فصل سوم :تابع نمایی و لگاریتمی

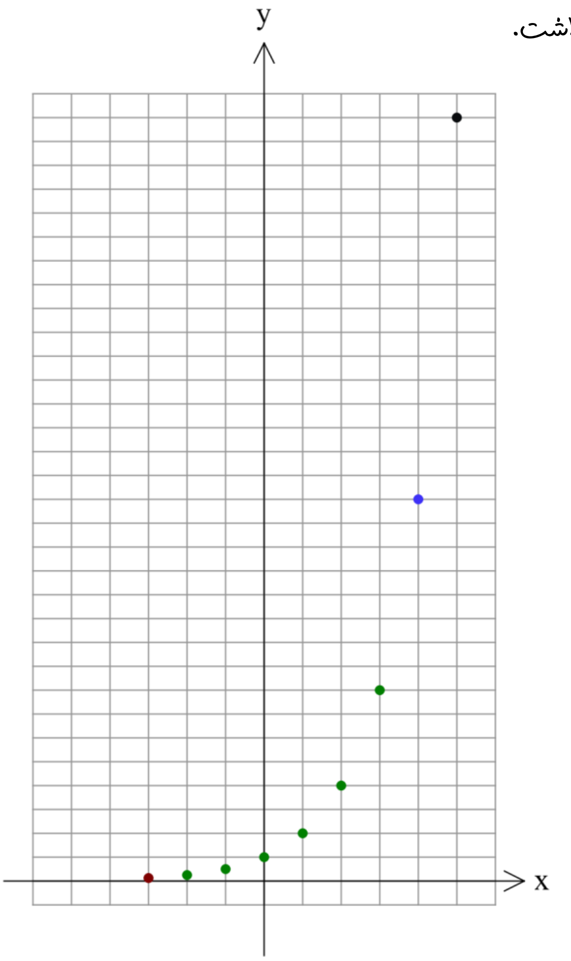
درس اول : تابع نمایی

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

اگر توان های صحیح عدد ۲ را در نظر بگیریم نمودار زیر را خواهیم داشت.

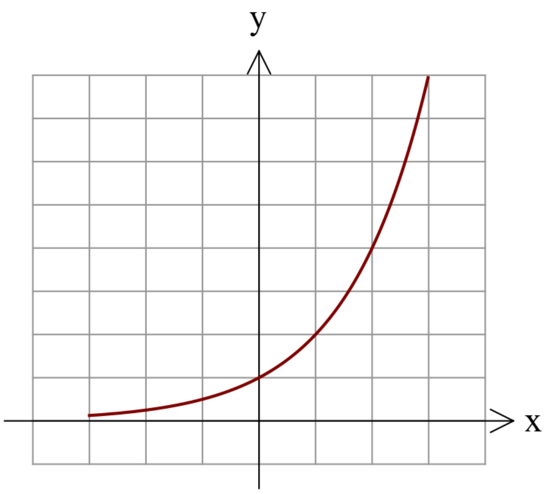


حال فرض کنید بخواهیم دامنه را به اعداد حقیقی تعمیم دهیم :

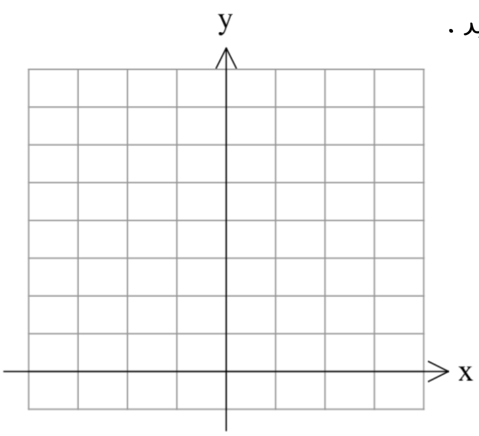
به عنوان مثال :

$۲^{\sqrt{۲}} \simeq ۲/۶۶$ $\qquad$ $۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ $\qquad$ $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲} \simeq ۱/۲۶$

پس نمودار به صورت زیر در می آید :



