کلاس نکته و تست ریاضیات –تهران وسراسر کشور

مشاوره ی انگیزشی ، برنامه ریزی،نحوه ی مطالعه دروس،نحوه ی تست زدن و....

کلاس های ریاضی : حضوری و آنلاین خصوصی،گروهی

دی وی دی های ریاضی مفهومی + تکنیکی

جزوات و کتاب های برتر آموزشی کنکور

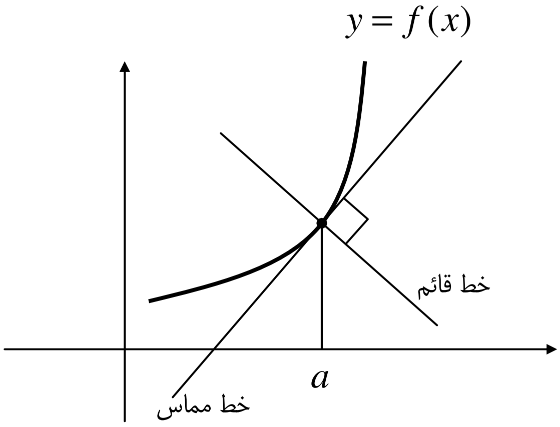
همین الان تماس بگیرید (درصورت پاسخ ندادن پیامک دهید)

0938-335-0983

www.Riazi100.ir

مشتق

خط مماس و خط قائم بر منحنی از یک نقطه روی منحنی



با توجه به تعبیر هندسی مشتق واضح است که مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه ی a با شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر است.

$m=f'(a)$ شیب خط مماس

حال اگر تعریف کنیم که خط قائم خطی است که در نقطه ی a بر خط مماس بر منحنی در این نقطه عمود باشد. بدیهی است که اگر شیب خط مماس را عکس و قرینه کنیم، شیب خط قائم بدست می آید.

$m'=\frac{-۱}{f'(a)}$ شیب خط قائم

***

بنابراین معادله ی خط مماس و خط قائم بر منحنی در نقطه ی $M(a,b)$ واقع بر نمودار آن به شکل زیر خواهند بود.

$y=m(x-a)+b$ معادله ی خط مماس

$y=m'(x-a)+b$ معادله ی خط قائم

***

تمرین: شیب خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۳x}$ را در نقطه ی $x=۱$ بدست آورید.

***

تمرین: معادله ی خط مماس و معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y=۲+\tan x$ را در نقطه ی $x=\frac{\pi}{۴}$ بدست آورید.

***

تمرین: معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y=x^۲-۲x-۳$ در نقطه ی بر خورد نمودار تابع با محور عرضها را بنویسید.

***

تمرین: نقاطی از منحنی تابع $y=x^۳-۳x$ را پیدا کنید که در آن نقاط خط مماس بر منحنی موازی محور x ها باشد.

تمرین : در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y=\sin ۳x$ موازی محور طول ها است.

***

تمرین برای حل :

۱ : معادله ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=\tan^{-۱}\sqrt{x}$ را در نقطه ای به طول ۱ روی آن به دست آورید.

۲ : مقدار k را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی $y=kx^{۲}+۲x+۱$ در نقطه ی $x=۱$ موازی محور طول ها باشد.

۳ : نقاطی از نمودار $y=x^{۳}-۲x-۱$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

۴ : تابع $y=ax^{۳}+bx+۱$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که خط $y=۵x-۳$ در نقطه ای به طول یک بر منحنی تابع فوق مماس شود.

***

آهنگ تغییرات

واضح است که کمیت های زیادی وجود دارند که تغییر یکی وابسته به تغییر دیگری است. مانند

الف : مساحت مربع تابعی از طول ضلع آن است.

ب : مساحت دایره تابعی از شعاع آن است.

ج : محیط دایره تابعی از شعاع آن است.

د : حجم کره تابعی از شعاع آن است.

هـ : شتاب حرکت یک متحرک تابعی از سرعت آن است.

حال اگر از بین دو کمیت یا دو پدیده که تغییر یکی سبب تغییر در دیگری می شود، یکی را به عنوان متغیر (متغیر مستقل یا x) و دیگری را به عنوان تابعی از آن متغیر (متغیر وابسته یا y) در نظر بگیریم. خواهیم داشت:

$$y=f(x)$$

در این صورت تغییرات y نسبت به تغییرات x را آهنگ تغییر y نسبت به تغییر x می گوییم.

آهنگ تغییر را می توان به یکی از دو صورت زیر بررسی کرد.

۱ : آهنگ تغییرات متوسط

آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x. وقتی x از $x=a$ تا $x=b$ تغییر کند. برابر است با :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تذکر : اگر قرار دهیم. $\Delta x=h=b-a$ در این صورت $b=a+h$ یعنی اگر مقدار کمیت a را به اندازه ی h واحد تغییر دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۲ : آهنگ تغییرات آنی (لحظه ای)

حد آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x وقتی تغییر x خیلی ناچیز ($h\to ۰$) باشد، را آهنگ لحظه ای یا به اختصار آهنگ تغییر کمیت $y=f(x)$ به کمیت x در a می گویند.

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: با توجه به تعریف مشتق تابع در یک نقطه واضح است که

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)$$

***

تمرین : آهنگ تغییرات متوسط حجم مکعبی به ضلع x سانتی متر را نسبت به تغییرات x وقتی x از ۲ به ۵ تغییر می کند، بیابید.

