کلاس نکته و تست ریاضیات –تهران وسراسر کشور

مشاوره ی انگیزشی ، برنامه ریزی،نحوه ی مطالعه دروس،نحوه ی تست زدن و....

کلاس های ریاضی : حضوری و آنلاین خصوصی،گروهی

دی وی دی های ریاضی مفهومی + تکنیکی

جزوات و کتاب های برتر آموزشی کنکور

همین الان تماس بگیرید (درصورت پاسخ ندادن پیامک دهید)

0938-335-0983

www.Riazi100.ir

حسابان

فصل ۴

❖ **اگر a عددی حقیقی و δ یک عدد مثبت باشد، بازه‌ی $(a-\delta,a+\delta)$ را یک همسایگی a می‌نامند (a مرکز و δ شعاع همسایگی نام دارند). اگر a را از این همسایگی حذف کنیم، آن را یک همسایگی محذوف a می‌نامند.**

مثال: هر یک از بازه‌های $(۱,۳)$، $(۰,۴)$ و $(۱/۹,۲/۱)$ یک همسایگی ۲ هستند.

مثال: هر یک از مجموعه‌های $(۱,۳)-\{۲\}$، $(۰,۲)\cup(۲,۴)$ و $\{x|\ \ ۱/۹<x<۲/۱,\ x\neq ۲)\}$ یک همسایگی محذوف ۲ هستند.

مثال: اگر $(۳k-۲,k+۴)$ یک همسایگی ۳ باشد، a و δ را به دست آورید.

حل:

عدد ۳ نقطه‌ی وسط بازه است، پس

$$۳=\frac{(۳k-۲)+(k+۴)}{۲}\Rightarrow ۴k+۲=۶\Rightarrow k=۱$$

بنابراین همسایگی به صورت $(۱,۵)$ در می‌آید و $a=\frac{۱+۵}{۲}=۳$ و $\delta=۳-۱=۲$.

مثال: اگر مجموعه‌ی $(۲,x^۲+۱)\cup(-۳,y)$ نمایشگر یک همسایگی محذوف باشد، حاصل $۳x^۲+y$ را به دست آورید؟

حل:

ابتدا طوری دو بازه را می‌نویسیم که اعداد از کوچک به بزرگ مرتب شوند و داریم $y=۲$. چون همسایگی محذوف ۲ است، باید:

$$۲=\frac{-۳+x^۲+۱}{۲}\ \Rightarrow\ x^۲-۲=۴\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{۶}$$

بنابراین داریم:

$$۳x^۲+y=۳(\pm\sqrt{۶})^۲+۲=۲۰$$

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی محذوف a را نمایش می‌دهند؟

الف) $\left\{x\in\Re\middle|\ ۰<|x-a|<\delta\right\}$ ب) $\left\{x\in\Re\middle|\ |x-a|<\delta\right\}$

حل: الف)

$$۰<|x-a|<\delta\Rightarrow\begin{cases}|x-a|<\delta\\|x-a|\neq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\delta<x-a<\delta\\x-a\neq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-\delta<x<a+\delta\\x\neq a\end{cases}$$
$$\Rightarrow x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$$

بنابراین یک همسایگی محذوف a را نمایش می‌دهد.

ب)

$$|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$$

بنابراین یک همسایگی a هست ولی همسایگی محذوف a نیست.

تمرین:

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی را نمایش می‌دهند. مرکز، شعاع و نوع آن را مشخص کنید؟

الف) $\{x : |x-۲|<۳\}$

ب) $\{x : |x-۲|\leq ۳\}$

ج) $\{x:\ |x-۱|>۴\}$

د) $\left\{x:\ \frac{۱}{|x|}<۲\right\}$

هـ) $\left\{x:\ \frac{۱}{|x|}>۲\right\}$

و) $\left\{x:\ \frac{۳-x}{x-۲}>۰\right\}$

ز) $\{x : \sin^{-۱} x \in \Re\}$

همسایگی چپ و راست یک نقطه

❖ **اگر a عددی حقیقی و δ یک عدد مثبت باشد، بازه به صورت $(a-\delta,a)$ را یک همسایگی چپ a و بازه به صورت $(a,a+\delta)$ را یک همسایگی راست a می‌نامیم.**

مثال: هر یک از بازه‌های $(۳,۳/۱)$ و $(۳,۴)$ و $(۳,۵)$ یک همسایگی راست ۳ و هر یک از بازه‌های $(۲/۹,۳)$ و $(۲,۳)$ و $(-۱,۳)$ یک همسایگی چپ ۳ هستند.

مثال: همسایگی $(۳,۴)\cup(۲,۳)$ در واقع از اجتماع یک همسایگی چپ ۳ یعنی $(۲,۳)$ و یک همسایگی راست ۳ یعنی $(۳,۴)$ تشکیل شده است.

تمرین:

۱- آیا مجموعه‌های زیر یک همسایگی راست ۲ هستند؟

الف) $(۲,\sqrt{۵})$

ب) $(۲,\pi)$

ج) $(\sqrt{۵},\sqrt{۷})$

۲- آیا مجموعه‌های زیر یک همسایگی چپ ۱- هستند؟

الف) $(-\frac{\pi}{۳},-۱)$

ب) $[-۲,-۱)$

ج) $(-۳,-۱]$

❖ **اگر I یک همسایگی نقطه‌ی a باشد، گوییم تابع f در همسایگی I تعریف شده است، هرگاه $I \subseteq D_f$.**

مثال: تابع $y=\sqrt{x}$ در کدام‌یک از همسایگی‌های زیر تعریف شده است.

الف) $(۲,۳)$ ب) $(۰,۴)$

ج) $(-۲,۱)$ د) $(-۱,-۳)$

حل:

می‌دانیم $D_f=[۰,+\infty)$ پس داریم:

الف) $(۲,۳)\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(۲,۳)$ تعریف شده است.

ب) $(۰,۴)\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(۰,۴)$ تعریف شده است.

ج) $(-۲,۱)\not\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(-۲,۱)$ تعریف نشده است.

د) $(-۱,-۳)\not\subseteq D_f$ پس تابع در همسایگی $(-۱,-۳)$ تعریف نشده است.

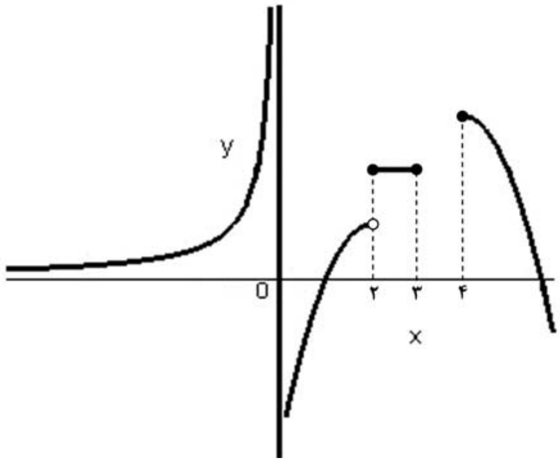
مثال: تابع $y=\sqrt{x-۱}$ در کدام‌یک از همسایگی‌های عدد یک تعریف شده است.

الف) $(۱,۱+\delta)$ ب) $(۱-\delta,۱+\delta)$ ج) $(۱-\delta,۱)$

حل:

می‌دانیم $D_f=[۱,+\infty)$ پس δ هر عدد مثبتی که باشد تابع در همسایگی $(۱,۱+\delta)$ تعریف شده است. ولی به ازای هیچ مقدار مثبتی از δ در همسایگی‌های $(۱-\delta,۱+\delta)$ و $(۱-\delta,۱)$ تعریف نشده است.

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار مشخص کنید تابع f در کدام‌یک از همسایگی‌های زیر تعریف شده است.



الف) $(-۳,-۱)$ ب) $(-۲,۲)$

ج) $(۱,۲)$ د) $(۰,۳)$

هـ) $(۰,۷)$ و) $(۳,۴)$

ز) $(۲,۳)$

حل:

با توجه به شکل داریم:

$$D_f = (-\infty,۰)\cup(۰,۳]\cup[۴,+\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی‌های $(-۳,-۱)$، $(۱,۲)$، $(۰,۳)$ و $(۲,۳)$ تعریف شده ولی در همسایگی‌های $(-۲,۲)$، $(۰,۷)$ و $(۳,۴)$ تعریف نشده است.

تمرین:

بررسی کنید آیا تابع f در همسایگی داده شده تعریف شده است؟

الف) $(-۱,۱)$, $f(x)=\sin^{-1}x$

ب) $(-۳,۳)$, $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$

ج) $(-\pi,\pi)$, $f(x)=\tan^{-1}x$

د) $(-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳})$, $f(x)=\cos^{-1}x$

هـ) $(۰,۲)$, $f(x)=\frac{۲}{[x]-۱}$

و) $(۰,۲)$, $f(x)=\log_{۰/۱}^{x}$

ز) $(۰,۳)$, $f(x)=\log_{x}^{۳}$

❖ **وقتی می‌گوییم متغیر مستقل x به عدد ثابت a نزدیک می‌شود. یعنی هر اندازه که بخواهیم متغیر x به a نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه مساوی a نمی‌شود. به بیان دیگر به ازای هر عدد دلخواه و مثبت مانند ε داریم:**

$$۰<|x-a|<\varepsilon$$

مثال: با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد ۲ نمایش دهید.

حل:

... ۱/۹ ... ۱/۹۹ ... ۱/۹۹۹ ...	۲	... ۲/۰۰۱ ... ۲/۰۱ ... ۲/۱ ...

مثال: با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد ثابت ۲- نمایش دهید.

... −۲/۱ ... −۲/۰۱ ... −۲/۰۰۱ ...	−۲	... −۱/۹۹۹ ... −۱/۹۹ ... −۱/۹ ...

تمرین:

۱- اگر به ازای هر $\varepsilon>۰$، متغیر x در نامساوی $۰<|x-۲|<\varepsilon$ صدق کند متغیر x به چه عددی نزدیک شده است.

۲- با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن، مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد $-\frac{۱}{۳}$ نمایش دهید.

۳- با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن، مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد $\sqrt{۲}$ نمایش دهید.