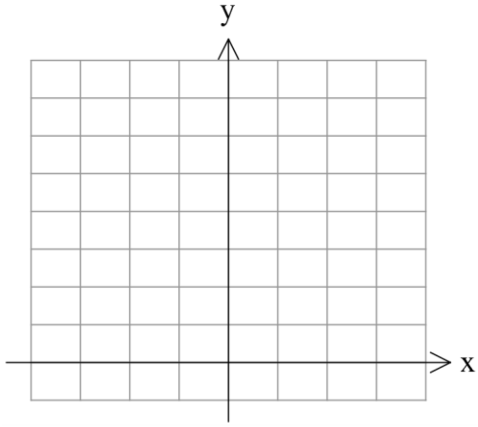
حالا به کمک ماشین حساب و نقطه یابی نمودار تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید .

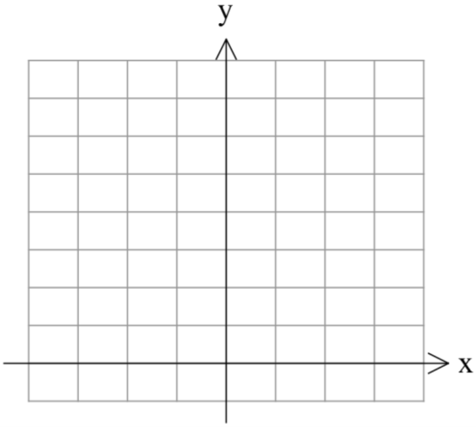


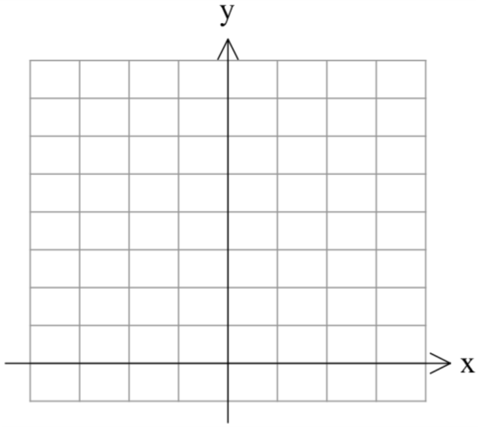
تابع نمایی : هر تابع به صورت $y = a^x$ $(a > ۰, a \neq ۱)$ را تابع نمایی می گویند .

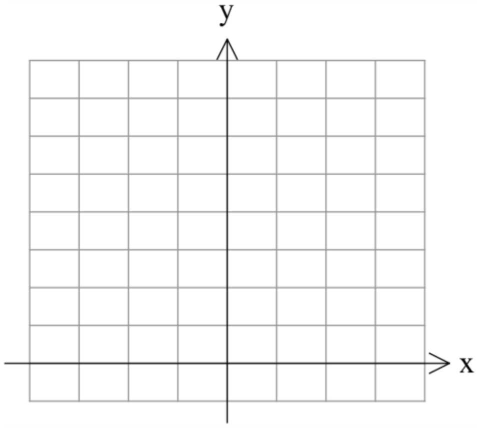
توجه : هر تابع به صورت $y = ka^x$ $(a > ۰, a \neq ۱, k \neq ۰)$ *رفتار نمایی* دارد .

تمرین : نمودار توابع $y=-(\frac{1}{2})^{x+2}$, $y=(\frac{1}{2})^x+2$, $y=2^{x-1}$, $y=-2^x-1$ را به کمک انتقال رسم کنید .

