توابع نمایی و لگاریتمی

آنتی لگاریتم $a>0$

$$\log_b a = c \longrightarrow \text{جواب معادله} \qquad \longleftrightarrow \qquad b^c = a$$

تابع نمایی

مبنا باید $b>0$ و $b\neq 1$

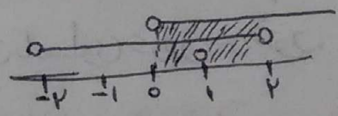
* عدد صفر و اعداد منفی فاقد لگاریتم هستند

* برای تعیین دامنه تابع لگاریتمی از $\begin{cases} b>0 \\ b\neq 1 \\ a>0 \end{cases}$ کمک می‌گیریم.

مثال * $y = \log_x (4-x^2) \qquad D_y = ?$

$$\begin{cases} b>0 \longrightarrow x>0 \\ b\neq 1 \longrightarrow x\neq 1 \\ a>0 \longrightarrow 4-x^2>0 \Longrightarrow x^2<4 \Rightarrow -2<x<2 \end{cases}$$

اشتراک



$$D_y = (0,1) \cup (1,2)$$

* تابع لگاریتمی معکوس یا وارون تابع نمایی می‌باشد.

* اگر مبنای لگاریتم برابر 10 باشد می‌توان آن را ننوشت: $\log_{10} x = \log x$

* اگر مبنای لگاریتم برابر عدد نپر $(e=2.718\ldots)$ باشد داریم: $\log_e x = \ln x$ (Ln)

مثال: $\log_2 8 = 3 \Longrightarrow 2^3 = 8$

* $\log_{16} x = \frac{3}{2} \Longrightarrow x = 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(16)^3} = 4^3 = 64$

* قلق های تستی بدون نیاز به رسم نمودار:

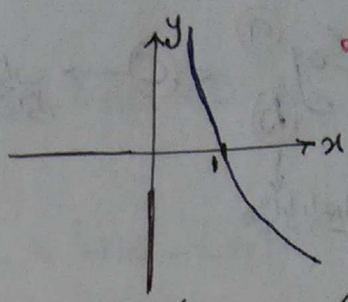
(1) $\log_b a$:
- مثبت است هرگاه a و b هر دو بزرگتر از یک و یا بین صفر و یک باشند ← a و b دارای وضعیت یکسانند
- منفی است اگر a و b یکی بزرگتر از یک و دیگری بین صفر و یک باشد ← a و b وضعیت غیر یکسان دارند

مثال: * $\log_3 5 > 0$ * $\log_7 4 > 0$ * $\log_{0.3} 0.2 > 0$ * $\log_{0.1} 0.5 > 0$

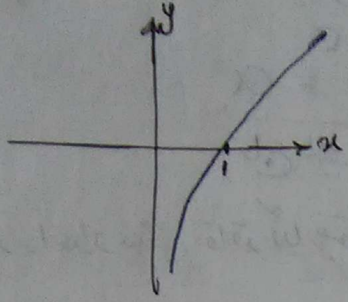
* $\log_{0.2} 6 < 0$ * $\log_7 0.3 < 0$

* نمودار توابع لگاریتمی $y=\log_a^x$

الف) $0<a<1$



ب) $a>1$



② x و y نقش آنتی لگاریتمی ایجاد می کند پس داریم : x و $y>0$

در چنین شرایطی

حالت اول $\boxed{a>1}$: $\log_a^x>\log_a^y \longrightarrow x>y$

* وقتی مبنا بزرگتر از یک باشد با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض نمی شود

حالت دوم $\boxed{0<a<1}$ $\log_a^x>\log_a^y \longrightarrow y>x$

* وقتی مبنا بین صفر و یک باشد با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض می شود.

