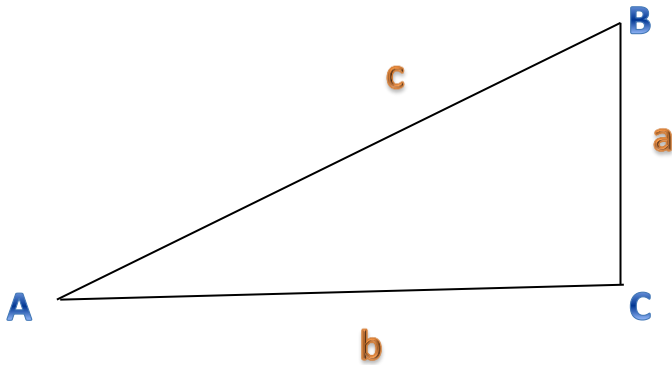


نسبت های مثلثاتی

• نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزویه



$$\sin_{\hat{A}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan_{\hat{A}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos_{\hat{A}} = \frac{b}{c}$$

$$\cot_{\hat{A}} = \frac{b}{a}$$

• نسبت های مثلثاتی زاویای متمم

به دو زاویه ای که مجموع آن ها برابر ۹۰ درجه باشد ، زاویای متمم می گویند.

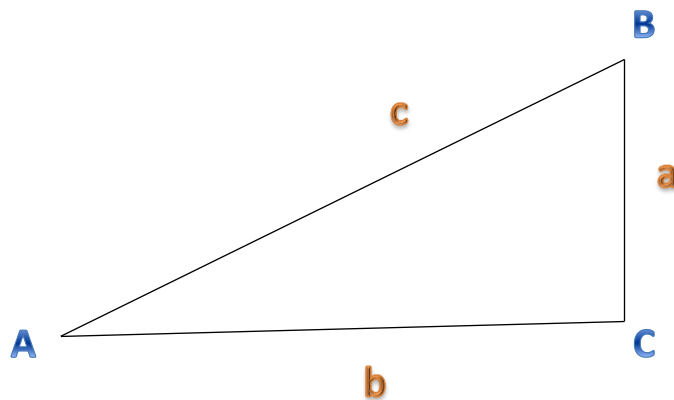
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

همچنین در هر مثلث قائم الزویه ای داریم:



$$\hat{A} + \hat{B} = 90.$$

$$\sin \hat{A} = \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{A} = \sin \hat{B}$$

$$\tan \hat{A} = \cot \hat{B}$$

$$\cot \hat{A} = \tan \hat{B}$$

• نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم $\frac{\pi}{2}$ رادیان اختلاف دارند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

@just_jozve

• نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل

به دو زاویه ای که مجموعشان برابر ۱۸۰ درجه باشد، زوایای مکمل می گویند.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

• نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم π رادیان اختلاف دارند.

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

• نسبت های مثلثاتی دو زاویه قرینه

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

• نسبت های مثلثاتی زوایای هم انتها

زاویه هایی مانند α و $2\pi + \alpha$ که انتهای کمان های آن ها بر هم منطبق می شود را زوایای هم انتها گویند.

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

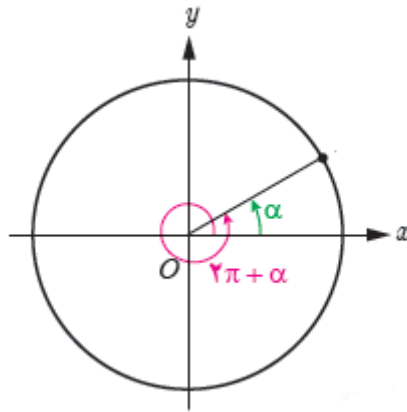
$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

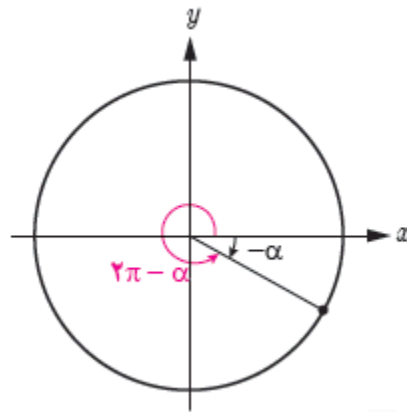
$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

صحیحی می تواند باشد.