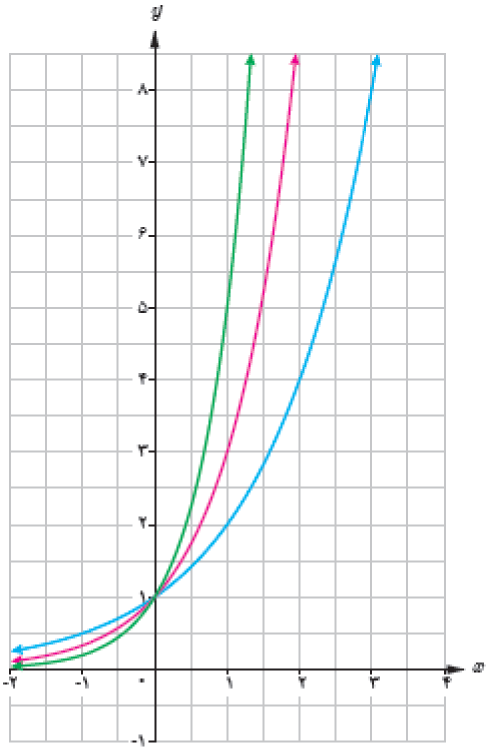


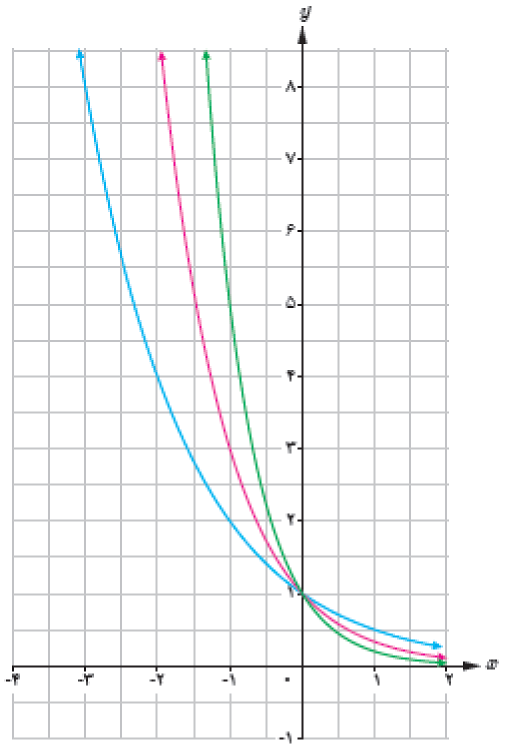






تمرین : نمودار توابع 2^x , 3^x , 5^x و همچنین توابع $(\frac{1}{2})^x$, $(\frac{1}{3})^x$, $(\frac{1}{5})^x$ رسم شده است . ضابطه هر نمودار را در کنار آن بنویسید .





تمرین : مقدار نوعی باکتری خاص در هر ساعت ۴ برابر می شود اگر مقدار اولیه آن ۲۰ میلی گرم بوده باشد ، جرم توده بعد از t ساعت را به صورت نمایی نوشته و مقدار آن را بعد از یک شبانه روز تخمین بزنید .

تمرین : اگر a,b,c دنباله حسابی باشند . کدام مورد درست است ؟ (راهنمایی : در دنباله حسابی $۲b=a+c$)

الف) $۳^a,۳^b,۳^c$ دنباله حسابی است .

ب) $۳^a,۳^b,۳^c$ دنباله هندسی است .

ج) $۳^a,۳^{b+۱},۳^c$ دنباله حسابی است .

د) $۳^a,۳^{۲b},۳^c$ دنباله هندسی است .

معادله و نامعادله نمایی :

الف) اگر $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$

ب) اگر $a>۱$ در این صورت اگر $a^x>a^y$ آنگاه $x>y$.

ج) اگر $۰<a<۱$ در این صورت اگر $a^x>a^y$ آنگاه $x<y$.

تمرین : معادله و نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $(\frac{۲}{۳})^{x+۲}=(\frac{۸۱}{۱۶})^{x-۱}$