نتیجه گیری : اگر مبنا بزرگتر از یک باشد با رشد آنتی لگاریتم حاصل لگاریتم نیز افزایش می یابد ولی اگر مبنا بین صفر و یک باشد با رشد آنتی لگاریتم حاصل لگاریتم کاهش می یابد

مثال : if $5>3$

$$\begin{cases} a=6 \longrightarrow \log_6^5>\log_6^3 \\ a=0/2 \longrightarrow \log_{0/2}^5<\log_{0/2}^3 \end{cases}$$

ویژگی های لگاریتم :

① $\log_a^1=0 \longrightarrow$ وقتی آنتی برابر ۱ هست حاصل لگاریتم صفر است

② $\log_a^a=1 \longrightarrow$ وقتی آنتی و مبنا باهم برابرند حاصل لگاریتم ۱ می باشد

مثال : $\log_{0/2}^{0/2}=1$ $\quad \log_5^5=1$

③ $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$

مثال : if $\log_2^3=A \longrightarrow$ حاصل $\log_4^{27}=?$

$$\log_4^{27}=\log_{2^2}^{3^3}=\frac{3}{2}\log_2^3=\frac{3}{2}A$$

مثال: $\log_{۱۶}^{۳۲} = \log_{۲^{۴}}^{۲^{۵}} = \frac{۵}{۴}\log_{۲}^{۲} = \frac{۵}{۴}$ $\quad * \log_{۹}^{۸۱} = \log_{۳^{۲}}^{۳^{۴}} = \frac{۴}{۲}\log_{۳}^{۳} = ۲$

④ $\log_{m}^{ab} = \log_{m}^{a} + \log_{m}^{b}$ یا $Ln\,ab = Ln\,a + Ln\,b$

⑤ $\log_{m}^{\frac{a}{b}} = \log_{m}^{a} - \log_{m}^{b}$ یا $Ln\frac{a}{b} = Ln\,a - Ln\,b$

⑥ $\log_{b}^{a} = \frac{1}{\log_{a}^{b}} \longrightarrow \begin{cases} \log_{b}^{a} = A \\ \log_{a}^{b} = \frac{1}{A} \end{cases}$

⑦ $a^{\log_{c}^{b}} = b^{\log_{c}^{a}}$

حالت مهم: $a^{\log_{a}^{b}} = b$ یا $e^{Ln\,b} = b$

⑧ تغییر مبنا $\log_{b}^{a} = \frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}} \longrightarrow if\ c=10 \Rightarrow \log_{b}^{a} = \frac{\log^{a}}{\log^{b}}$

⑨ $\log_{b}^{a} \times \log_{c}^{b} \times \log_{d}^{c} \times \cdots\cdots \times \log_{e}^{d} = \log_{e}^{a}$

* در چنین شرایطی آنتی اولی و مبنای دومی به عنوان آنتی و مبنای یک لگاریتم موجود انتخاب خواهند شد

مثال: $\log_{۳}^{۲} \times \log_{۴}^{۳} \times \log_{۵}^{۴} \times \cdots\cdots \times \log_{۱۲}^{۱۱} = ? \Rightarrow \log_{۱۲}^{۲}$

مثال: $\log_{۴}^{۳} \times \log_{۵}^{۴} \times \cdots\cdots \times \log_{۲۷}^{۲۶} = ? \Rightarrow \log_{۲۷}^{۳} = \log_{۳^{۳}}^{۳} = \frac{۱}{۳}\log_{۳}^{۳} = \frac{۱}{۳}$

*دو تا نکته بسیار قشنگ و مهم:

① $if\ c=ab \longrightarrow \log_{c}^{a} = 1 - \log_{c}^{b}$

مثال: $\log_{۶}^{۳} = ۱ - \log_{۶}^{۲}$ $\quad * \log_{۱۲}^{۴} = ۱ - \log_{۱۲}^{۳}$

$* \log_{۳۰}^{۵} = ۱ - \log_{۳۰}^{۶}$

② اگر با حاصلضرب چند عبارت لگاریتمی مواجه شدیم می توان جای آنتی ها و مبناها را به دلخواه عوض کرد

مثال: $\log_{6} 25 \times \log_{125} 8 \times \log_{4} 36 = ?$

بازنویسی: $\log_{125} 25 \times \log_{4} 8 \times \log_{6} 36 \Rightarrow \log_{5^3} 5^2 \times \log_{2^2} 2^3 \times \log_{6} 6^2 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times 2 = 2$

مثال: $\log_{9} 16 \times \log_{25} 27 \times \log_{8} 625 = ?$

بازنویسی: $\log_{8} 16 \times \log_{9} 27 \times \log_{25} 625 \Rightarrow \log_{2^3} 2^4 \times \log_{3^2} 3^3 \times \log_{5^2} 5^4 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{2} = 4$

تست ها:

① دامنه تابع $f(x)=\log_{1-x}(4-x^2)$ کدام بازه است.