دقت شود که k هر عدد



با استدلالی مشابه از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ نیز هم انتها هستند، نسبت های مثلثاتی زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ نیز با هم برابرند.



مثال: نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را بدست آورید.

a) $\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}$

b) ۳۹۰.

c) $\frac{11\pi}{6}$

(پاسخ)

a)

$$\sin\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \cos\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \tan\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \cot\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

b)

$$\sin(390^\circ) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(390^\circ) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(390^\circ) = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(390^\circ) = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

c)

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

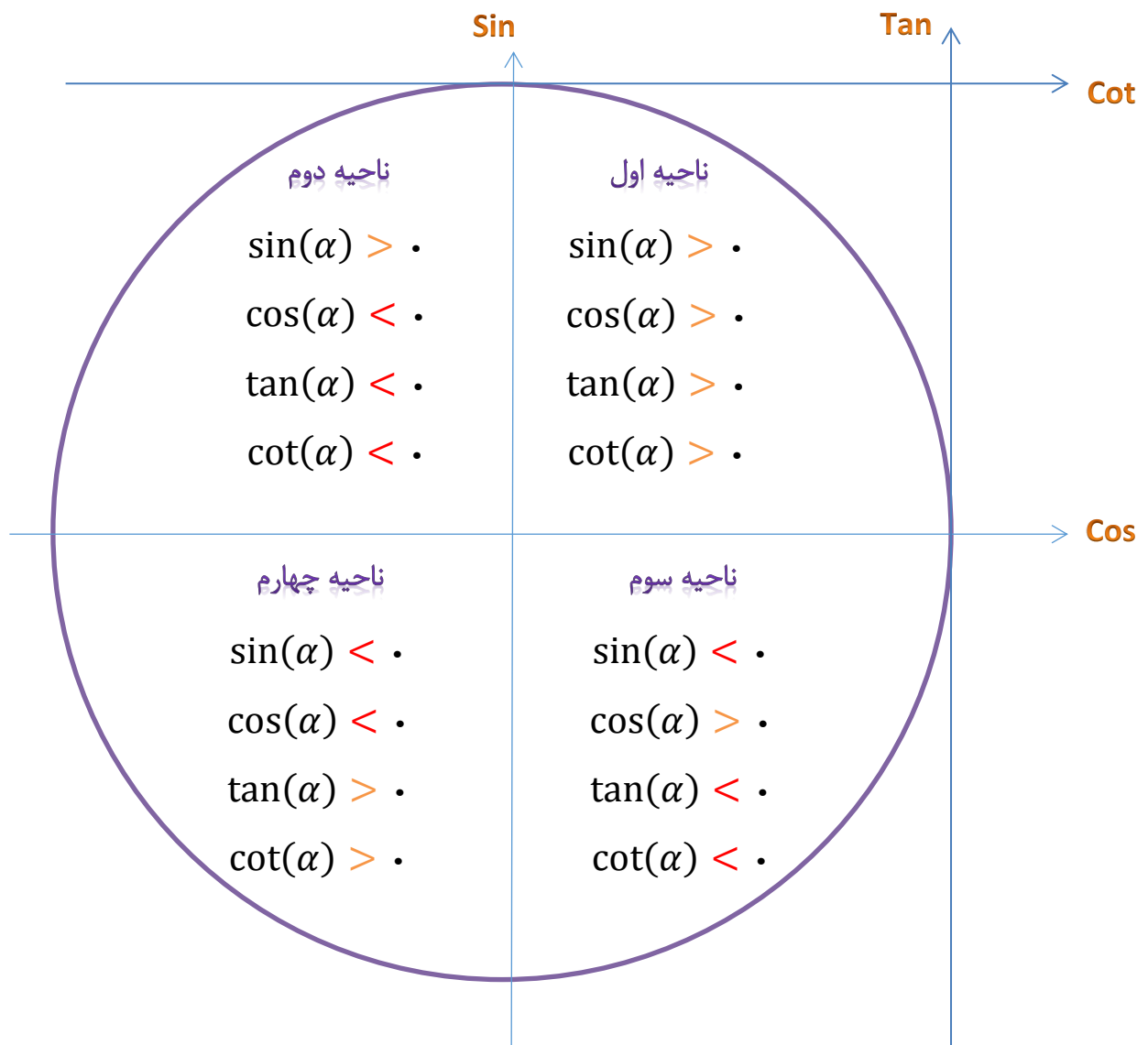
$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