❖ **برای یک تابع f اگر مقادیر متغیر مستقل x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقادیر $f(x)$ به عددی مانند l نزدیک می‌شوند (ممکن است مساوی l هم بشوند)، گوییم تابع f در نقطه‌ی a حد دارد و حد آن برابر l است و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

مثال: با رسم یک جدول، حاصل حد تابع $f(x)=۲x+۳$ را در $x=۵$ محاسبه کنید.

حل:

x	... ۴/۹ ... ۴/۹۹ ... ۴/۹۹۹ ...	۵	... ۵/۰۰۱ ... ۵/۰۱ ... ۵/۱ ...
$f(x)$	... ۱۲/۸ ... ۱۲/۹۸ ... ۱۲/۹۹۸ ...	۱۳	... ۱۳/۰۰۲ ... ۱۳/۰۲ ... ۱۳/۲ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر متغیر x به عدد ۵، مقادیر تابع f به عدد ۱۳ نزدیک می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x\to ۵}(۲x+۳)=۱۳$$

توجه: تابع f در $x=۵$ تعریف شده است و $f(۵)=۱۳$ می‌باشد.

مثال: با رسم یک جدول، حاصل حد تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ را در $x=۲$ محاسبه کنید.

حل:

x	... ۱/۹ ... ۱/۹۹ ... ۱/۹۹۹ ...	۲	... ۲/۰۰۱ ... ۲/۰۱ ... ۲/۱ ...
$f(x)$	... ۳/۹ ... ۳/۹۹ ... ۳/۹۹۹ ...	؟	... ۴/۰۰۱ ... ۴/۰۱ ... ۴/۱ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن مقادیر متغیر x به عدد ۲، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=۴$$

توجه: تابع f در $x=۲$ تعریف نشده است ولی حد دارد.

مثال: با رسم یک جدول، رفتار تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ را وقتی متغیر x به عدد یک نزدیک می‌شود، بررسی کنید.

حل:

x	... ۰/۹ ... ۰/۹۹ ... ۰/۹۹۹ ...	۱	... ۱/۰۰۱ ... ۱/۰۱ ... ۱/۱ ...
$f(x)$	... $-$۱۰ ... $-$۱۰۰ ... $-$۱۰۰۰ ...	؟	... ۱۰۰۰ ... ۱۰۰ ... ۱۰ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود، وقتی متغیر x به عدد یک نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند و از نظر قدر مطلق مرتباً افزایش می‌یابند. بنابراین می‌گوییم تابع f در $x=1$ حد ندارد.

توجه: تابع f در $x=1$ نه تعریف شده و نه حد دارد.

تمرین:

با رسم جدول حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$ ب) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2}{x+3}$

ج) $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x$ د) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-3x+2}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 10}\log x$

❖ **شرط لازم برای آن که بتوان در مورد حد تابع f در $x=a$ صحبت کرد، آن است که تابع f دست کم در یک همسایگی a تعریف شده باشد.**

مثال: در کدام‌یک از توابع زیر، می‌توان از حد تابع f در نقطه‌ی داده شده، صحبت کرد.

الف) $f(x)=\frac{1}{[x]}$ ، $x=\frac{1}{2}$ ب) $f(x)=x-[x]$ ، $x=2$

ج) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<1 \\ 1-x & x>1 \end{cases}$ ، $x=1$

حل: الف)

با توجه به این که $D_f=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$، پس تابع f در هیچ همسایگی $\frac{1}{2}$ تعریف نشده است. یعنی نمی‌توان از حد تابع f در $x=\frac{1}{2}$ صحبت کرد.

ب)

با توجه به این که $D_f = \Re$، پس می‌توان در مورد حد تابع در $x = ۲$ صحبت کرد.

ج)

با توجه به این که $D_f = \Re - \{۱\}$، پس می‌توان وجود حد تابع در $x = ۲$ را بررسی کرد:

x	... ۰/۹ ... ۰/۹۹ ... ۰/۹۹۹ ...	۱	... ۱/۰۰۱ ... ۱/۰۱ ... ۱/۱ ...
$f(x)$	... $-۰/۱$ ... $-۰/۰۱$ ... $-۰/۰۰۱$ ...	؟	... $-۰/۰۰۱$ ... $-۰/۰۱$ ... $-۰/۱$ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود داریم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۰$$

توجه: تابع f در $x = ۱$ تعریف نشده است ولی حد دارد.

تمرین:

در کدام‌یک از توابع زیر، می‌توان در مورد وجود یا عدم وجود حد تابع در نقطه‌ی داده شده، صحبت کرد؟

الف) $x = ۲$ ، $f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۲}$

ب) $x = -۱$ ، $f(x) = \sqrt[۳]{x+۱}$

ج) $x = -۱$ ، $f(x) = \sqrt{x}$

د) $x = ۲$ ، $f(x) = \dfrac{۱}{|x-۱| + |x-۳|}$

هـ) $x = ۳$ ، $f(x) = \dfrac{۴}{[x] + [-x]}$

❖ **در تابع f اگر متغیر x با مقدارهای بزرگ‌تر از عدد a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند l نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول a حد راست دارد و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

مثال: با رسم جدول، اگر $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ حاصل $\lim_{x\to ۰^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل:

x		۰	... $-۰/۰۰۱$ ... $-۰/۰۱$ ... $-۰/۱$ ...
$f(x)$		؟	... ۱ ... ۱ ... ۱ ...

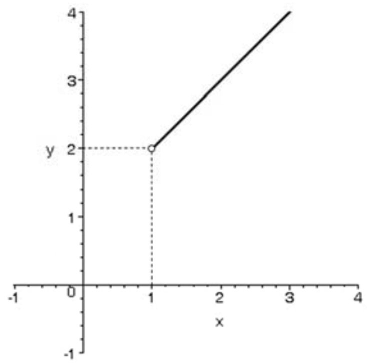
بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{x} = ۱$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}۳-x & x<۱\\ ۳ & x=۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ را با استفاده از رسم نمودار تابع محاسبه کنید.

حل:

نمودار تابع f در فاصله‌ی $(۱,+\infty)$ به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر x از طرف راست (مقادیر بزرگ‌تر از یک) به یک، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲$$

تمرین:

با استفاده از جدول یا نمودار، حد راست هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی خواسته شده محاسبه کنید.

الف) $x=-\frac{\pi}{۲}$, $f(x)=\cos x$

ب) $x=\pi$, $f(x)=\begin{cases}x-۱ & x<\pi\\ ۴ & x=\pi\\ ۲x & x>\pi\end{cases}$

ج) $x=۱$, $f(x)=\frac{x^۲+۲}{x+۱}$

د) $x=۴$, $f(x)=\log_۲^x$

هـ) $x=۲$, $f(x)=\sqrt[۳]{x+۷}$

و) $x=-۱$, $f(x)=\sin^{-۱} x$

ز) $x=-۱$, $f(x)=\cos^{-۱} x$

❖ **در تابع f اگر متغیر x با مقدارهای کوچک‌تر از عدد a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند k نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول a حد چپ دارد و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=k$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، با رسم جدول حاصل $\lim\limits_{x\to ٠^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل:

x	$\ldots -٠/١ \ldots -٠/٠١ \ldots -٠/٠٠١ \ldots$	٠	
$f(x)$	$\ldots -١ \ldots -١ \ldots -١ \ldots$	؟	

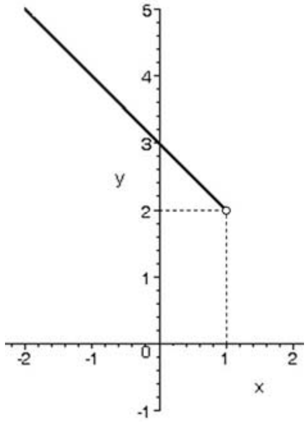
بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ٠^-} \frac{|x|}{x} = ١$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} ٣-x & x<١ \\ ٣ & x=١ \\ x+١ & x>١ \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ١^-} f(x)$ را با استفاده از رسم نمودار تابع محاسبه کنید.

حل:

نمودار تابع f در فاصله‌ی $(-\infty,١)$ به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر x از طرف چپ (مقادیر کوچک‌تر از یک) به یک، مقادیر $f(x)$ به عدد ٢ نزدیک می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ١^-} f(x) = ٢$$

تمرین:

با استفاده از جدول یا نمودار، حد چپ هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی خواسته شده در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $f(x)=x^٢-۴x \quad , x=٢$

ب) $f(x)=\begin{cases} x+١ & x<-١ \\ ٣ & x=-١ \\ x-١ & x>-١ \end{cases} \quad , x=-١$

ج) $f(x)=\frac{١}{[x]} \quad , x=٠$

د) $f(x)=\log x \quad , x=١٠$

هـ) $f(x)=\cos^{-١} x \quad , x=١$

و) $f(x)=\sin^{-١} x \quad , x=١$

ز) $x = ۳$, $f(x) = \dfrac{۹ - x^۲}{x - ۳}$ ح) $x = \dfrac{\pi}{۲}$, $f(x) = \sin x$

❖ **اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ای مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار حد چپ و راست در آن نقطه است.**

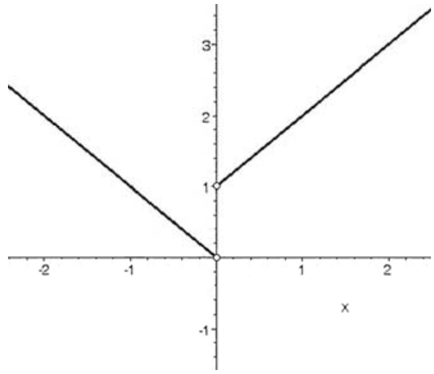
مثال: ابتدا نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس با استفاده از نمودار، حدهای چپ و راست و حد تابع را در صورت وجود در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

الف) $x = ۰$, $f(x) = \begin{cases} -x & x < ۰ \\ ۳ & x = ۰ \\ x + ۱ & x > ۰ \end{cases}$ ب) $x = ۱$, $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \neq ۱ \\ ۰ & x = ۱ \end{cases}$

ج) $x = ۲$, $f(x) = [x]$

حل: الف)

نمودار تابع به صورت زیر است.