1) $(-2,1)$
2✓) $(-2,1)-\{0\}$
3) $(-2,2)$
4) $(-2,2)-\{0\}$

نکته: بهترین روش برای حل تست های مربوط به دامنه استفاده از رد گزینه است.

مبنا >0

مبنا $\neq 0 \longrightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1 \longrightarrow$ مبنا صفر شد پس در دامنه نیست

مبنا $\neq 1 \longrightarrow 1-x=1 \Rightarrow x=0 \longrightarrow$ مبنا یک می شد پس در دامنه نیست

② اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ باشد $\log_{4}(4a+1)$ کدام است.

$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$\log_{4}(4a+1) = \log_{4} 4 = 1$

1) صفر
2✓) 1
3) 2
4) 3

③ کدام گزینه صحیح است.

1✓) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} 100$
2) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{3} 2$
3) $\log_{5} 3 > \log_{3} 5$
4) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2$

حل گزینه ①: $\frac{1}{100} < 100 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 1$

این رابطه همیشه درست است

یادآوری: if $\boxed{a>1} \longrightarrow$ با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض نمی شود

if $\boxed{0<a<1} \longrightarrow$ با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض می شود.

③ حاصل هریک از عبارات زیر را بدست آورید.

$* \log_{\sqrt[3]{16}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_{2^{\frac{4}{3}}} 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{8}$

$* \log_{2\sqrt{2}} 32 = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{5} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$

$* \log_{\frac{1}{125}} \sqrt[3]{25} = \log_{5^{-3}} 5^{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{-3} = -\frac{1}{3}$

$* \log_{\sqrt[5]{27^6}} \sqrt[7]{81^8} = \log_{\sqrt[5]{3^{18}}} \sqrt[7]{3^{32}} = \log_{3^{\frac{18}{5}}} 3^{\frac{32}{7}} = \frac{\frac{32}{7}}{\frac{18}{5}} = \frac{80}{93}$

$* \log_{x\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} = \log_{x \times x^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\sqrt{x^4 \times x}} = \log_{x^{\frac{4}{3}}} \sqrt[6]{x^5} = \log_{x^{\frac{4}{3}}} x^{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{8}$

$* (\sqrt{5})^{\log_{3\sqrt{3}} 27} = (\sqrt{5})^{\log_{3^{\frac{3}{2}}} 3^3} = (\sqrt{5})^2 = 5$

$* \log_6 30 + \log_6 42 - \log_6 35 =$

$\log_6 \frac{30 \times 42}{35} = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

روش کار: در چنین حالت هایی که با حاصل جمع و تفریق چند لگاریتم مواجه هستیم برای تبدیل چند لگاریتم به یک لگاریتم داریم:

⊕ را به ضرب و ⊖ را به تقسیم تبدیل می‌کنیم.

$* 2\log_3 5 + \log_3 18 - \log_3 75 - \log_3 6 = \log_3 \frac{5^2 \times 18}{75 \times 6} = \log_3 1 =$ صفر

$* 32^{\log_8 7} = 7^{\log_8 32} = 7^{\log_{2^3} 2^5} = 7^{\frac{5}{3}} = 7^{\frac{3}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} = 7\sqrt[3]{49}$

یادآوری: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$* 9^{2+3\log_3 2} = 9^2 \times 9^{3\log_3 2} = 9^2 \times 9^{\log_3 8} = 9^2 \times 8^{\log_3 9} = 9^2 \times 8^2 = 5184$

$* \text{if } \log_a 9 = -\frac{1}{2} \longrightarrow$ حاصل $\log_3 \frac{3}{a} = ?$

یادآوری: $\log_b a = A$

$\log_a b = \frac{1}{A}$

$\log_3 \frac{3}{a} = \log_3 3 - \log_3 a \Rightarrow 1 - \log_3 a \Rightarrow 1 - (-4) = 5$ جواب