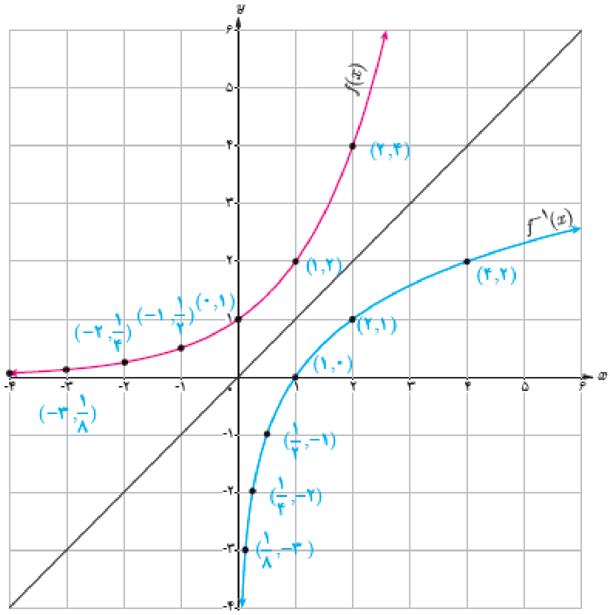
ب) $(\frac{۱}{۳})^{x+۴}>(\frac{۱}{۲۷})^{x}$

ج) $۹^{۲x-۲}>\frac{۱}{۲۴۳}$

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

فرض کنید تابع رشد یک نوع باکتری به صورت $f(t) = ۲^t$ است . ور به راحتی می توان گفت در زمان $t = ۲/۵$ مقدار این باکتری حدود $f(۲/۵) = ۲^{۲/۵} \simeq ۵/۶۶$ است . حال سوال اینجاست که اگر بخواهیم مثلاً بدانیم در چه زمانی مقدار این باکتری تقریبا ۶۰ می شود ، چه باید کرد ؟

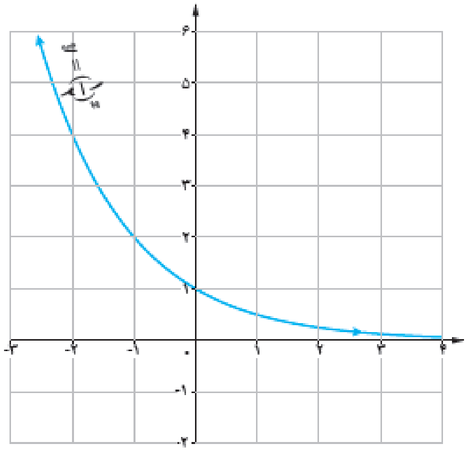
همان طور که از نمودار تابع نمایی معلوم است ، تابع نمایی یک تابع یکی به یک است پس وارون پذیر است و می توان وارون آن را با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y = x$ رسم کرد پس :



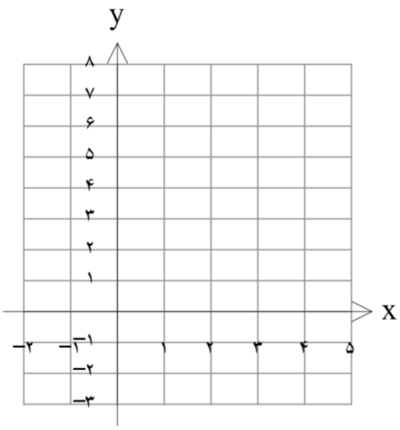
تابع لگاریتم : وارون تابع نمایی $y = a^x$ را تابع لگاریتم بر مبنای a می نامند و با نماد $y = \log_a^x$ نمایش می دهند. که در آن $a > ۰, a \neq ۱, x > ۰$ است .

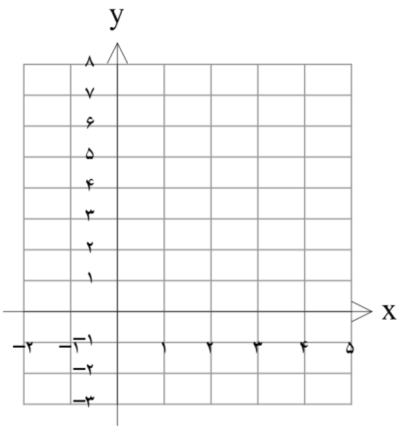
تمرین : دامنه تابع $y = \log_x^{۴-x^۲}$ را مشخص کنید .