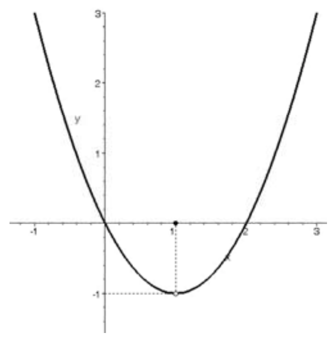


با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

ب)

نمودار تابع به صورت زیر است.

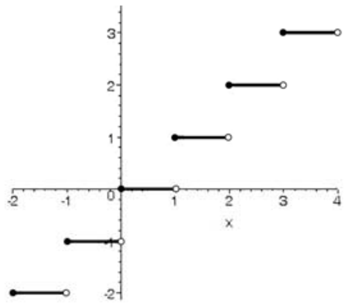


با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -۱$$

ج)

نمودار تابع به صورت زیر است.

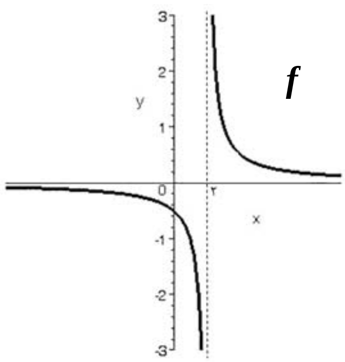


با توجه به نمودار داریم:

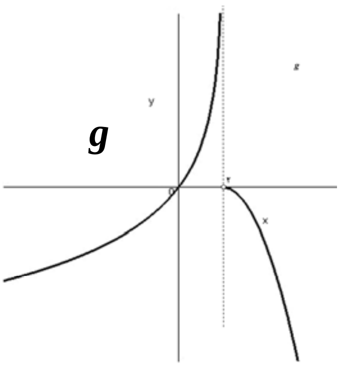
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

مثال: نمودار توابع f ، g و h به صورت زیر رسم شده است. با استفاده از نمودار، حد توابع f ، g و h را در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ محاسبه کنید.

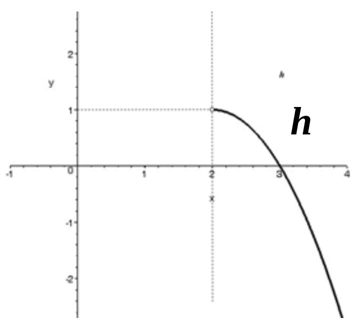
الف)



ب)



ج)



حل: الف)

با توجه به نمودار تابع در $x=۲$ از چپ حد ندارد و از راست نیز حد ندارد. بنابراین تابع در $x=۲$ حد ندارد.

ب)

تابع g در $x=۲$ از چپ حد ندارد ولی $\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=۰$. بنابراین g در $x=۲$ حد ندارد.

ج)

به دلیل عدم تعریف تابع h در یک همسایگی چپ ۲، بحث از وجود حد چپ در این نقطه معنادار نیست. در واقع منظور از حد تابع h در $x=۲$ همان حد راست تابع h در $x=۲$ است. یعنی:

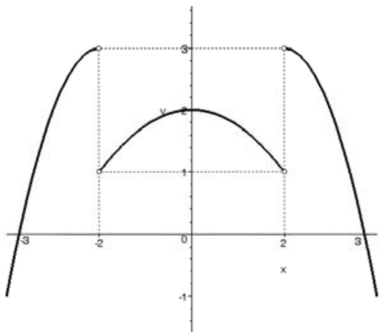
$$\lim_{x\to ۲} h(x)=۱$$

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x>۲ \\ ax+b & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ دارای حد باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x^۲+x)=۶ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(ax+b)=۲a+b \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a+b=۶ \Rightarrow b=۶-۲a$$

مثال: نمودار تابع زوج f به صورت زیر رسم شده است.



با توجه به نمودار، حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)$

حل:

با توجه به این که f تابعی زوج است، نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن است. بنابراین داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۰$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱$

تمرین:

۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲a & x\geq ۱ \\ ax-۱ & x<۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=-۱$ ، مقدار a را به دست آورید.

(سراسری ریاضی ۸۶)

۲- در تابع $f(x)=\begin{cases} -۱ & x\in Z \\ ۰ & x\in \Re-Z \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)+\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^{-}} f(x)$ چقدر است؟

(آزاد پزشکی ۸۱)

۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} (x+a)^{۲} & x\geq -۱ \\ ۲x+۱ & x<-۱ \end{cases}$ در $x=-۱$ حد دارد.

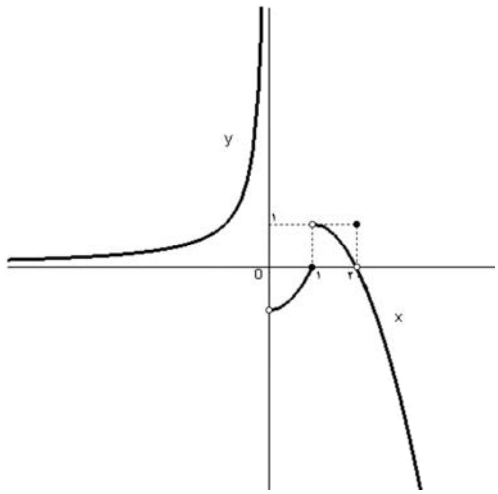
(سراسری تجربی ۸۰)

۴- در هر یک از قسمت‌های زیر با استفاده از نمودار یا جدول، حدود چپ و راست و حد تابع را در نقاط مشخص شده در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x & x<۰ \\ x+۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ $\quad x=۰,\ x=۱$

ب) $f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\leq ۱ \\ ۳ & ۱<x<۴ \\ x+۱ & x\geq ۴ \end{cases}$ $\quad x=۱,\ x=۴,\ x=\frac{\pi}{۲},\ x=\pi,\ x=۲\pi$

۵- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را در صورت امکان مشخص کنید.



$f(۰)=$ $\qquad$ $f(۱)=$ $\qquad$ $f(۲)=$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$

۶- اگر f تابعی فرد با دامنه‌ی $[-۳,۳]$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

۷- اگر f تابعی فرد با دامنه‌ی $(-۲,۲)$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۵$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

۸- اگر f تابعی زوج با دامنه‌ی $\Re$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۳$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

۹- اگر f تابعی زوج با دامنه‌ی $\Re$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=-۱$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۰- نمودار تابعی رسم کنید که دارای همه‌ی شرایط زیر باشد.

$D_f=[-۳,۲)$ $\quad , \quad$ $f(۰)=۴$ $\quad , \quad$ $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=۲$ $\quad , \quad$ $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=۳$ $\quad , \quad$ $f(-۱)=۲$

❖ تابع ثابت $f(x)=c$ در همه‌ی نقاط حد دارد و حد آن در همه‌ی نقاط c است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} c = c$$

❖ تابع $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه به طول a برابر a است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال:

الف) $\lim_{x\to ۳} ۲ = ۲$ ب) $\lim_{x\to \pi} ۲ = ۲$ ج) $\lim_{x\to \sqrt{۳}} ۲ = ۲$

د) $\lim_{x\to ۱} x = ۱$ هـ) $\lim_{x\to ۲} x = ۲$ و) $\lim_{x\to \sqrt{۲}} x = \sqrt{۲}$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} x$ ب) $\lim_{x\to (۱-\sqrt{۳})} x$ ج) $\lim_{x\to \frac{۱}{۵}} x$

د) $\lim_{x\to ۱} \pi$ هـ) $\lim_{x\to \sqrt{۵}} \pi\sqrt{۲}$ و) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}$

❖ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=k$، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+k$$
$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-k$$
$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\times g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x)=l\times k$$

❖ این قضایا را برای تعداد متناهی تابع نیز می‌توان تعمیم داد.

مثال:

الف) $\lim_{x\to ۳} ۲x=\lim_{x\to ۳}(x+x)=\lim_{x\to ۳} x+\lim_{x\to ۳} x=۳+۳=۶$

ب) $\lim_{x\to ۵}(۲x+۳)=\lim_{x\to ۵} ۲x+\lim_{x\to ۵} ۳=\lim_{x\to ۵} ۲\times \lim_{x\to ۵} x+\lim_{x\to ۵} ۳=۲\times ۵+۳=۱۳$

ج) $\lim_{x\to ۲} x^{۳}=\lim_{x\to ۲}(x\times x\times x)=\lim_{x\to ۲} x\times \lim_{x\to ۲} x\times \lim_{x\to ۲} x=۲\times ۲\times ۲=۸$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲}(x^{۲}-۳x+۴)$

ب) $\lim_{x\to ۴}(۱-۵x)(۲+۳x)$

ج) $\lim_{x\to ۲}(\frac{۲x-۳}{۵})(\frac{x-۱}{۲})$

د) $\lim_{x\to -۱}(\frac{x-۱}{۳})(x^{۲}-۳x+۷)$

❖ اگر $p(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۴}(۲x+۳)$

ب) $\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-۳x+۵)$

ج) $\lim_{x\to \sqrt{۲}}(x^{۳}+۲x^{۲}+x)$

د) $\lim_{x\to ۷}\frac{۱-۵x}{۳}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۴}(۲x+۳)=۲\times ۴+۳=۱۱$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-۳x+۵)=۱^{۲}-۳(۱)+۵=۳$$

ج)

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}}(x^{۳}+۲x^{۲}+x)=(\sqrt{۲})^{۳}+۲(\sqrt{۲})^{۲}+\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}+۴$$

د)

$$\lim_{x\to ۷}\frac{۱-۵x}{۳}=\lim_{x\to ۷}(-\frac{۵}{۳}x+\frac{۱}{۳})=-\frac{۵}{۳}(۷)+\frac{۱}{۳}=-\frac{۳۴}{۳}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲}(x^{۳}+۴x^{۲}-۵x+۶)$

ب) $\lim_{x\to ۴}\frac{(x+۱)^{۲}}{۳}$

ج) $\lim_{x\to -۲}(x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۵x^{۲}+۶)$

❖ اگر a عضوی از دامنه‌ی تابع باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad , \quad \lim_{x\to a} b^x = b^a$$

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \quad , \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰} \sqrt{x}$ ب) $\lim_{x\to ۰} \sqrt[۳]{x}$

ج) $\lim_{x\to ۸} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} - ۲)$ د) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x$

هـ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin^۲ x$ و) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (۲\sin x - ۳\cos x)$

ز) $\lim_{x\to -۲} ۳^x$ ح) $\lim_{x\to ۴} ۲^x$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt{x} = \sqrt{۰} = ۰$$

توجه: منظور از $\lim_{x\to ۰} \sqrt{x}$ در واقع $\lim_{x\to ۰^+} \sqrt{x}$ است. زیرا تابع $y = \sqrt{x}$ تنها در همسایگی راست صفر تعریف شده است.