$\log_a 9 = \log_a 3^2 = 2\log_a 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_a 3 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \log_3 a = -4$

$* \; 5^{(2\log_5^2 + 3\log_5^3)} = 5^{(\log_5^4 + \log_5^{27})} = 5^{\log_5^{108}} = 108^{\log_5^5} = 108$

$* \; \log^2 + \log^{\frac{3}{2}} + \log^{\frac{4}{3}} + \cdots + \log^{\frac{1000}{999}} = \log^{(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{1000}{999})} = \log^{1000} = 3$

نکته: $\log^{10} = 1$ ، $\log^{100} = 2$ ، $\log^{1000} = 3$ و ...

$\log^{0/1} = -1$ ، $\log^{0/01} = -2$ ، $\log^{0/001} = -3$

$* \; \log_n^{\frac{1}{2}} + \log_n^{\frac{2}{3}} + \log_n^{\frac{3}{4}} + \cdots + \log_n^{\frac{n-1}{n}} = \log_n^{(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n})}$

$= \log_n^{\frac{1}{n}} = \log_n^{n^{-1}} = -1$

$* \; \log^2 + \log^{\frac{3}{2}} + \log^{\frac{4}{3}} + \log^{\frac{5}{4}} = ? \quad \text{if } \log^2 = a$

$\log^{(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4})} = \log^5 = 1 - \log^2 = 1 - a$

نکته: $\log^5 = 1 - \log^2$

$\log^2 = 1 - \log^5$

$* \; \log_3^2 = a \longrightarrow \log_{24}^{12} = ?$

روش حل: در چنین تست های از تغییر مبنا استفاده می کنیم.

$\log_{24}^{12} = \dfrac{\log_3^{12}}{\log_3^{24}} = \dfrac{\log_3^3 + \log_3^4}{\log_3^3 + \log_3^8} = \dfrac{1 - \log_3^2}{1 + 3\log_3^2} = \dfrac{1+2a}{1+3a}$

$* \; \log^3 = a \longrightarrow \log_{45}^{75} = ?$

$\log_{45}^{75} = \dfrac{\log_5^{75}}{\log_5^{45}} = \dfrac{\log_5^{25 \times 3}}{\log_5^{5 \times 9}} = \dfrac{\log_5^{25} + \log_5^3}{\log_5^5 + \log_5^9} = \dfrac{2 + \log_5^3}{1 + 2\log_5^3} = \dfrac{2+a}{1+2a}$

$* \; \log^2 = k \longrightarrow \log^{(6-2\sqrt{5})} + 2\log^{(1+\sqrt{5})} = ?$

$\log^{(6-2\sqrt{5})} + \log^{(1+\sqrt{5})^2} = \log^{6-2\sqrt{25}} + \log^{6+2\sqrt{5}} = \log^{(36-20)} = \log^{16}$ (اتحاد مزدوج)

$= \log^{2^4} = 4\log^2 = 4k$

$* \; \log_2^{\sqrt[5]{e^2}} = A \longrightarrow \log_{\sqrt{e}}^{32} = ? \quad \log_{\sqrt{e}}^{32} = \log_{e^{\frac{1}{2}}}^{2^5} = 10\log_e^2 \Rightarrow 10 \times \frac{2A}{5} = \frac{4}{A}$

$\log_2^{e^{\frac{2}{5}}} = A \Rightarrow \frac{2}{5}\log_2^e = A \Rightarrow \log_2^e = \frac{5A}{2} \Rightarrow \log_e^2 = \frac{2A}{5}$

* $\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ \times \ldots \times \log \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ = ?$ صفر

در این وسط داریم

$\log \tan 45^\circ = \log 1 =$ صفر

* $\log \tan 10^\circ + \log \tan 20^\circ + \log \tan 70^\circ + \log \tan 80^\circ =$

$\log(\tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \tan 70^\circ \times \tan 80^\circ) = \log^{1\times 1} = \log 1 =$ صفر