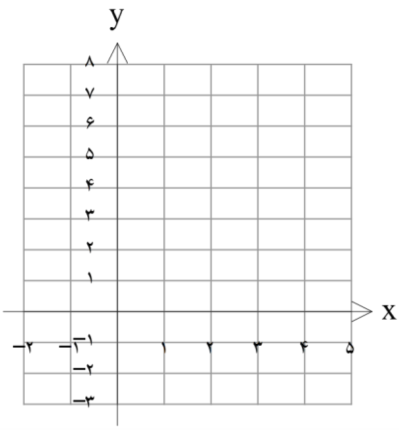
تمرین : به کمک نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}}^x$ را رسم کنید .



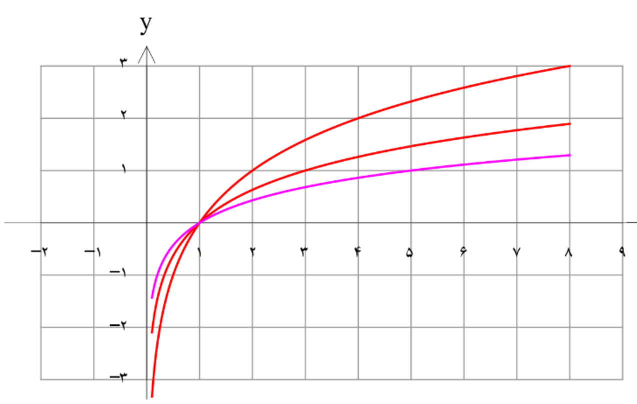
تمرین : نمودار توابع $y=\log_2^{x+1}-1$, $y=1-\log_{\frac{1}{2}}^x$, $y=1+\log_2^x$ را به کمک انتقال رسم کنید .

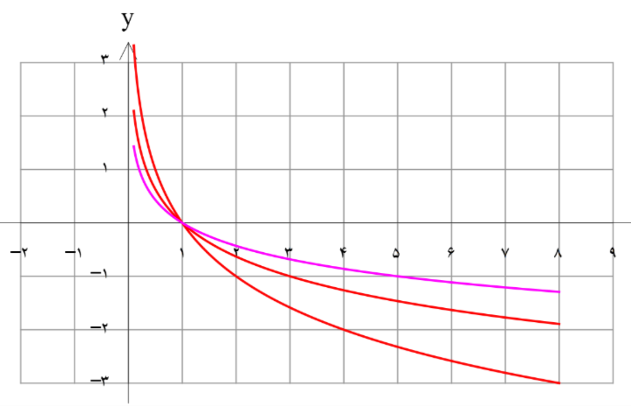






تمرین : نمودار توابع $y=\log_2^x , y=\log_3^x , y=\log_5^x$ وهمچنین توابع $y=\log_{\frac{1}{2}}^x , y=\log_{\frac{1}{3}}^x , y=\log_{\frac{1}{5}}^x$ رسم شده است . ضابطه هر کدام را در کنار نمودار مربوطه بنویسید .





تمرین : با توجه به نمودار لگاریتم در ابتدای این درس ، توان های صحیح عدد ۲ را بدست آورید :

$\log_{۲}^{۲^{-۳}} =$ $\log_{۲}^{۲^{-۲}} =$ $\log_{۲}^{۲^{-۱}} =$ $\log_{۲}^{۲^{۰}} =$ $\log_{۲}^{۲} =$ $\log_{۲}^{۲^{۲}} =$ $\log_{۲}^{۲^{۳}} =$

تعریف لگاریتم : به طور کلی تعریف لگاریتم به صورت زیر است :

$$\boxed{x = a^{y} \Leftrightarrow \log_{a}^{x} = y}$$

تمرین : مقادیر زیر را حساب کنید .

$\log_{۲}^{۸} =$ $\log_{۳}^{\frac{۱}{۲۷}} =$ $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} =$

$\log_{۵}^{\sqrt{۱۲۵}} =$ $\log_{\frac{۱}{۵}}^{۲۵} =$ $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۱۶} =$

تمرین : تساوی توانی را به صورت لگاریتمی و تساوی لگاریتمی را به صورت توانی بنویسید .