ب)

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt[۳]{x} = \sqrt[۳]{۰} = ۰$$

ج)

$$\lim_{x\to ۸} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} - ۲) = \lim_{x\to ۸} \sqrt{x} + \lim_{x\to ۸} \sqrt[۳]{x} - \lim_{x\to ۸} ۲ = \sqrt{۸} + \sqrt[۳]{۸} - ۲ = ۲\sqrt{۲} + ۲ - ۲ = ۲\sqrt{۲}$$

د)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin^۲ x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} (\sin x \times \sin x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x \times \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x = ۱\times ۱ = ۱$$

و)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (۲\sin x - ۳\cos x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۲\sin x - \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۳\cos x$$
$$= ۲\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x - ۳\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \cos x$$
$$= ۲\sin\frac{\pi}{۴} - ۳\cos\frac{\pi}{۴}$$
$$= \sqrt{۲} - ۳\frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ز)

$$\lim_{x\to -۲} ۳^x = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۹}$$

ح)

$$\lim_{x\to ۴} ۲^x = ۲^۴ = ۱۶$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} (۳\sin x + ۴\cos x)$ ب) $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} (\frac{۲\cos x + ۳\sin x}{۵})$

ج) $\lim_{x\to ۲} (۳^x + ۲^x)$ د) $\lim_{x\to -۲} (۳^x + ۲^{-x})$

هـ) $\lim_{x\to ۱۶} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۴]{x})$ و) $\lim_{x\to \frac{۵\pi}{۳}} (\sin x - ۱)(\cos x + ۲)$

❖ **اگر توابع f و g در a حد داشته باشند و $\lim_{x\to a} g(x) \neq ۰$ آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و داریم:**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲ + ۴x + ۳}{۲x - ۱}$ ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x + \sin x}{۲\sin x - \cos x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۲x}{x^۲-۳}$ د) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱}{x-۱}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \tan x$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۴x+۳}{۲x-۱} = \frac{۴+۸+۳}{۴-۱} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

ب)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x+\sin x}{۲\sin x-\cos x} = \frac{۰+۱}{۲-۰} = \frac{۱}{۲}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۲x}{x^۲-۳} = \frac{۲+۴}{۱۶-۳} = \frac{۶}{۱۳}$$

د)

$\lim\limits_{x\to ۱}(x-۱)=۰$. پس وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، قدرمطلق مقادیر $\frac{۱}{x-۱}$ به طور نامحدود افزایش می‌یابد و به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱}{x-۱}$ وجود ندارد.

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin\frac{\pi}{۴}}{\cos\frac{\pi}{۴}} = ۱$$

توجه: اگر $a \neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$، داریم $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$ و اگر $a\neq k\pi$، داریم $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a$.

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x^۲+۴x+۱}{x^۳-x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۲^x}{۳^x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۴}{x^۲-x}$ د) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} \frac{-۳\cos x+۲\sin x}{\sin x+\cos x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} \tan x$ و) $\lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} \frac{\tan x+\cot x}{\sin x+\cos x}$

❖ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ و اگر در یک همسایگی a، $f(x)\neq 0$ و $g(x)\neq 0$، در این صورت گوییم $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مبهم است. برای محاسبه‌ی حد تابع $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ در صورت وجود، با ساده کردن و حذف عامل‌های مشترک، $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ به کسری تبدیل می‌شود که حد آن را به کمک قضایایی که ذکر آن رفت می‌توان محاسبه نمود.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan(x-\frac{\pi}{4})}{2\sin(\frac{\pi}{4}-x)}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\sin^3 x}{\cos^2 x-\cos^3 x}$

و) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

ز) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{2\cos x+1}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)=1$$

ب)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

ج)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=0$$

د)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\tan(x-\frac{\pi}{۴})}{۲\sin(\frac{\pi}{۴}-x)} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})}}{-۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{-۲\cos(x-\frac{\pi}{۴})} = -\frac{۱}{۲}$$

هـ)

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۲ x-\sin^۳ x}{\cos^۲ x-\cos^۳ x} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۲ x(۱-\sin x)}{\cos^۲ x(۱-\cos x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{(۱-\cos^۲ x)(۱-\sin x)}{\cos^۲ x(۱-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)(۱-\sin x)}{\cos^۲ x(۱-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{(۱+\cos x)(۱-\sin x)}{\cos^۲ x} = ۲$$

و)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{-(\sin x-\cos x)}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\cos x} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -\sqrt{۲}$$

ز)

$$\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}} \frac{\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x}{۲\cos x+۱} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}} \frac{(\sin x+\sin ۳x)+\sin ۲x}{۲\cos x+۱}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}} \frac{۲\sin ۲x\cos x+\sin ۲x}{۲\cos x+۱}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}} \frac{\sin ۲x(۲\cos x+۱)}{۲\cos x+۱}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}} \sin ۲x = \sin\frac{۴\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-3\sin x+2}{\sin x-1}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{2\cos 2x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$

❖ **اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند و در محاسبه‌ی حد $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه‌ای به طول a به حالت مبهم $\dfrac{0}{0}$ برخورد کنیم، این به معنای آن است که $P(a)=0$ و $Q(a)=0$ یعنی صورت و مخرج بر $x-a$ بخش‌پذیرند و می‌توان عامل (عامل‌های) $x-a$ را در صورت و مخرج ظاهر ساخته، از صورت و مخرج حذف کنیم. سپس حد را در صورت وجود محاسبه کنیم.**

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$

ب) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x^3+8}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^4-1}$

حل:

الف) با توجه به اینکه $x=3$ صورت و مخرج را صفر می‌کند. صورت و مخرج بر $x-3$ بخش‌پذیر هستند.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2+3x+9}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

ب)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x^3+8}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2^5}{x^3+2^3}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}{x^2-2x+4}=\frac{80}{12}=\frac{20}{3}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}+۲x-۳}{x^{۴}-۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+x+۳)}{(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+x+۳}{(x+۱)(x^{۲}+۱)}=\frac{۵}{۴}$$

مثال: در تساوی زیر مقادیر a و b را به دست آورید؟

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۶x+۵}{x^{۲}+ax+b}=۲$$

حل:

عدد یک، صورت را صفر می‌کند. با توجه به اینکه جواب حد عدد ۲ است. لازم است $x=۱$ ریشه‌ی چندجمله‌ای مخرج نیز باشد. یعنی $۱+a+b=۰$. بنابراین صورت و مخرج هر دو عامل $x-۱$ دارند. پس داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۶x+۵}{x^{۲}+ax+b}&=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۶x+۵}{x^{۲}+ax+(-a-۱)}\\&=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۵)}{(x-۱)(x+a+۱)}\\&=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۵}{x+a+۱}\\&=\frac{-۴}{۲+a}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{-۴}{۲+a}=۲\Rightarrow ۴+۲a=-۴\Rightarrow a=-۴$$

$$\Rightarrow ۱+a+b=۰\overset{a=-۴}{\Rightarrow} b=۳$$

مثال: اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{x^{n}-۲^{n}}{x-۲}=۸۰$، مقدار n را به دست آورید؟

حل:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۲}\frac{x^{n}-۲^{n}}{x-۲}&\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^{n-۱}+۲x^{n-۲}+۴x^{n-۳}+...+۲^{n-۱})}{x-۲}\\&=\lim_{x\to ۲}(x^{n-۱}+۲x^{n-۲}+۴x^{n-۳}+...+۲^{n-۱})\\&=۲^{n-۱}+۲^{n-۱}+۲^{n-۱}+...+۲^{n-۱}\\&=n\times ۲^{n-۱}\\&=۸۰\\&\Rightarrow n=۵\end{aligned}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^4-16}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^3+x-2}$

ج) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^3+3x^2+1}{x^4-1}$ د) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x^2-4}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^6-64}{x^4-16}$ و) $\lim\limits_{x\to +1}\dfrac{4x^3+3x^2+2x-9}{x^5-1}$

❖ **اگر $P(x)$ یا $Q(x)$ عبارت‌های رادیکالی باشند، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در حالت مبهم ($\frac{0}{0}$) لازم است با گویا کردن و یا روش‌های دیگر عامل صفر کننده را ظاهر ساخته و پس از حذف آن، حد را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم.**

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-2}$ د) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-25}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x-2}-5}$ و) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

ب)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2+x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2+x-2}\times\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(x+2)(1+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x})}=\frac{-1}{6}$$

ج)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

د)

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-25}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-25}\times\frac{(\sqrt[3]{x+3})^2+2\sqrt[3]{x+3}+4}{(\sqrt[3]{x+3})^2+2\sqrt[3]{x+3}+4}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(x+5)((\sqrt[3]{x+3})^2+2\sqrt[3]{x+3}+4)}=\frac{1}{10\times 12}=\frac{1}{120}$$

هـ)

$$\lim_{x\to 27}\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x-2}-5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 27}\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x-2}-5}\times\frac{(\sqrt[3]{x})^2+3\sqrt[3]{x}+9}{(\sqrt[3]{x})^2+3\sqrt[3]{x}+9}\times\frac{\sqrt{x-2}+5}{\sqrt{x-2}+5}$$

$$=\lim_{x\to 27}\frac{(x-27)(\sqrt{x-2}+5)}{(x-27)((\sqrt[3]{x})^2+3\sqrt[3]{x}+9)}=\frac{10}{27}$$

و)