نکته: هرگاه دو زاویه متمم هم باشند

$\alpha + \beta = 90$

$\Downarrow$

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$

* $\log \cot 1^\circ + \log \cot 2^\circ + \ldots + \log \cot 89^\circ = ?$

$\log(\cot 1^\circ \times \cot 2^\circ \times \cot 3^\circ \times \ldots \times \cot 89^\circ) = \log 1 =$ صفر

نکته:

$\boxed{\begin{array}{l} \tan 1 \times \tan 2^\circ \times \ldots \times \tan 89 = 1 \\ \cot 1 \times \cot 2 \times \ldots \times \cot 89 = 1 \end{array}}$

* $\dfrac{1}{1+\underbrace{\log_3 2}_{a}} + \dfrac{1}{1+\underbrace{\log_2 3}_{\frac{1}{a}}} = ?\quad \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a}} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{a}{1+a} = \dfrac{1+a}{1+a} = 1$

سوال: حاصل مشتق و انتگرال عبارت $\underbrace{2^{2-\log_4 x}}_{f(x)}$ کدام است

$f(x) = \dfrac{2^2}{2^{\log_4 x}} = \dfrac{4}{x^{\log_4 2}} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

$\int f(x)dx = 4 \times 2\sqrt{x} + c = \boxed{8\sqrt{x} + c}$

$f'(x) = 4 \times -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{x^3}}$

(۲) از دو معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2+y^2=46$ لگاریتم $x+y$ بر مبنای ۴ کدام است؟

۱) ۱٫۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۲٫۵

$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy = 2 \iff xy = 3^2 = 9$

$x^2+y^2 = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2(9) = 46$

$\Rightarrow (x+y)^2 = 64 \Rightarrow x+y = 8$

$\log_4^{x+y} = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

یادآوری: $\log_m a + \log_m b + \ldots = \log_m ab$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

③ اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد آنگاه لگاریتم (a^3+7) در پایه‌ی ۸ کدام است.

$$\log^{a}_{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\Rightarrow a=(\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\xrightarrow{\text{طرفین توان ۳}}a^3=(\sqrt{3})^{\frac{4}{3}\times 3}\Rightarrow a^3=9$$

$$\log^{a^3+7}_{8}=\log^{9+7}_{8}=\log^{16}_{8}=\log^{2^4}_{2^3}=\frac{4}{3}$$

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{19}{24}$
۴) $\frac{7}{4}$

③ اگر لگاریتم $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد آنگاه لگاریتم $(\frac{1}{A}-1)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟

$$\log^{2\sqrt[3]{0/25}}_{8}=A\longrightarrow\log^{2\times 2^{-\frac{2}{3}}}_{8}=\log^{2^{\frac{1}{3}}}_{8}=\log^{2^{\frac{1}{3}}}_{2^3}=\frac{1}{9}=A$$

$$\log^{\frac{1}{A}-1}_{4}=\log^{\frac{1}{\frac{1}{9}}-1}_{4}=\log^{9-1}_{4}=\log^{8}_{4}=\log^{2^3}_{2^2}=\frac{3}{2}$$

۱) -2
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

③ اگر $\log^{3}_{12}=a$ باشد حاصل $\log^{2}_{3}\times\log^{3}_{4}\times\ldots\times\log^{26}_{27}$ برابراست با:

$$\log^{2}_{3}\times\log^{3}_{4}\times\ldots\times\log^{26}_{27}=\log^{2}_{27}\Rightarrow\log^{2}_{27}=\log^{2}_{3^3}=\frac{1}{3}\log^{2}_{3}$$

$$\log^{3}_{12}=a\longrightarrow\log^{12}_{3}=\frac{1}{a}\Rightarrow\log^{3\times 4}_{3}=\log^{3}_{3}+\log^{2^2}_{3}$$

$$=1+2\log^{2}_{3}=\frac{1}{a}\Rightarrow\log^{2}_{3}=\frac{\left(\frac{1}{a}-1\right)}{2}\Rightarrow\log^{2}_{3}=\frac{1-a}{2a}$$

جواب تست $\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{1-a}{2a}=\frac{1-a}{6a}$