$\log_{۵}^{\frac{۱}{۶۲۵}} = -۴ \Rightarrow$ $\log_{۳}^{۱} = ۰ \Rightarrow$

$۳^{۶} = ۲۴۳ \Rightarrow$ $۲^{-۱۰} = \frac{۱}{۱۰۲۴} \Rightarrow$

تمرین : اگر $f(x) = \log_{۳}^{(۴x-۱)}$ مقدار $f^{-۱}(۳)$ چقدر است ؟ (راهنمایی : در واقع مقدار y داده شده و x را می خواهد)

تمرین : اگر $f(x) = ۳^{۵x-۱}$ ، ضابطه $f^{-۱}(x)$ را بیابید .

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

ویژگی های لگاریتم :

۱) $\log_a^1 = 0$

اثبات : چون همواره $a^0 = 1$

۲) $\log_a^a = 1$

اثبات : چون همواره $a^1 = a$

۳) $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

اثبات : فرض کنید $\log_a^x = p$ و $\log_a^y = q$ در این صورت $y = a^q , x = a^p$. پس داریم $xy = a^{p+q}$ و طبق تعریف لگاریتم $\log_a^{xy} = p + q$ در نتیجه $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

مثال : اگر $\log_2^3 = 1/58$ و $\log_2^5 = 2/32$ باشد . مقدار $\log_2^{15}$ را بیابید .

حل : $\log_2^{15} = \log_2^3 + \log_2^5 = 1/58 + 2/32 = 3/9$

۴) $\log_a^{x/y} = \log_a^x - \log_a^y$

اثبات :

مثال : اگر $\log_{10}^2 = a$ مقدار $\log_{10}^5$ را بیابید . (وقتی مبنای لگاریتم ۱۰ باشد معمولا آن را نمی نویسند)

حل : $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

۵) $\log_a^{x^n} = n\log_a^x$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت $\frac{۱}{۲}\log ۱۶ + ۲\log ۵$ را بیابید .

حل : $\frac{۱}{۲}\log ۴^۲ + \log ۵^۲ = ۲\times\frac{۱}{۲}\log ۴ + \log ۲۵ = \log ۴ + \log ۲۵ = \log ۱۰۰ = \log ۱۰^۲ = ۲\log ۱۰ = ۲$

۶) $\log_{a^n}^x = \frac{۱}{n}\log_a^x$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت $\log_{\sqrt{۲}}^{۱۲۸}$ چقدر است ؟

حل : $\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۱۲۸} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_۲^{۱۲۸} = ۲\log_۲^{۱۲۸} = ۲\log_۲^{۲^۷} = ۷\times۲\log_۲^۲ = ۱۴$

۷) $\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$ (قاعده تغییر مبنا)

اثبات : اگر $\log_b^x = p, \log_b^a = q$ آنگاه $x = b^p, a = b^q$ و می توان نوشت :

$$x = b^p = (b^q)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow x = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \log_a^x = \frac{p}{q} \Rightarrow \log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$$

نتیجه ۱: $\log_a^x = \frac{۱}{\log_x^a}$

نتیجه ۲: $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$ (می توان به تعداد بیشتر نیز تعمیم داد)

مثال : اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ مقدار $\log_{۶}^{۱۵}$ را بیابید .

حل :
$$\log_{۶}^{۱۵} = \frac{\log ۱۵}{\log ۶} = \frac{\log ۳ \times ۵}{\log ۲ \times ۳} = \frac{\log ۳ + \log ۵}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{b + (۱-a)}{a+b} = \frac{b-a+۱}{b+a}$$

۸) $b^{\log_a^x} = x^{\log_a^b}$

اثبات :

مثال : حاصل $۲^{(۱+۲\log_۲^۵)}$ چقدر است ؟

حل :
$$۲^{(۱+۲\log_۲^۵)} = ۲^۱ \times ۲^{۲\log_۲^۵} = ۲ \times ۲^{\log_۲^{۲۵}} = ۲ \times ۲۵^{\log_۲^۲} = ۲ \times ۲۵ = ۵۰$$

....