با توجه به اتحاد $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$، داریم:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}\times\frac{(\sqrt[4]{x})^3+2(\sqrt[4]{x})^2+4\sqrt[4]{x}+8}{(\sqrt[4]{x})^3+2(\sqrt[4]{x})^2+4\sqrt[4]{x}+8}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)((\sqrt[4]{x})^3+2(\sqrt[4]{x})^2+4\sqrt[4]{x}+8)}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-\sqrt{3x+7}}{2x+\sqrt{x+18}}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

د) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{\sqrt{x-1}+x^2-1}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x}}{1-x^2}$

و) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$

ز) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-1}$

ح) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{6+\sqrt{x}}-3}$

ط) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x+3}-2}$

❖ **هرگاه x زاویه‌ای بر حسب رادیان باشد. آنگاه داریم:**

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

مثال: ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$$

توجه: به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x+\sin ۳x}{۵x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x\sin ۲x}{\tan x^۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{۳x^۲}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۷x}{۱-\cos ۴x}$

و) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{۴x^۳}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{\cos ۲x-\cos ۳x}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sin(x-۲)}{\tan(x^۲-۳x+۲)}$

ط) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{۲x-\pi}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}\times ۳=۱\times ۳=۳$$

ب)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x+\sin ۳x}{۵x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin ۳x}{x}}{\frac{۵x}{x}}=\frac{۱+۳}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin ۲x}{\tan x^۲}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{x\times\frac{\sin ۲x}{۲x}\times ۲x}{\frac{\tan x^۲}{x^۲}\times x^۲}=۲$$

د)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{۳x^۲}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{۳x^۲}=\frac{۲}{۳}\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^۲=\frac{۲}{۳}\times ۱=\frac{۲}{۳}$$

هـ)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۷x}{۱-\cos ۴x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲(\frac{۷x}{۲})}{۲\sin^۲ ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\frac{\sin\frac{۷x}{۲}}{\frac{۷x}{۲}})^۲\times(\frac{۷x}{۲})^۲}{(\frac{\sin ۲x}{۲x})^۲\times(۲x)^۲}=\frac{۱\times\frac{۴۹}{۴}}{۱\times ۴}=\frac{۴۹}{۱۶}$$

و)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{۴x^۳}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{۴x^۳}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\cos x\sin x}{۴x^۳\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos x)}{۴x^۳\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۲\sin^۲\frac{x}{۲})}{۴x^۳\cos x}$$

$$=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{x}\times x\times(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}})^۲\times(\frac{x}{۲})^۲}{x^۳\cos x}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱\times\frac{۱}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۸}$$

ز)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{\cos ۲x-\cos ۳x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{x-۲x}{۲}\sin\frac{x+۲x}{۲}}{-۲\sin\frac{۲x-۳x}{۲}\sin\frac{۲x+۳x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{۳x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{۵x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin\frac{۳x}{۲}}{\frac{۳x}{۲}}\times\frac{۳x}{۲}}{\frac{\sin\frac{۵x}{۲}}{\frac{۵x}{۲}}\times\frac{۵x}{۲}}=\frac{۳}{۵}$$

ح)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sin(x-۲)}{\tan(x^۲-۳x+۲)}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{\sin(x-۲)}{(x-۲)}\times(x-۲)}{\frac{\tan(x^۲-۳x+۲)}{(x^۲-۳x+۲)}\times(x-۲)(x-۱)}=۱$$

ط)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-2(\frac{\pi}{2}-x)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)} = -\frac{1}{2}\times 1 = -\frac{1}{2}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 2x\cos 3x}{\tan 5x^2}$

د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{x-\frac{\pi}{6}}{\sin(2x-\frac{\pi}{3})}$

هـ) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{\sin(x+2)}$

و) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(\pi\sin x)}{\sin x}$

ز) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 3x-1}$

ح) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{\cos x}}$

ط) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x-1}{\cos x}$

ی) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos^2(x+t)-\cos^2 x}{t}$

ک) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan 3x}-\sqrt{1-\tan 3x}}{4x}$

ل) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\tan 2x}{x^3+3x^2}$

م) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin^2 x-\tan x}{x}$

ن) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{2-\sqrt{4-x^2}}$

ر) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x\sqrt{1-\cos 4x}}{x^3+x^2}$

❖ برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ ابتدا حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. اگر l عددی غیر صحیح باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[l]$ و اگر عددی صحیح باشد، در صورت لزوم حد چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست می‌آوریم.

❖ اگر تابع f شامل جزء صحیح باشد ابتدا جزء صحیح را محاسبه می‌کنیم و سپس حاصل حد را در صورت وجود می‌یابیم.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۳}{۲}}[x]$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}[x^{۲}]$

د) $\lim\limits_{x\to -۲}[۳x-۱]$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۰}[\sin x]$

و) $\lim\limits_{x\to ۲}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$

ز) $\lim\limits_{x\to ۱}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}[\sqrt{۲}\cos x]$

ط) $\lim\limits_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{x}]$

ی) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{[x]+۳+x}{[x+\frac{۱}{۲}]+[-۲x]+۴-x}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to \frac{۳}{۲}} x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \lim_{x\to \frac{۳}{۲}}[x]=[\frac{۳}{۲}]=۱$$

ب)

$$\begin{cases} x\to ۲^{-}\Rightarrow ۱<x<۲\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^{-}}[x]=۱ \\ x\to ۲^{+}\Rightarrow ۲<x<۳\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^{+}}[x]=۲ \end{cases}$$

پس تابع $[x]$ در $x=۲$ حد ندارد.

ج)

$$x\to .\Rightarrow ۰<x^{۲}<۱\Rightarrow \lim_{x\to ۰}[x^{۲}]=۰$$

د)

$$\begin{cases} x\to -۲^{-}\Rightarrow ۳x\to -۶^{-}\Rightarrow ۳x-۱\to -۷^{-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -۲^{-}}[۳x-۱]=-۸ \\ x\to -۲^{+}\Rightarrow ۳x\to -۶^{+}\Rightarrow ۳x-۱\to -۷^{+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -۲^{+}}[۳x-۱]=-۷ \end{cases}$$

پس تابع $[۳x-۱]$ در $x=-۲$ حد ندارد.

هـ)

$$\begin{cases} x\to ۰^{-}\Rightarrow -۱<\sin x<۰\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{-}}[\sin x]=-۱ \\ x\to ۰^{+}\Rightarrow ۰<\sin x<۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{+}}[\sin x]=۰ \end{cases}$$

پس تابع $[\sin x]$ در $x=۰$ حد ندارد.

و)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x+۴}{x+۱}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]=[\frac{۸}{۳}]=۲$$

ز)

$$\frac{۲x+۴}{x+۱}=\frac{۲x+۲+۲}{x+۱}=۲+\frac{۲}{x+۱}$$

$$x>۱\Rightarrow x+۱>۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{x+۱}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<\frac{۲}{x+۱}<۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲}{x+۱}]=۰$$

$$۰<x<۱\Rightarrow ۱<x+۱<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۱}{x+۱}<۱\Rightarrow ۱<\frac{۲}{x+۱}<۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲}{x+۱}]=۱$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]&=\lim_{x\to ۱^+}[۲+\frac{۲}{x+۱}]\\&=\lim_{x\to ۱^+}(۲+[\frac{۲}{x+۱}])\\&=۲+\lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲}{x+۱}]=۲\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]&=\lim_{x\to ۱^-}[۲+\frac{۲}{x+۱}]\\&=\lim_{x\to ۱^-}(۲+[\frac{۲}{x+۱}])\\&=۲+\lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲}{x+۱}]=۳\end{aligned}$$

لذا تابع $[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$ در $x=۱$ حد ندارد.

ح)

$$\begin{cases} x\to \frac{۳\pi}{۴}^- \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos x<۰\Rightarrow -۱<\sqrt{۲}\cos x<۰\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\left[\sqrt{۲}\cos x\right]=-۱\\ x\to \frac{۳\pi}{۴}^+ \Rightarrow -۱<\cos x<-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow -\sqrt{۲}<\sqrt{۲}\cos x<-۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+}\left[\sqrt{۲}\cos x\right]=-۲\end{cases}$$

لذا تابع $[\sqrt{۲}\cos x]$ در $x=\frac{۳\pi}{۴}$ حد ندارد.

ط)

وقتی $x>۰$ می‌دانیم $\sin x<x$ پس $۰<\frac{\sin x}{x}<۱$ بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰^+}[\frac{\sin x}{x}]=۰$. همچنین با توجه به زوج بودن تابع $\frac{\sin x}{x}$ داریم $\lim\limits_{x\to ۰^-}[\frac{\sin x}{x}]=۰$ و لذا $\lim\limits_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{x}]=۰$.

ی)

اگر $x \to ۱^-$ داریم:

$$\begin{cases} [x]=۰ \\ ۱< x+\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۲} \Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}]=۱ \\ -۲<-۲x<-۱ \Rightarrow [-۲x]=-۲ \end{cases}$$

پس حد چپ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{[x]+۳+x}{[x+\frac{۱}{۲}]+[-۲x]+۴-x} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۰+۳+x}{۱-۲+۴-x} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

و اگر $x \to ۱^+$ داریم:

$$\begin{cases} [x]=۱ \\ \frac{۳}{۲}< x+\frac{۱}{۲}<۲ \Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}]=۱ \\ -۳<-۲x<-۲ \Rightarrow [-۲x]=-۳ \end{cases}$$

پس حد راست به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]+۳+x}{[x+\frac{۱}{۲}]+[-۲x]+۴-x} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱+۳+x}{۱-۳+۴-x} = \frac{۵}{۱} = ۵$$

و لذا تابع در $x=۱$ حد ندارد.