نکته: هر گاه انتهای کمان زاویه ای در ناحیه ی

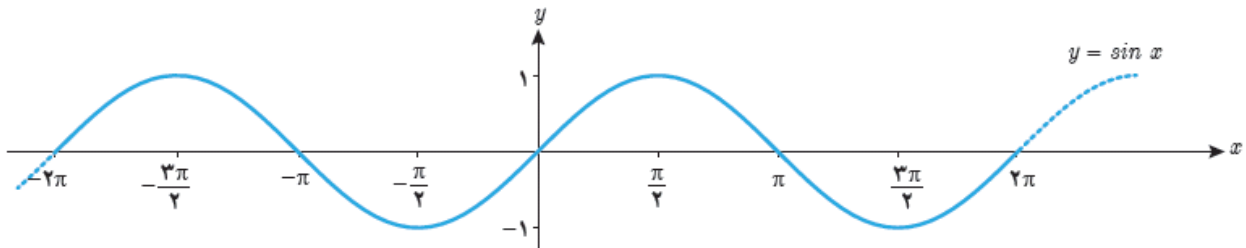
- **اول** باشد، همه ی نسبت های مثلثاتی آن زاویه **مثبت** اند.
- **دوم** باشد، فقط **sin مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** هستند.
- **سوم** باشد، **sin و cos منفی** و **tan و cot مثبت** اند.
- **چهارم** باشد، فقط **cos مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** اند.



توابع مثلثاتی

• sin

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع $\sin x$ همواره x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است. به طور مثال منظور از $\sin 4^\circ$ سینوس ۴ رادیان و منظور از $\sin 4^0$ سینوس ۴ درجه است.

نکته ۲: تابع $\sin x$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود یعنی داریم:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

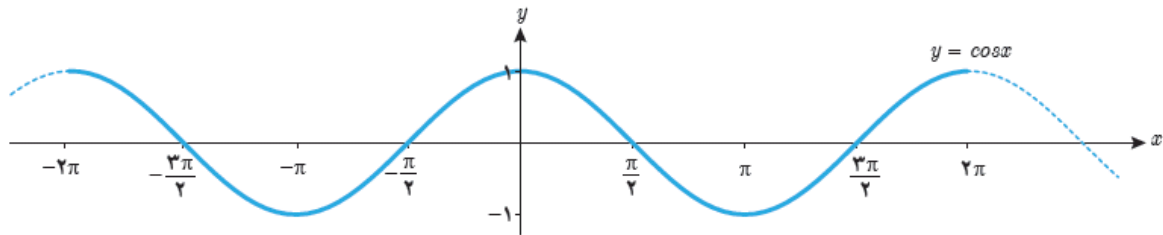
نکته ۳: دامنه تابع \sin کل اعداد حقیقی (\mathbb{R}) و برد آن بازه بسته $[-1, 1]$ می‌باشد.

نکته ۴: تابع \sin محور x ها را در ضرایب صحیح π قطع می‌کند.

نکته ۵: گاهی به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی می‌گویند.

• COS

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع $\cos x$ همواره x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.

نکته ۲: تابع $\cos x$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود یعنی داریم:

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

نکته ۳: دامنه تابع \cos کل اعداد حقیقی (\mathbb{R}) و برد آن بازه بسته $[-1, 1]$ می‌باشد.

نکته ۴: تابع \cos محور x را در ضرایب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند.

نکته ۵: گاهی به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی می‌گویند.

نکاتی در مورد رسم نمودار توابع مثلثاتی به کمک انتقال:

(۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(x - \theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت راست انتقال دهیم.

(۲) برای رسم نمودار تابع $y = f(x + \theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

(۳) برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

(۴) برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا پایین دهیم.

(۵) برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

(۶) برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

(۷) برای رسم نمودار تابع $y = f(ax)$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

(۸) برای رسم نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را a برابر کنیم.

(۹) برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

(۱۰) برای رسم نمودار تابع $y = \frac{1}{k}f(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

(۱۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در سمت چپ محور x ها قرار دارد را حذف و سمت راست محور x ها را در سمت چپ قرینه کنیم.