تمرین : مقدار $\log_{\sqrt{۳}}^{۹\sqrt[۴]{۳}}$ را بیابید .

تمرین : مقدار $\dfrac{۱}{\log_۹^۶} + \dfrac{۱}{\log_۴^۶}$ را حساب کنید .

تمرین : مقدار $۳^{\log_۹^۶}$ را بدست آورید .

تمرین : حاصل عبارت $\log \dfrac{۹۹}{۱۰۰} + \ldots + \log \dfrac{۳}{۴} + \log \dfrac{۲}{۳} + \log \dfrac{۱}{۲}$ چیست ؟

تمرین : اگر $\log ۲ = a$ باشد حاصل $\log ۱/۲۵$ چقدر است ؟

تمرین : مقدار عبارت $\log_{\sqrt{۱۰}}^{۵} + ۲\log_{۱۰۰۰}^{۸}$ را بیابید .

تمرین : حاصل عبارت $\log_{۳}^{۲} \times \log_{۴}^{۳} \times \log_{۵}^{۴} \times .... \times \log_{۶۴}^{۶۳}$ را بیابید .

معادله و نامعادله لگاریتمی :

الف) اگر $\log_a^x = \log_a^y$ آنگاه $x = y$.

ب) اگر $\log_a^x = b$ می توان از تعریف لگاریتم برای حل معادله بهره برد .

ج) اگر $a > ۱$ در این صورت اگر $\log_a^x > \log_a^y$ آنگاه $x > y$.

د) اگر $۰ < a < ۱$ در این صورت اگر $\log_a^x > \log_a^y$ آنگاه $x < y$.

توجه توجه !!! : در حل معادلات و نامعادلات لگاریتمی باید به دامنه تابع لگاریتمی نیز توجه داشت و جواب هایی قابل قبول خواهند بود که در دامنه لگاریتم باشند .

تمرین : معادله $x^{۲} - x^{\log_x^{۴}} = ۰$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log_x^{x-2}+\log_x^{2x-3}=2$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log(x-10)+2\log x=1+\log(x+1)$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log_x^{(x^2-2x)}=2$ چند جواب دارد ؟

تمرین : معادله $\log_3^{(x-1)}+\log_3^{(\frac{x}{2}+1)}=2$ را حل کنید .

تمرین : مجموعه جواب نامعادله $\log_2^{(3x-1)}<1+\log_2^x$ را بیابید . (به دامنه دو لگاریتم نیز دقت کنید)

کاربرد های لگاریتم :

۱) رشد یا کاهش درصدی : مسائلی هستند که در آن مقدار یک چیز در هر دوره به اندازه درصد خاصی افزایش یا کاهش می یابند ازتابع نمایی $f(t)=a(1+r)^t$ تبعیت می کنند که در آن a مقدار اولیه آن چیز و r درصد افزایش یا کاهش (در صورت کاهش r عدد منفی می شود) در هر دوره است .

مثال : اگر جمعیت کشوری ۳۰ میلیون و نرخ رشد سالانه جمعیت آن کشور ۲ درصد باشد .

الف) بعد از ۳۵ سال جمعیت کشور چقدر است ؟

حل : حدود ۶۰ میلیون نفر خواهند شد $f(35)=30(1/02)^{35}\simeq 30\times 2=60$

ب) بعد از چند سال جمعیت به ۱۰۰ میلیون نفر می رسد ؟

حل : حدود ۶۰/۸ سال طول خواهد کشید $100=30(1/02)^t \Rightarrow \frac{10}{3}=(1/02)^t \Rightarrow t=\log_{1/02}^{\frac{10}{3}}\simeq 60/8$

تمرین : فرض کنید قیمت یک نوع خودرو خاص سالانه ۳۰درصد افت قیمت دارد و قیمت فعلی آن ۸۰ میلیون تومان است . بعد از چند سال قیمت آن حدود ۶۵ میلیون تومان خواهد بود ؟

تمرین : با نرخ سود ۱۶ رصد سالانه یک بانک ، اگر ۱۰ میلیون تومان پول در این بانک قرار دهیم .