۱) $\frac{1}{6a}$
۲) $\frac{1-a}{6a}$
۳) $\frac{1-a}{3a}$
۴) $\frac{1}{3a}$

* $$\frac{\log^{x}}{\log^{x}_{25}}+\frac{\log^{x}}{\log^{x}_{4}}=?\rightsquigarrow\frac{\log^{x}}{\frac{\log^{x}}{\log^{25}}}+\frac{\log^{x}}{\frac{\log^{x}}{\log^{25}}}$$

یادآوری: $\log^{a}_{b}=\frac{\log^{a}}{\log^{b}}$

$$\Rightarrow\log^{25}+\log^{4}=\log^{100}=②$$

* $$\frac{1}{\log^{2}_{12}}-\frac{1}{\log^{2}_{3}}=?\rightsquigarrow\log^{12}_{2}-\log^{3}_{2}=\log^{\frac{12}{3}}_{2}=\log^{4}_{2}=\log^{2^2}_{2}=②$$

یادآوری: $\frac{1}{\log^{b}_{a}}=\log^{a}_{b}$

* $3^{2+\log_3^5}=?\quad 3^2\times3^{\log_3^5}\longrightarrow 9\times5^{\log_3^3}=9\times5=45$

* if $\log_b^a=\frac{5}{6}\longrightarrow\log_{\sqrt b}^{ab^2}=?$

$\log_{\sqrt b}^{ab^2}=\log_{\sqrt b}^{a}+\log_{\sqrt b}^{b^2}=\frac{1}{\frac12}\log_b^a+\frac{2}{\frac12}\log_b^b=2\log_b^a+4$

$\Rightarrow 2\times\frac56+4=\frac53+4=\frac{17}{3}$

* $\log_a^{3\sqrt3}=\frac34\longrightarrow\log_4^{(a-1)}=?$

طرق حل: در چنین مواردی طرفین را به توان عکس توان a می‌رسانیم.

$a^{\frac34}=3\sqrt3=3^{\frac32}\longrightarrow a^{\frac34}=3^{\frac32}\xrightarrow[\frac43]{\text{طرفین به توان}}a^{\frac34\times\frac43}=3^{\frac32\times\frac43}\longrightarrow a=9$

$\log_4^{9-1}=\log_4^{8}=\log_{2^2}^{2^3}=\frac32$

* $6^{(\log_4^3\times\log_5^4\times\log_6^5)}=?\rightsquigarrow 6^{\log_6^3}=3$

جواب

* if $A=\sqrt7(\log_7^{27}+\log_7^{3})\longrightarrow$

① $\log_4^{(A+7)}=?\quad\log_4^{9+7}=\log_4^{16}=2$

② $A+5=?\quad 9+5=14$

$A=7^{\frac12(\log_7^{81})}=7^{\log_7^{\sqrt{81}}}=7^{\log_7^{9}}=9$

* $\frac{\log^2+\log^3+\log^4}{\log^2+\frac12\log^6}=?\longrightarrow\frac{\log^{24}}{\log^{\sqrt4}+\log^{\sqrt6}}=\frac{\log^{24}}{\log^{\sqrt{24}}}=\frac{1}{\frac12}=2$

معادلات لگاریتمی

$$\log_a^A = \log_a^B \longrightarrow A = B$$

برای حل معادلات لگاریتمی طرفین مساوی را به دو لگاریتم با مبنای یکسان تبدیل می کنیم و سپس آنتی لگاریتم ها را مساوی با هم قرار می دهیم.

نکته: در حل تشریحی یادگرفتیم ابتدا باید دامنه ی توابع لگاریتمی طرفین مساوی را بدست آوریم. اما در حل تستی کافیست جواب ها را بدست آوریم (بدون نیاز به بررسی دامنه) سپس جواب ها را چک کنیم تا آنتی و مبنا را صفر یا منفی نکند و مبنی را برابر 1 نکند.

$$* \log_2^{(x-1)} + \log_2^{(x+3)} = 5$$

$$\log_2^{(x-1)(x+3)} = \log_2^{x^2+2x-3} = 5 \Rightarrow x^2+2x-3 = 2^5 = 32$$

$$x^2+2x-35=0$$

$$\begin{matrix} S=-2 \\ P=-35 \end{matrix} \left\} \begin{matrix} x_1 = -7 & \text{غ ق ق} \\ x_2 = 5 & \text{ق ق} \end{matrix} \right.$$

این معادله دارای یک جواب می باشد.