۱۲) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در زیر محور y ها قرار دارد را حذف و قرینه آن را در بالای محور y ها رسم کنیم.

اتحاد های مثلثاتی

$$\rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\rightarrow \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\rightarrow \tan x \times \cot x = 1$$

$$\rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

به کمک روابط بالا می توانیم اتحاد های کمکی زیر را استخراج کنیم:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2 \sin x \times \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \times \cos x}$$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(x + y) = \sin x \times \cos y + \cos x \times \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \times \cos y - \cos x \times \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \times \cos y - \sin x \times \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \times \cos y + \sin x \times \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$$

چند اتحاد پر کاربرد و مهم

$$\sin(2x) = 2 \sin x \times \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

از رابطه بالا دو اتحاد مهم زیر بدست می آید که به فرمول های توان شکن معروف اند:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

نکته تستی: با استفاده از اتحاد های مجموع و تفاضل به رابطه مهم زیر می رسیم:

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

حد و پیوستگی

مفهوم حد و فرایند های حدی

همسایگی

اگر x یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x را یک **همسایگی** x می نامیم.
یعنی اگر $x \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x است.



اگر نقطه x را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a, b) - \{x\}$ را همسایگی محذوف x می نامیم.



همسایگی راست x

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x, x + r)$ را یک همسایگی راست x می نامیم.



همسایگی چپ x

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x - r, x)$ را یک همسایگی چپ x می نامیم.

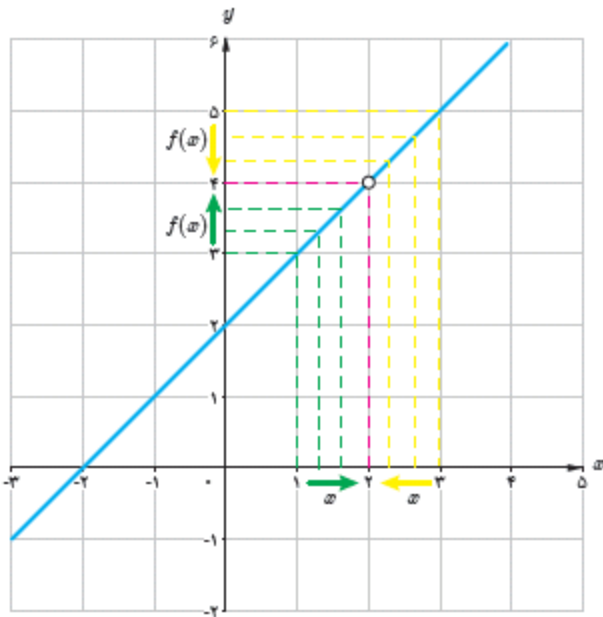


تعریف حد تابع

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد. می‌گوییم **حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است** و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

عدد L را حد تابع f در نقطه a می‌نامیم.

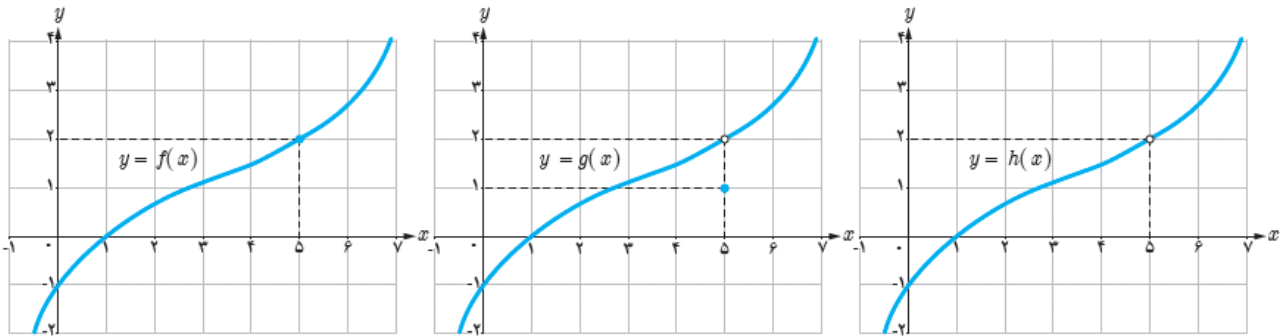


تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید که نقطه $(2, 4)$ از آن جدا شده باشد. همانطور که در نمودار این تابع مشاهده می‌کنید وقتی که x را با مقادیر بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از 2 به عدد 2 نزدیک می‌کنیم. مقادیر تابع f به عدد 4 نزدیک می‌شوند. در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی x به 2 نزدیک می‌شود برابر 4 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

@just_jozve

نکته: نمودار سه تابع f, g, h را در نظر بگیرید.