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲^+} \frac{[x]^۲-۴}{x^۲-۴}$

ب) $\lim_{x\to ۱} [x]([x]-۱)$

ج) $\lim_{x\to ۰^+} \frac{[۷x^۲]}{x+۵}$

د) $\lim_{x\to ۱} [\frac{x}{۲}]$

هـ) $\lim_{x\to ۲} ([x]+[-x])$

ز) $\lim_{x\to \pi} ([x]+[-x])$

ح) $\lim_{x\to ۶} ([۳x]+۲[x]-[x^۲])$

ط) $\lim_{x\to ۶} ([\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}])$

ی) $\lim_{x\to ۱^-} (x+۱)[\frac{۱}{x+۱}]$

ک) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} [\tan x]$

ل) $\lim_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} [\sqrt{۲}\sin x]$

م) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} [\cos x]$

❖ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ باشد، آنگاه

$$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$$

❖ اگر تابع f شامل قدرمطلق باشد، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ در صورت لزوم حدود چپ و راست را محاسبه می‌کنیم.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} |x-۲|$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱} |x-۲|$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{|x-۲|}{x-۲}$ د) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{|x-۱|-۳}{|x-۳|+۴}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}$

حل: الف)

$$\lim\limits_{x\to ۲} |x-۲| = |۲-۲| = ۰$$

ب)

$$\lim\limits_{x\to ۱} |x-۲| = |۱-۲| = ۱$$

ج)

$$\lim\limits_{x\to ۲} \frac{|x-۲|}{x-۲} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)}{x-۲} = -۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{x-۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow$$ تابع در $x=۲$ حد ندارد

د)

$$\lim\limits_{x\to ۱} \frac{|x-۱|-۳}{|x-۳|+۴} = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{|۱-۱|-۳}{|۱-۳|+۴} = \frac{-۳}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

هـ)

$$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{-(\frac{\pi}{۲}-x)} = -۱ \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{-\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{-(\frac{\pi}{۲}-x)} = ۱ \end{cases} \Rightarrow$$ تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ حد ندارد

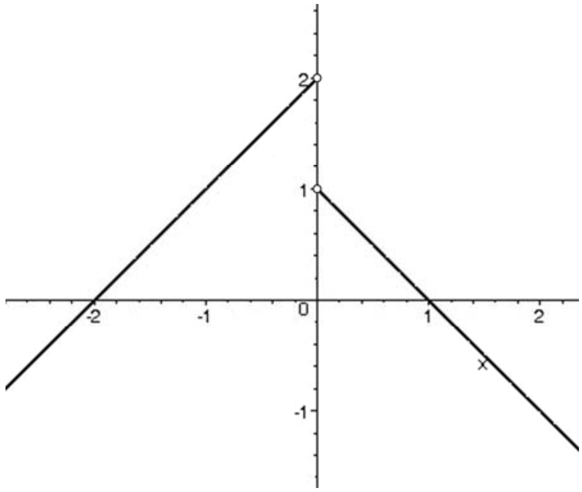
تمرین:

۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{|x-1|}$

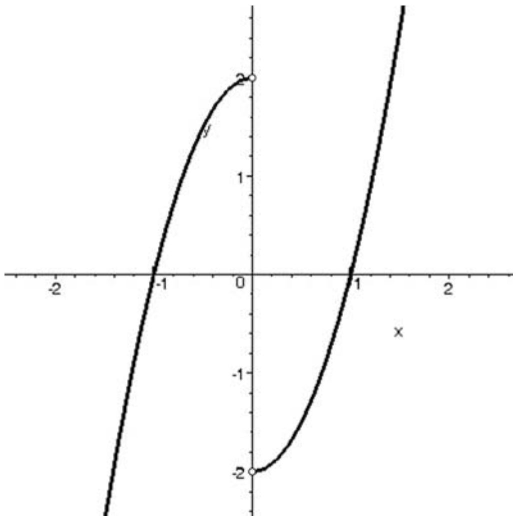
ج) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}+\dfrac{|x-1|}{x-1}\right)$ د) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار حدود زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$

۳- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار حاصل $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ را محاسبه کنید



❖ **قضیه فشردگی:** اگر به ازای هر x از یک همسایگی a داشته باشیم $h(x) \le f(x) \le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

مثال: $\lim\limits_{x\to ۱}|x-۱|\cos\frac{۱}{x-۱}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$-۱ \le \cos\frac{۱}{x-۱} \le ۱ \Rightarrow -|x-۱| \le |x-۱|\cos\frac{۱}{x-۱} \le |x-۱|$$

$$\lim_{x\to ۱} -|x-۱| = \lim_{x\to ۱}|x-۱| = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}|x-۱|\cos\frac{۱}{x-۱} = ۰$$

مثال: اگر به ازای هر $x \in (-۲,۲)$، داشته باشیم: $|f(x)-۲| \le (x-۱)^۲$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱}{f(x)}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$|f(x)-۲| \le (x-۱)^۲ \Rightarrow -(x-۱)^۲ \le f(x)-۲ \le (x-۱)^۲ \Rightarrow ۲-(x-۱)^۲ \le f(x) \le ۲+(x-۱)^۲$$

$$\lim_{x\to ۱}(۲+(x-۱)^۲) = \lim_{x\to ۱}(۲-(x-۱)^۲) = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{۲}$$

تمرین:

۱- حدود زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)\sin\frac{۱}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\sin^۲ x.\sin\frac{۱}{x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}]$ د) $\lim\limits_{x\to ۰} x^۲\cos\frac{\pi}{x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to -۱}(x^۲-۱)\sin\frac{۱}{\sqrt[۳]{x+۱}}$ و) $\lim\limits_{x\to ۰}(۱-\cos x)[\frac{۱}{\sin x}]$

۲- اگر به ازای هر $x \in (-۱,۱)$ داشته باشیم $۱-x^۲ \le f(x) \le \cos^۲ x$، $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را محاسبه کنید.

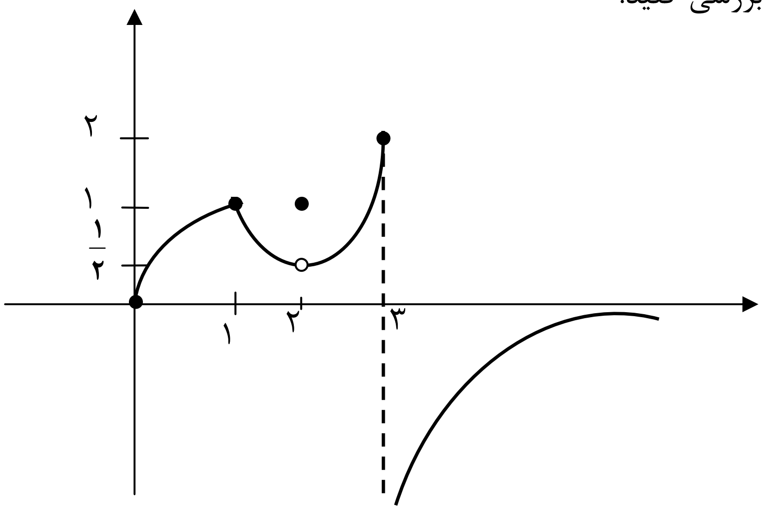
۳- اگر به ازای هر $x \in (-۱,۱)$ داشته باشیم $-x^۲ \le f(x) \le ۱-\cos x$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را محاسبه کنید.

۴- در یک همسایگی صفر داریم $۳-x^۲ \le f(x)-۵ \le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x) = ۳$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)}$ را محاسبه کنید.

۵- اگر برای هر x از یک همسایگی $x_۰ = -۲$ داشته باشیم $g(x) \le f(x) \le x^۳+۲$ و $g(x) = \begin{cases} x-۴ & x \ge -۲ \\ x^۵+۲۶ & x < -۲ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ را محاسبه کنید.

❖ **اگر $a \in D_f$ و $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ، گوییم تابع f در $x = a$ پیوسته است.**

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار، پیوستگی تابع f را در نقاط مشخص شده بررسی کنید.



الف) $x = ۰$ ب) $x = ۱$ ج) $x = ۲$ د) $x = ۳$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰) = ۰$$

پس تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

توجه: در اصطلاح، با توجه به این‌که در واقع $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰)$ می‌گویند تابع f در $x = ۰$ تنها از راست پیوسته است.

ب)

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱) = ۱$$

پس تابع f در $x = ۱$ پیوسته است.

ج)

$f(۲) = ۲$ ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \frac{۱}{۲}$ پس $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) \neq f(۲)$. بنابراین تابع f در $x = ۲$ پیوسته نیست.

د)

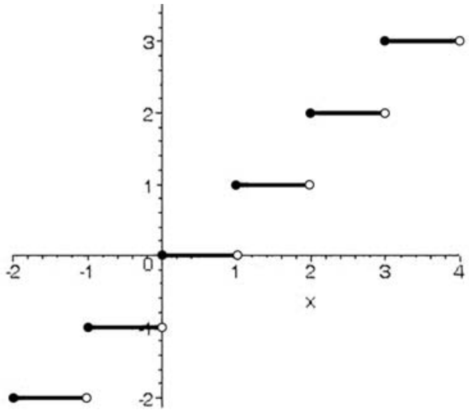
تابع f در $x = ۳$ حد ندارد، پس در این نقطه پیوسته نیست.

توجه: در اصطلاح ، می‌گویند تابع f در $x = ۳$ تنها پیوستگی چپ دارد.

مثال: تابع $y=[x]$ در چه نقاطی ناپیوسته است.

حل:

نمودار تابع $y=[x]$ به صورت زیر می‌باشد. با توجه به نمودار، تابع در Z ناپیوسته است. (البته می‌توان ثابت کرد تابع $y=[x]$ در $x_0 \in Z$ ناپیوسته و در $x_0 \in \Re - Z$ پیوسته است.)



مثال: پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه یا نقاط داده شده در صورت با معنی بودن، بررسی کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-1} \quad , x=0$

ب) $f(x)=x^2-3x+5 \quad , x=2$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 2 & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x>1 \end{cases} \quad , x=1$

د) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 3 & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x>1 \end{cases} \quad , x=1$

هـ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases} \quad , x=0$

و) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<-1 \\ -3x & -1<x<1 \\ x-4 & x>1 \end{cases} \quad , x=-1, x=1$

حل: الف)

می‌دانیم $D_f=[1,+\infty)$ و $0 \notin D_f$، بنابراین بحث از پیوستگی این تابع در $x=0$ بی‌معنا است.

ب)

تابع f در $x=2$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$.

توجه: توابع چند جمله‌ای در هر نقطه‌ای از $\Re$ پیوسته هستند.

ج)

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$.

د)

$$f(۱)=۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+۱)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته نیست زیرا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\neq f(۱)$.

هـ)

$$f(۰)=۱$$

$$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

تابع f در $x=۰$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$.