* $\log_3 (x+2) - \log_3 (x-4) = 1$

$\log_3 \frac{x+2}{x-4} = 1 \Rightarrow 3^1 = \frac{x+2}{x-4} \Rightarrow 3x-12 = x+2$

$2x = 14 \Rightarrow x = 7$ ق ق

* $\log_2 (x+2) + \log_2 (x-2) = \log_2 (2x+4) + \cancel{1}\ \log_2 2$

$\log_2 (x+2)(x-2) = \log_2 2(2x+4) \Rightarrow x^2-4 = 4x+8 \Rightarrow$

$x^2-4x-12=0$

$\left.\begin{matrix} S=4 \\ P=-12 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 & \text{ق ق} \\ x_2 = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

این معادله دارای یک جواب است.

* $\log_4 x + \log_2 x + \log_8 x^3 = 10$

$\frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x + \frac{3}{3} \log_2 x = 10 \Rightarrow \frac{5}{2} \log_2 x = 10 \Rightarrow \log_2 x = 4 \to x = 2^4 = 16$ ق ق

* $\log_5 (x+3) = 2 \log_5 (x+1) \Rightarrow \log_5 (x+3) = \log_5 (x+1)^2 \Rightarrow x+3 = (x+1)^2$

$\Rightarrow x+3 = x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 & \text{ق ق} \\ x_2 = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

سوال: اگر فرم معادله به شکل زیر بود جواب چی میشد؟

$\log_5 (x+3) = \log_5 (x+1)^2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \text{ق ق} \\ x_1 = -2 & \text{ق ق} \end{cases}$

* $\log_4 x + \log_x 8 = \frac{7}{2}$ $\qquad \log_2 x = a$

$\frac{1}{2} \underbrace{\log_2 x}_{a} + \frac{3}{1} \underbrace{\log_x 2}_{\frac{1}{a}} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} a + 3 \times \frac{1}{a} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{a^2+6}{2a} = \frac{7}{2} \Rightarrow$

$a^2 - 7a + 6 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0}$

$\begin{cases} a = 1 \rightarrow \boxed{x = 2} & \text{ق ق} \\ a = 6 \rightarrow \boxed{x = 64} & \text{ق ق} \end{cases}$

این معادله دارای دو ریشه میباشد.

* مجموع جواب ها $64+2=66$

* $\log_3 (x^2-1) = \cancel{1} + \log_3 (x+3) \longrightarrow \log_4 (x-3) = ?$

$\underset{\log_3 3}{}$

$\log_3 (x^2-1) = \log_3 (3x+9) \Rightarrow x^2-1 = 3x+9 \Rightarrow x^2-3x-10=0 \begin{cases} x_1 = 5 & \text{ق ق} \\ x_2 = -2 & \text{ق ق} \end{cases}$

$\log_4 (x-3) = \log_4 (5-3) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$

جواب

$x=-2$
آنتی لاگش می‌کنه

* $\log (2x-1) + \log (x+3) = \log 30 - \log 2 \longrightarrow \log_8 x = ?$

$\log (2x^2+5x-3) = \log 15 \Rightarrow 2x^2+5x-3=15 \Rightarrow 2x^2+5x-18=0$

$\Delta = b^2-4ac = 25+144 = 169$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 13}{4} \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} & \text{غ ق ق} \\ x_2 = 2 & \text{ق ق} \end{cases}$

$\log_8 x = \log_8 2 = \frac{1}{3}$

جواب

* $x^{(\log x - 1)} = 100$

درضمن تست هایی که x هم تو توان هم تو پایه باشه
نکته: از طرفین در مبنای داده شده لگاریتم می‌گیریم

$\log x^{(\log x - 1)} = \log 100$

$(\underbrace{\log x}_{a} - 1) \log x = 2 \Rightarrow (a-1)a = 2 \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2-a-2=0$