بین حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در همان نقطه چند حالت وجود دارد که در زیر به سه مورد آن اشاره می کنیم:

۱. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد و حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مانند تابع f که حدش با مقدارش در نقطه 5 برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 2$$

۲. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در همان نقطه برابر نباشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

مانند تابع g که حدش با مقدارش در نقطه 5 برابر نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$

$$g(5) = 1$$

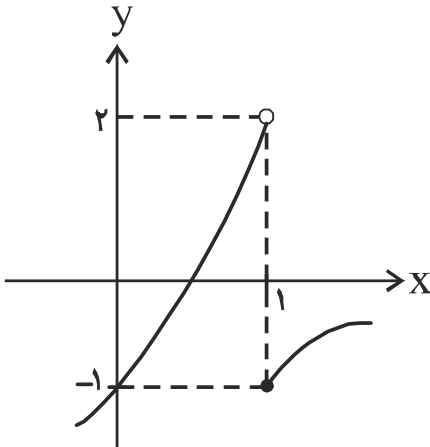
۳. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف نشده باشد ولی در نقطه a حد داشته باشد.

مانند تابع h که در نقطه 5 تعریف نشده است ولی در این نقطه دارای حد می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 2$$

حد های یک طرفه

نمودار تابعی مانند $f(x)$ را در نظر بگیرید:



در این تابع می بینیم که اگر متغیر x را با مقادیر **کوچک تر** از ۱

به ۱ نزدیک کنیم مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می شوند و اگر

متغیر x را با مقادیر **بزرگ تر** از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، مقادیر $f(x)$ به

عدد -۲ نزدیک می شوند. در این صورت می گوییم حد تابع f در

نقطه ۱ وجود ندارد ولی تابع در این نقطه دارای حدود چپ و راست می باشد.

حد راست

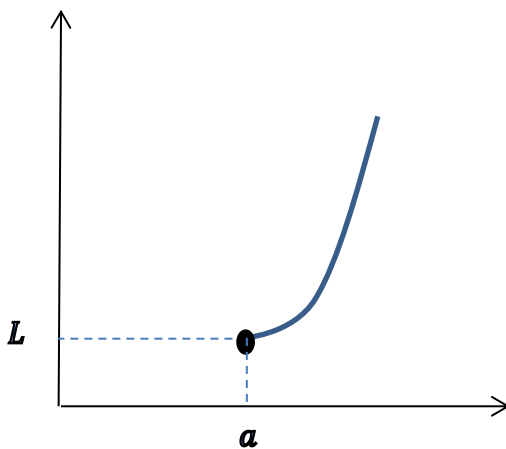
اگر تابع f در یک **همسایگی راست** نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم **حد راست** تابع

f در نقطه $x = a$ برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد

به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

در این صورت می نویسیم:

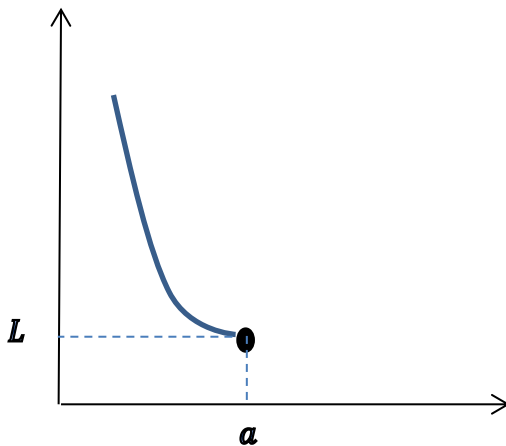


حد چپ

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوئیم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

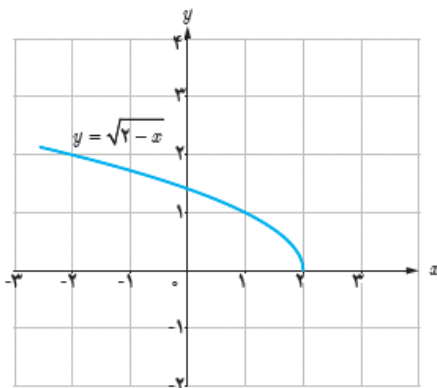
در این صورت می نویسیم:



نکته: حد تابع f در نقطه $x = a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.