و)

$$f(-۱)=۳$$

$$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^+}(-۳x)=۳$$

$$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^-}(x^۲+۱)=۲$$

تابع f در $x=-۱$ حد ندارد. بنابراین تابع f در $x=-۱$ پیوسته نیست، زیرا در این نقطه حد ندارد. (همان‌گونه که بیان شد تابع f در $x=-۱$ تنها پیوستگی راست دارد).

$$f(۱)=-۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(-۳x)=-۳ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-۴)=-۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=-۳$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$.

مثال: مقدار a را طوری بیابید تا تابع $f(x)=(x+a)[۲x-۵]$ در $x=۲$ پیوسته باشد.

حل:

$$f(۲)=(۲+a)[۴-۵]=-a-۲$$

$$\lim\limits_{x\to ۲^-}(x+a)[۲x-۵]=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x+a)(-۲)=-۴-۲a$$

$$\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+a)[۲x-۵]=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+a)(-۱)=-۲-a$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$ پس لازم است $-a-۲=-۴-۲a$ بنابراین $a=-۲$ می‌باشد.

مثال: مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۴+x^۲-۲}{x^۲-۱} & x\neq \pm ۱\\ k & x=\pm ۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد.

حل:

$$f(۱)=k$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+x^۲-۲}{x^۲-۱}=\lim\frac{(x^۲-۱)(x^۲+۲)}{x^۲-۱}=۳$$

بنابراین لازم است $k=۳$ باشد.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x<۰\\ a & x=۰\\ [x]+b & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد مقدار a و b را به دست آورید.

حل:

$$f(۰)=a$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{\sqrt{۲\sin^۲ x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{\sqrt{۲}|\sin x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{-\sqrt{۲}\sin x}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}([x]+b)=\lim_{x\to ۰^+}(۰+b)=b$$

برای اینکه تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد باید $\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$ ، بنابراین داریم:

$$b=a=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین:

۱- پیوستگی $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{۱}{۲x^{۲}+۱} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

۲- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{۱}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} (x+۳)[x] & x<۳ \\ ax+۳ & x\geq ۳ \end{cases}$ در $x=۳$ پیوسته باشد، مقدار a را به دست آورید.

۴- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} [x]+۳ & |x|<۱ \\ [x]+۲ & |x|\geq ۱ \end{cases}$ را در $x=\pm ۱$ بررسی کنید.

۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{۲x+|x|} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=۰$ چگونه است.

۶- پیوستگی هر یک از توابع $\boldsymbol{f(x)=[x^{۲}]}$ و $\boldsymbol{g(x)=[x^{۳}]}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

۷- تابع $f(x)=[۲\sin x]$ در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{۲}$ از نظر پیوستگی چگونه است.

۸- به ازای چه مقادیری از k تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^{۲} x}{۱-\cos k\pi} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته است.

۹- پیوستگی تابع $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x-[x] & ,\ [x]\in O \\ x-[x]+۱ & ,\ [x]\in E \end{cases}}$ را در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ بررسی کنید. ($\boldsymbol{O}$ و $\boldsymbol{E}$ به ترتیب مجموعه‌های اعداد فرد و زوج طبیعی هستند.)

۱۰- اگر یکی از توابع $\boldsymbol{f}$ و $\boldsymbol{g}$ در $x=a$ پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، ثابت کنید توابع $f+g$ و $f-g$ در $x=a$ ناپیوسته‌اند. درمورد توابع $\dfrac{f}{g}$ و $f\,.\,g$ چه می‌توان گفت؟

۱۱- اگر توابع f و g در $x=a$ ناپیوسته باشند، در مورد پیوستگی توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $\dfrac{f}{g}$ و $f\,.\,g$ در $x=a$ چه می‌توان گفت.

۱۲- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا تابع $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} [x+۲]+\frac{۱}{۲}a & x<۰ \\ |x-۲|+b & x=۰ \\ x\cot\frac{x}{۳} & x>۰ \end{cases}}$ در $x=۰$ پیوسته باشد.

۱۳- به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases} a[x]+b[x] & x>۲ \\ ۲a+۳ & x=۲ \\ \left[\dfrac{x}{۲}\right] & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته است.

❖ اگر تابعی در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند.

مثال: کدام یک از توابع زیر، تابع پیوسته می‌باشند.

الف) $f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}}$ ب) $g(x)=\dfrac{x+۱}{x^{۲}-۴}$

ج) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$

حل: الف)

دامنه‌ی تابع f، بازه‌ی $[۰,۲]$ می‌باشد. اگر $۰<x<۲$، آن‌گاه:

دلخواه $x_۰\in(۰,۲):\ \lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=\sqrt{۲x_۰-x_۰^{۲}}=f(x_۰)$

اگر $x=۰$، $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=۰=f(۰)$ و اگر $x=۲$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=۰=f(۲)$. پس تابع f، تابعی پیوسته می‌باشد.

ب)

$$D_g=\Re-\{\pm ۲\}$$

دلخواه $x_۰\in D_g:\ \lim\limits_{x\to x_۰} g(x)=\dfrac{x_۰+۱}{x_۰^{۲}-۴}=g(x_۰)$

بنابراین g تابعی پیوسته است.

ج)

$$D_h=\Re$$

$$۰\in D_h=\begin{cases} h(۰)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۰} h(x)=۱ \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰} h(x)\neq h(۰)$$

بنابراین h تابعی پیوسته نیست.

تمرین:

کدام یک از توابع زیر پیوسته هستند.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x>۲\\ \dfrac{۳}{x-۴} & x<۲\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x>۲\\ \dfrac{۳}{x-۴} & x\le ۲\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x<۲\\ \dfrac{۳}{x+۴} & x\le ۲\end{cases}$

د) $f(x)=\tan x$

هـ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۳}{۵-x}}$

و) $f(x)=\sqrt{x^{۳}-۸}$

ز) $f(x)=\sqrt[۳]{\dfrac{x+۱}{x-۲}}$

❖ **توابع چند جمله‌ای،** $y=\sin x$ **،** $y=\cos x$ **،** $y=\tan^{-1}x$ **و** $y=\cot^{-1}x$ **روی** $\Re$ **پیوسته‌اند.**

❖ **توابع** $y=\tan x$ **،** $y=\cot x$ **،** $y=\sin^{-1}x$ **و** $y=\cos^{-1}x$ **در دامنه‌ی تعریف خود که زیرمجموعه‌ای از** $\Re$ **می‌باشد تابعی پیوسته هستند.**

❖ **اگر تابع** h **از جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم چند تابع پیوسته تشکیل شده باشد روی دامنه خود تابعی پیوسته است.**

❖ **اگر** f **تابعی پیوسته باشد، تابع باشد، تابع** $\sqrt[n]{f}$ **روی دامنه‌ی تعریف خود پیوسته است.**

مثال: پیوستگی توابع زیر را روی دامنه‌ی تعریف بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۴}$

ب) $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$

ج) $h(x)=\tan x.\cot x$

حل: الف)

صورت و مخرج توابع چند جمله‌ای هستند و در هر نقطه‌ای پیوسته، پس تابع f روی $D_f=\Re-\{\pm ۲\}$ پیوسته است.

ب)

تابع $y=x^{۲}-۴$ تابع چند جمله‌ای است و در هر نقطه‌ای پیوسته، پس تابع g در دامنه تعریف خود یعنی $(-\infty\ ,\ -۲]\cup[۲\ ,\ +\infty)$ پیوسته است.

ج)

تابع $y=\tan x$ روی $D=\left\{x \middle| x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$ و تابع $y=\cot x$ روی $D_f=\{x|x\neq k\pi\}$ پیوسته‌اند پس تابع h روی $D_h=\left\{x \middle| x\neq \frac{k\pi}{۲}\right\}$ پیوسته است.

مثال: فاصله‌ی پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x+۱}{x-۲} & x>۳\\ \frac{x+۱}{x+۲} & x\leq ۳\end{cases}$ را تعیین کنید.

حل:

می‌دانیم $D_f=\Re-\{-۲\}$ و هر یک از ضابطه‌ها روی دامنه‌ی تعریف خود پیوسته‌اند. پس کافی است پیوستگی تابع در $x=۳$ را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x+۱}{x-۲}=۴$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{۴}{۵}$$

تابع در $x=۳$ پیوسته نیست بنابراین تابع f روی $(-\infty\,,-۲)\cup(-۲\,,۳)\cup(۳\,,+\infty)$ پیوسته است.

مثال: حدود k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۷}{x^۲+kx+۱}$ در $\Re$ پیوسته باشد

حل:

صورت و مخرج توابع چند جمله‌ای هستند و در هر نقطه‌ای از $\Re$ پیوسته می‌باشند. پس کافی است دامنه تعریف تابع برابر $\Re$ باشد. یعنی باید معادله $x^۲+kx+۱=۰$ فاقد ریشه باشد بنابراین لازم است:

$$\Delta<۰\Rightarrow k^۲-۴<۰\Rightarrow |k|<۲\Rightarrow -۲<k<۲$$

تمرین:

۱- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}۲a-x^۲ & ۲\leq x<۳\\ [x]-۱ & ۳\leq x<۴\\ bx+۱ & ۴\leq x<۵\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۲- a و b را طوری به دست آورید تا تابع $f(x)=\begin{cases}x+a+۱ & x\leq ۰\\ [x]+۲b & ۰<x<۱\\ \frac{۳a}{x} & x\geq ۱\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۳- مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x\geq k\\ x & x<k\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۴- مقدار m را طوری تعیین کنید تا $f(x)=\begin{cases}\frac{mx^{۲}+۵x}{x^{۲}+mx+۱} & x\neq ۱\\ ۲m & x=۱\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۵- فاصله‌ی پیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

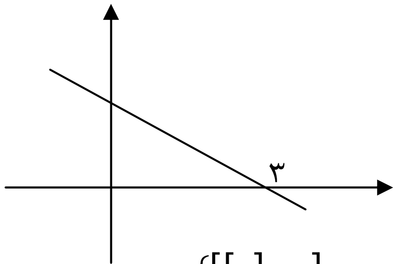
الف) $f(x)=\frac{x+۳}{x^{۲}-۹}$

ب) $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}$

ج) $h(x)=\frac{۱}{\sqrt{۳-x}}$

د) $k(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۱\end{cases}$

۶- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۵x+b}{a-x} & x\neq a\\ ۱ & x=a\end{cases}$ تابعی پیوسته بوده و نمودار آن به صورت زیر باشد مقادیر a و b را به دست آورید.