الف) بعد از ۵ سال پول شما چقدر شده است ؟

ب) بعد از چند سال پول شما حدود ۴۴ میلیون تومان خواهد شد ؟

توجه : در بانک ها برای دقت بیشتر از نرخ رشد روزشمار استفاده می شود که فرمول آن $f(t)=a(1+\frac{r}{365})^{365t}$

۲) شدت زلزله : اگر انرژی آزاد شده از زلزله بر حسب ارگ (Erg) را E و شدت زلزله بر حسب ریشتر را M در نظر بگیریم داریم : (ارگ برابر $۱۰^{-۷}$ ژول است)　　$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

تمرین : انرژی آزاد شده از زلزله ای ۶ ریشتری چقدر است ؟

۳) قدمت و نیمه عمر : اگر یک ماده در مدت ثابتی نصف شود آن دوره را نیمه عمر آن ماده می گویند اگر نیمه عمر را با a نمایش دهیم ، در این صورت در مدت زمان t به تعداد $\frac{t}{a}$ بار جرم ماده نصف شده است و کسر باقی مانده از ماده را می توان از رابطه زیر بدست آورد :　$(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{a}} = b$　(کسر باقی مانده در واقع نسبت مقدار ثانویه به مقدار اولیه است)

توجه : نوعی ایزوتوپ کربن به نام کربن ۱۴ در موجودات وجود دارد که پس از مرگشان شروع به از بین رفتن می کند و نیمه عمر آن حدود ۵۷۳۰ سال است که از آن برای تخمین قدمت یک فسیل استفاده می شود .

تمرین : فسیلی یافت شده که مقدار کربن ۱۴ باقی مانده از آن فقط ۲۰ درصد مقدار اولیه است . قدمت این فسیل را تخمین بزنید .

تمرین : نیمه عمر نوعی ماده هسته ای ۱۵ سال است . اگر جرم اولیه این ماده ۱۵۰ گرم بوده باشد . پس از ۷۰ سال جرم باقی مانده آن چقدر است ؟

تمرین : تمرین های صفحه ۹۰ را حل کنید .

فصل چهارم :مثلثات

درس اول : رادیان

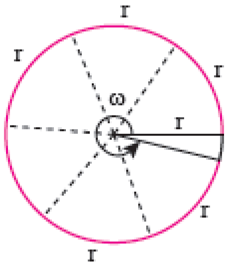
درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

درس سوم : توابع مثلثاتی

درس چهارم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

درس اول : رادیان

رادیان : اگر محیط یک دایره را به کمان هایی به اندازه شعاع قسمت کنیم ، زاویه مرکزی مقابل به این کمان ها برابر با یک رادیان خواهد بود . یک دایره کامل $2\pi \simeq 6/28 rad$ است .

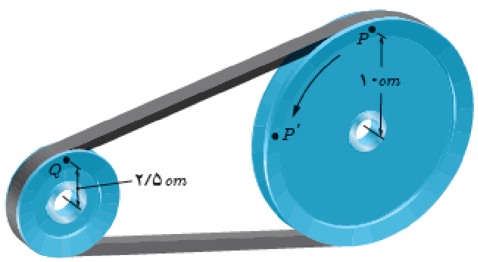


نتیجه : اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان l در دایره ای به شعاع r برابر است با : $\theta = \frac{l}{r} \quad rad$

نتیجه : برای تبدیل درجه به رادیان و برعکس می توان از نسبت $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ استفاده کرد .

تمرین : شعاع یک زمین دو ۵۰۰ متر است ، اگر دونده ای زاویه مرکزی ۷۰ درجه را بدود چند متر را طی خواهد کرد ؟

تمرین : در شکل زیر اگر قرقره بزرگ ۵۰ درجه بچرخد قرقره کوچک چند رادیان می چرخد ؟



تمرین : اندازه زاویه های $0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°$ را بر حسب رادیان بنویسید .