$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$

$a = \log x$: $\xrightarrow{\text{if } a=-1} x = 0.1$ ق ق ، $\xrightarrow{\text{if } a=2} x = 100$ ق ق

* $x^{(\log_2^x +1)} = 64$

از طرفین در مبنای ۲ لگ می‌گیریم

$\log_2 x^{(\log_2^x +1)} = \log_2^{64} \Rightarrow (\underbrace{\log_2^x}_{a} +1)(\underbrace{\log_2^x}_{a}) = 6$

$(a+1)(a) = 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$

$\log_2^x = a$ $\xrightarrow{if\ a=2}$ $x = 4$ ق ق

$\xrightarrow{if\ a=-3}$ $x = \frac{1}{8}$ ق ق

* $\underbrace{\sqrt{\log^x}}_{a} - 3\underbrace{\log^x}_{a^2} + 2 = 0 \Rightarrow -3a^2 + a + 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$a = \sqrt{\log^x}$ → ۱ ق ق ⟶ $\log^x = 1^2 = 1 \Rightarrow x = 10$ ق ق

→ $-\frac{2}{3}$ غ ق ق

*

*جواب معادله $\underbrace{\log_{\cos x}^{\sin x}}_{a} + \underbrace{\log_{\sin x}^{\cos x}}_{\frac{1}{a}} = 2$ کدام است.

۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲) $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$

۳) ✓ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۴) $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$

$a + \frac{1}{a} = 2 \longrightarrow \frac{a^2+1}{a} = 2$

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$

$a = \log_{\cos x}^{\sin x} = 1 \Rightarrow \cos x^1 = \sin x \xrightarrow[\cos x]{\text{طرفین تقسیم بر}}$

$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

*

نامعادله لگاریتمی

سوال: مجموعه‌ی نامعادله‌ی $\log \frac{x+3}{5} < -1$ کدام است.

$-1 = \log 0/1$

$$\log \frac{x+3}{5} < \log 0/1$$

مبنا $a>1 \longrightarrow \frac{x+3}{5} < \frac{1}{10} \Rightarrow x+3 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$ (1)

(2)

$$\frac{x+3}{5} > 0 \longrightarrow x > -3$$

اشتراک $\Rightarrow -3 < x < -\frac{5}{2}$

جواب نامعادله لگاریتم

مثال: اگر $\log 3 = 0/4771$ باشد عدد 9^{500} چند رقمی است.

$$\log 9^{500} = \log 3^{1000} = 1000 \log 3 = 1000 \times 0/4771 = 477/1$$

جواب $= [477/1] + 1 = 477 + 1 = 478$ رقمی

نکته: if $A>1 \longrightarrow [\log A] =$ تعداد ارقام A -1

if $0<A<1 \longrightarrow [\log A] = -$(تعداد صفر بعد از ممیز) -1

مثال: $[\log 523] = 3-1 = 2$

$$[\log 0/0009] = -3-1 = -4$$

جزء صحیح لگاریتم در پایه‌ی غیر از 10 $[\log_a x]$

مثال: $[\log_5 234] = 5^3 < 234 < 5^4$ $\xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از طرفین}}$ $\log_5 5^3 < \log_5 234 < \log_5 5^4$

$$\Rightarrow 3 < \log_5 234 < 4$$

$$[\log_5 234] = 3$$

$$\ast\ [\log_4 2] + [\log_2 6] = ? \qquad 2 + 0 = 2$$

جواب

$$4^0 < 2 < 4^1 \xrightarrow{\text{تبدیل}} 0 < \log_4 2 < \log_4 4 \Rightarrow [\log_4 2] = 0$$

$$[\log_2 6] \Rightarrow 2^2 < 6 < 2^3 \xrightarrow{\text{تبدیل}} \log_2 2^2 < \log_2 6 < \log_2 2^3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2$$

$$\ast\ [\log_{\frac{1}{5}} 234] = ? \qquad \log_{\frac{1}{5}} 234 = -\log_5 234$$

$$3 < \log_5 234 < 4 \xrightarrow{\times(-1)} -4 < -\log_5 234 < -3 \Rightarrow [\log_{\frac{1}{5}} 234] = -4$$