴)  $\frac{1}{10}$

حل: (۲)  $6^{\log x} + 8^{\log x} = x^{\log 10} \implies 6^{\log x} + 8^{\log x} = 10 \cdot \log x$

$\implies \frac{6^{\log x}}{10 \cdot \log x} + \frac{8^{\log x}}{10 \cdot \log x} = 1 \implies \left(\frac{6}{10}\right)^{\log x} + \left(\frac{8}{10}\right)^{\log x} = 1$

$\implies \log x = 2 \implies x = 100$

تست: مجموعه جواب‌های معادله‌ی  $\log_x 2 \times \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$  کدام است؟

(۱) 12 (۲) 24 (۳) 32 (۴) 64

حل: (۱)  $\log_x 2 \times \frac{1}{\log_2 \frac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 \frac{x}{64}}$

$\implies \log_x 2 \times \frac{1}{\log_2 x - \log_2 16} = \frac{1}{\log_2 x - 6} (\log_2 x = t) \implies \frac{1}{t} \times \frac{1}{t-4} = \frac{1}{t-6}$

$\implies \dots \implies t = 2$  یا  $3 \implies \log_2 x = 2$  یا  $3 \implies x = 4$  یا  $8$

تست: در دستگاه:  $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$  حاصل  $\frac{x}{y}$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۱۲

حل: (۳)  $\begin{cases} \frac{\log x}{\log y} + \frac{\log y}{\log x} - 2 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(\log x)^2 - (\log y)^2 - 2 \log x \log y}{\log x \log y} = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} (\log x - \log y)^2 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} \log x = \log y \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

$\implies x^2 + x = 12 \implies x = -4$  (غ ق) یا  $x = 3 \implies y = 3$

تست: جواب معادله  $\frac{\log 2}{1 - \log x} = \frac{1}{3}$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{4}{5}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

حل: (۱)  $3 \log 2 = 1 - \log x \implies \log x = 1 - 3 \log 2 = \log 10 - \log_2 8 = \log \frac{10}{8}$

$= \log \frac{10}{8} \implies x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

تست: اگر  $\begin{cases} \log_3 x - \log_9 y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$  آنگاه  $x + y$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۲



حل: (۴)  $\log_r x = \log_4 y$

$$\implies \log_r x = \frac{1}{r} \log_r y \implies \log_r x = \log_r \sqrt[r]{y} \implies x = \sqrt[r]{y} \text{ و } y = x^r$$

$$2x - x^2 = 1 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies (x-1)^2 = 0 \implies x = 1 \xrightarrow{\text{معادله دوم}} y = 1$$

تست: ریشه‌های معادله‌ی  $x^{\log_5 x} = 625$  کدامند؟

(۱)  $25$  و  $\frac{1}{25}$  (۲)  $25$  و  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\pm 25$  (۴)  $\pm 5$

حل: (۱)  $\log_\Delta x = \log_x 625 \implies \log_\Delta x = \log_x 5^4 = 4 \log_\Delta x \implies \log_\Delta x = \frac{1}{\log_\Delta x}$

$$\implies (\log_\Delta x)^2 = 4 \implies \log_\Delta x = \pm 2 \implies x = 25 \text{ و } x = \frac{1}{25}$$

تست: اگر  $\log_9 8 = a$ ، آنگاه  $\log_{27} 16 \times \log_3 2$  برابر است با:

(۱)  $3a^2$  (۲)  $\frac{3a^2}{4}$  (۳)  $\frac{4a^2}{3}$  (۴)  $\frac{16a^2}{27}$

حل: (۴)  $\log_9 8 = a \implies \log_{3^2} 2^3 = a \implies \frac{3}{2} \log_3 2 = a \implies \log_3 2 = \frac{2a}{3}$

$$\log_{27} 16 \times \log_3 2 = \log_{3^3} 2^4 \times \log_3 2 = \frac{4}{3} \times \frac{2a}{3} \times \frac{2a}{3} = \frac{16a^2}{27}$$

تست: دامنه‌ی تابع  $f(x) = \log_{(x-1)}(x - [x] + 2)$  کدام است؟

(۱)  $(1, 2) \cup (2, +\infty)$  (۲)  $(1, +\infty)$

(۳)  $(2, +\infty)$  (۴)  $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$

$$\text{حل: (۱)} \quad 0 \leq x - [x] < 1 \implies 2 \leq x - [x] + 2 < 3 \implies (\text{مثبت است})$$

$$x - 1 > 0 \text{ و } x - 1 \neq 1 \implies D_f = (1, +\infty) - \{2\}$$