۷- به ازای چه مقادیر از a تابع $f(x)=\begin{cases}[[x]-x] & x\notin Z\\ a & x\in Z\end{cases}$ تابعی پیوسته می‌باشد.

۸- به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱\\ ax+a+۴ & x\leq ۱\end{cases}$ ، تابعی پیوسته می‌باشد.

۹- تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & x<۲\\ a+۲\sin\frac{\pi}{۴} & x\geq ۲\end{cases}$ به ازای چه مقداری از a روی $D_f=[۰\,,۳]$ پیوسته است.

❖ **اگر ترکیب fog امکان‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ و f تابعی پیوسته در $x_۰=l$ باشد، آن‌گاه داریم:**

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

مثال:

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x^۲+۳}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲+۳)}=\sqrt{۴}=۲$ زیرا تابع $y=\sqrt{x}$ ، تابعی پیوسته است

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]\neq[\lim\limits_{x\to ۲}x]$ زیرا تابع $y=[x]$ در $x_۰=۲$ پیوسته نیست

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}[x^۲]=[\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}x^۲]=[\frac{۱}{۴}]=۰$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}[\frac{۲x+۱}{x}]\neq[\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x+۱}{x}]$ زیرا تابع $y=[\frac{۲x+۱}{x}]$ در $x_۰=۱$ پیوسته نیست

هـ) $\lim\limits_{x\to ۲}[\frac{۲x+۱}{x}]=[\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲x+۱}{x}]=[\frac{۵}{۲}]=۲$

❖ **اگر تابع g در $x=a$ پیوسته و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، تابع fog در $x=a$ پیوسته است.**

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\sqrt[۳]{x}$ ، تابعی پیوسته است.

حل: روش اول:

تابع $y=x$ تابع چند جمله‌ای است و در $x_۰\in\Re$ دلخواه پیوسته است پس تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ در $x_۰$ پیوسته است و تابع $h(x)=\sin x$ در هر نقطه‌ای از جمله $g(x_۰)$ پیوسته است پس تابع

$$f(x)=h(g(x))=\sin\sqrt[۳]{x}$$

در $x_۰$ پیوسته است.

روش دوم:

$x_۰\in\Re$ دلخواه

$$\left.\begin{array}{l} f(x_۰)=\sin\sqrt[۳]{x_۰} \\ \lim\limits_{x\to x_۰}f(x)=\sin\sqrt[۳]{x_۰}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_۰}f(x)=f(x_۰)$$

بنابراین تابع f روی $D_f=\Re$ تابعی پیوسته است.

تمرین:

۱- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، ثابت کنید تابع fog در $x=۰$ پیوسته است.

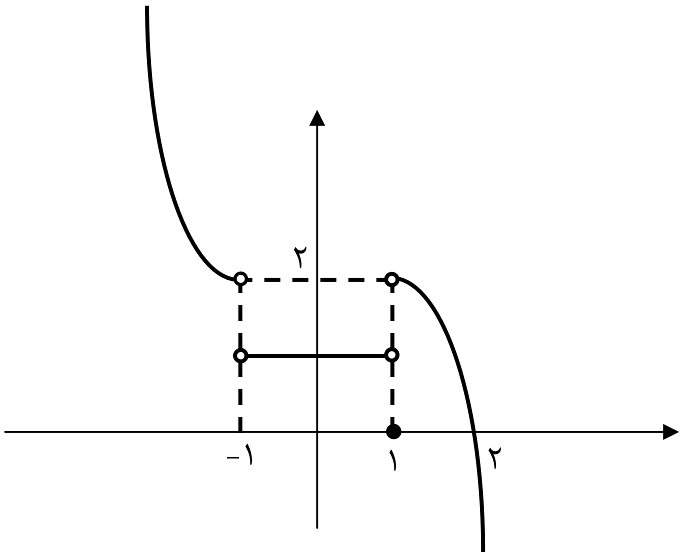
۲- اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=x-۲$ ، پیوستگی توابع fog و gof را در $x=۵$ بررسی کنید.

۳- اگر $f(x)=\begin{cases}-x & x<۰\\ ۱ & x\geq ۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۱ & x<۰\\ x & x\geq ۰\end{cases}$ ثابت کنید توابع f و g در $x=۰$ ، ناپیوسته‌اند ولی تابع fog در $x=۰$ پیوسته است.

۴- اگر $f(x)=\begin{cases}۳ & x\in z\\ -۳ & x\notin z\end{cases}$ ، پیوستگی تابع fof را بررسی کنید.

تمرین‌های تکمیلی:

۱- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است با توجه به نمودار طرف دوم هر یک از تساوی‌ها را بنویسید.



$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۴}} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} [f(x)]=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱^-} [f(x)]=$

$f(۱)=$

۲- نمودار تابعی رسم کنید که در آن همه‌ی ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

الف) $f(۰)=۲$ $\qquad$ ب) $f(-۲)=۰$ $\qquad$ ج) $f(۶)=۰$

د) $f(۱)=۵$ $\qquad$ هـ) $f(۲)$ تعریف نشده است $\qquad$ و) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۳$

ز) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۴$ $\qquad$ ح) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۳- اگر $f(x-۳)=\dfrac{۲x}{۱-x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را محاسبه کنید.

۴- اگر $f(\dfrac{x}{x+۲})=۵x^۲-۶x$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x-۴)$ را به دست آورید.

۵- تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<۱ \\ ۴x+۳b & x>۱ \end{cases}$ مفروض است، a و b را طوری به دست آورید تا اولاً تابع در $x=۱$ حد داشته باشد، ثانیاً $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)+۳\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۴$.

۶- هر یک از مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le -2 \\ ax+b & -2<x<2 \\ 2x-6 & x\ge 2\end{cases}$ در $x=2$ و $x=-2$ دارای حد باشد.

۷- به ازای کدام مقدار a تابع $y=a[x]+[x+1]$ در $x=1$ دارای حد است.

۸- حدود چپ و راست تابع $y=2[-x]+3[x]$ را در نقاط $x=3$ و $x=-3$ به دست آورید.

۹- اگر به ازای هر x از بازه‌ای شامل -1 داشته باشیم $2-3(x+1)^2 \le f(x) \le 2+(x+1)^2$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را به دست آورید.

۱۰- فرض کنید به ازای هر x از بازه $(-\pi\,,\,0)$ داریم $-\sin x\le f(x)\le 2+\sin x$ آنگاه $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2-2\cos 2x}}$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{2+2\cos 4\pi x}{(4x-1)^2}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x+\sin^2 x}{\cos x+1}$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+4\tan x}{2-x-2x^4}$

ح) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}-1}$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(\frac{x+\pi}{6})}$

د) $\lim\limits_{a\to \pi}\dfrac{\sin a}{1-\frac{a^2}{\pi^2}}$

۱۲- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}$

ت) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+5x^2-6x-2}{x^2-1}$

ث) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2-2(x-2)}{x^2-4}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{2x^3+3x^2-x-4}$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{3x}$

ح) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{x-3}-1}$

خ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

د) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

ذ) $\lim_{t\to -3}\sqrt{\frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}}$

ر) $\lim_{x\to 1}\frac{(1+x)(\sqrt{x}+1)-4}{x-1}$

ز) $\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})..(1-\sqrt[n]{x})}{(x-1)^{n-1}}$

ژ) $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$

س) $\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

ش) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$

ص) $\lim_{x\to 0} Arc\tan(\frac{\sin x}{1-\cos x})$

۱۳- مقدار k را طوری به دست آورید تا $\lim_{x\to 0}\frac{2x(1-x)\sin kx}{1-\cos x}=2$.

۱۴- به ازای چه مقداری از a تساوی $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}=\frac{7}{2}$ برقرار است.

۱۵- مقدار a چقدر باشد تا $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x\sin 3x}=\frac{1}{6}$.

۱۶- اگر $\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ ، آنگاه a چقدراست.

۱۷- تابع $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$ مفروض است $f(0)$ را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۸- $f(0)$ را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۹- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x<0\\ a & x=0\\ [x]+b & x>0\end{cases}$ در صفر پیوسته باشد.

۲۰- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & |x|<2\\ \sqrt{x^2-2x+1} & |x|\ge 2\end{cases}$ در $\Re$ پیوسته باشد.

۲۱- به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4+x^2-2}{x^2-1} & x\neq \pm 1\\ a & x=\pm 1\end{cases}$ روی $\Re$ پیوسته است.

۲۲- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}} & x>1\\ ax+2 & x\le 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است.

۲۳- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}2[x]-\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ را بررسی کنید

۲۴- تابع f با دامنه‌ی $[0\,,3]$ و با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & x<2\\ a+2\sin\dfrac{\pi}{x} & x\geq 2\end{cases}$ مفروض است به ازای چه مقدار a تابع f تابعی پیوسته است.

۲۵- تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2ax+3a-2}$ با $D_f=\Re$ مفروض است. به ازای چه مقادیری از a ، f تابعی پیوسته است.

۲۶- پیوستگی تابع $y=[\dfrac{x}{2}]+[\dfrac{x}{4}]$ را در $x=3$ بررسی کنید.

۲۷- تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[x+\dfrac{1}{2}]+2b & x<0\\ 3a+1 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{2}\sin 4x}{1-\cos 2x} & x>0\end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

۲۸- تابعی با دامنه‌ی $\Re$ مثال بزنید که تنها در یک نقطه پیوسته باشد.

۲۹- تابع $y=[\sqrt[3]{x}-1]$ با دامنه‌ی $(0\,,1000)$ مفروض است. این تابع چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد.

۳۰- دو تابع f و g را طوری مثال بزنید که هر دو در $x=a$ ناپیوسته بوده ولی جمع و ضرب و تقسیم آن‌ها تابعی پیوسته در $x=a$ باشد.

۳۱- دو تابع f و g را طوری مثال بزنید که f در $x=a$ ناپیوسته و g و fog در $x=a$ پیوسته باشد.