با توجه به نکته بالا می توان گفت که حد تابع f در نقطه $x = a$ موجود نیست اگر:

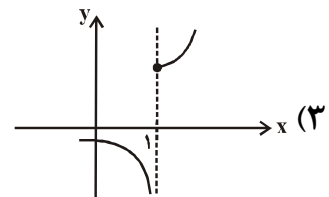
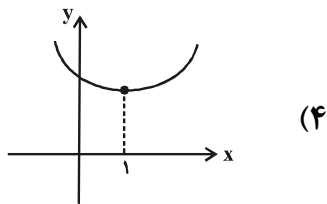
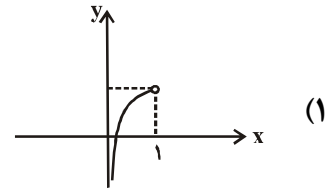
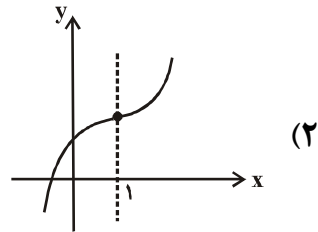
۱. حد چپ و راست در نقطه a موجود ولی دو مقدار متفاوت داشته باشند.
۲. یکی از حد های چپ یا راست وجود نداشته باشد (تابع در همسایگی چپ یا راست تعریف نشده باشد).



به طور مثال تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه $x = 2$ حد ندارد چون در هیچ همسایگی راست 2 تعریف نشده است.

مثال ۱:

کدام یک از نمودارهای زیر نشان دهنده تابعی است که در نقطه‌ی $x=1$ حد راست دارد ولی حد چپ ندارد؟



پاسخ)

در گزینه‌های «۲» و «۴» تابع مورد نظر در $x=1$ دارای حد راست و چپ می‌باشد. در گزینه‌ی «۱» تابع حد چپ دارد و حد راست ندارد و در گزینه‌ی «۳» تابع حد راست دارد ولی حد چپ ندارد.

مثال ۲: حد چپ تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ در نقطه‌ی $x = \frac{-1}{10}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۲) -۹

(۱) ۱۱

(۴) -۱۱

(۳) -۱۰

پاسخ)

گزینه‌ی «۳»

وقتی $x \rightarrow \left(\frac{-1}{10} \right)^-$ ، یعنی $x < \frac{-1}{10}$ پس $\frac{1}{x} > -10$ ، لذا:

$$\left[\frac{1}{x} \right] = -10$$

نکته: اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آن ها در a وجود داشته باشد آنگاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند یعنی:

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ آنگاه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند، مقدار حد آن ها نیز در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

به طور مثال مقدار حد راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{x}$ در نقطه $x=0$ برابر صفر است چون در این ناحیه تابع f با تابع $g(x)=0$ برابر است.

قضایای حد

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر نقطه دلخواه برابر مقدار ثابت c است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

قضیه ۲: هر چند جمله ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b$ در هر

نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله ای در نقطه a برابر است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b.$$

قضیه ۳: اگر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ **حد داشته باشند** و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$

L_2 آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴: فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آنگاه

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

مثال ۱: اگر f و g در اطراف $x = a$ تعریف شده و هر دو در این نقطه دارای حد باشند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2 + g^2)(x) \text{ کدام می تواند} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = -6 \text{ و} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = 1$$

باشد؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ)

گزینه ی «۲»

اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 L_2 = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3, L_2 = -2 \\ \text{یا} \\ L_2 = 3, L_1 = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2 + g^2)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} g^2(x) = 9 + 4 = 13$$

مثال ۲: اگر $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x - 2 & x > 0 \\ 5x + 1 & x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ)

گزینه ی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{1-x^2}{2x}\right) = f\left(\frac{0^+}{-2}\right) = f(0^-) = 5(0) + 1 = 1$$

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

[Redacted text]