حل :

$$v(x)=x^{۳}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{v(۵)-v(۲)}{۵-۲}=\frac{۱۲۵-۸}{۳}=۳۹$$

تمرین : آهنگ تغییر مساحت یک دایره را نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی که $r=۵$ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

حل :

$s(r)=\pi r^{۲} \to s'(r)=۲\pi r$

$s'(۵)=۲\pi(۵)=۱۰\pi$

***

تمرین : اگر $f(t)=۳۰+۱۰t^{۲}$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری باشد. (t بر حسب ساعت)آهنگ تغییر ات متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول ، پس از زمان $t_{۱}=۲$ را حساب کنید.

حل :

$f(t)=۳۰+۱۰t^{۲}$

$f(۲)=۳۰+۱۰(۲)^{۲}=۷۰$

$f(۷)=۳۰+۱۰(۷)^{۲}=۵۲۰$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\frac{۵۲۰-۷۰}{۵}=۹۰$$

***

تمرین: حجم مخروطی به ارتفاع ثابت ۵ سانتی متر تابعی از شعاع قاعده ی آن است. آهنگ تغییر حجم مخروط را نسبت به شعاع قاعده ی آن وقتی $r=۳$ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

***

تمرین : طول دو ضلع مثلثی ۱ و ۲ و طول ضلع سوم برابر متغیر l است. فرض کنید که زاویه ی مقابل به این ضلع α باشد.

الف : l را بر حسب α بنویسید.

ب : مشتق l را بر حسب α به دست آورید.

ج : آهنگ تغییرات l وقتی که $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ را به دست آورید.

حل :

$l^{۲}=(۱)^{۲}+(۲)^{۲}-۲(۱)(۲)\cos\alpha \to l(\alpha)=\sqrt{۵-۴\cos\alpha}$

$$l'(\alpha)=\frac{۴\sin\alpha}{۲\sqrt{۵-۴\cos\alpha}}=\frac{۲\sin\alpha}{\sqrt{۵-۴\cos\alpha}}$$

$$l'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۲\sin(\frac{\pi}{۴})}{\sqrt{۵-۴\cos(\frac{\pi}{۴})}}=\frac{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\sqrt{۵-۴(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵-۲\sqrt{۲}}}$$

***

تمرین : مساحت هر دایره تابعی از محیط آن است. آهنگ تغییرات مساحت دایره را نسبت به محیط آن را بـرای دایـره ای بـه محیط ۵π حساب کنید.

حل :

$$s(r)=\pi r^{۲}\xrightarrow{p=۲\pi r\rightarrow r=\frac{p}{۲\pi}}s(p)=\pi(\frac{p}{۲\pi})^{۲}=\frac{p^{۲}}{۴\pi}$$

$$s(p)=\frac{p^{۲}}{۴\pi}\rightarrow s'(p)=\frac{۲p}{۴\pi}=\frac{p}{۲\pi}$$

$$s(۵\pi)=\frac{۵\pi}{۲\pi}=۲/۵$$

***

تمرین : مخزنی که گنجایش ۶۰ لیتر آب را دارد و می تواند در مدت ۲۰۰ ثانیه کاملاً تخلیه شود، لبریز از آب بـود. در لحظـه‌ی $t=۰$ ، شیر این مخزن باز می شود. اگر حجم آب باقی مانده در مخزن پس از t ثانیـه از رابطـه ی $v=۶۰(۱-\frac{t}{۲۰۰})^{۲}$ بـه دست آید.

الف : آهنگ تغییرات متوسط تخلیه ی آب پس از یک دقیقه چقدر است؟

ب :آهنگ تغییرات تخلیه ی آب در $t=۱۰۰$ ثانیه چقدر است؟

حل : تابع تخلیه ی آب

$$v(t)=۶۰-۶۰(۱-\frac{t}{۲۰۰})^{۲}=۶۰(۱-(۱-\frac{t}{۱۰۰}+\frac{t^{۲}}{۴۰۰۰۰}))$$

$$=۶۰(\frac{t}{۱۰۰}-\frac{t^{۲}}{۴۰۰۰۰})=۶۰\times\frac{۴۰۰t-t^{۲}}{۴۰۰۰۰}=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰t-t^{۲})$$

الف :

$$v(t)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰t-t^{۲})$$

$$v(۰)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰(۰)-(۰)^{۲})=۰$$

$$v(۶۰)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰(۶۰)-(۶۰)^{۲})=۳۰/۶$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(۶۰)-v(۰)}{۶۰-۰}=\frac{۳۰/۶-۰}{۶۰}=۰/۵۱$$

ب :

$$v(t)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰t-t^{۲})\rightarrow v'(t)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰-۲t)=\frac{۳}{۱۰۰۰}(۲۰۰-t)$$

$$v'(۱۰۰)=\frac{۳}{۱۰۰۰}(۲۰۰-۱۰۰)=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$$

***

نتیجه : می دانیم که نسبت تغییر مسافت یک متحرک نسبت به زمان را سرعت و همچنین نسبت تغییر سرعت یک متحرک نسبت به زمان را شتاب می نامند. بنابراین اگر $x=f(t)$ معادله ی حرکت یک متحرک باشد. داریم :

سرعت $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{۲}-x_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}$

شتاب $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۲}-v_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}$

تمرین : معادله ی حرکت متحرکی به صورت $x(t)=t^{۲}-۵t+۶$ است. مطلوب است.

الف : سرعت متوسط این متحرک بین لحظات $t_{۱}=۳$ تا $t_{۲}=۵$ ثانیه

ب : سرعت لحظه ای متحرک در لحظه ی $t_{\circ}=۲$

حل:

الف :

$$x(t)=t^{۲}-۵t+۶$$

$$x(۳)=(۳)^{۲}-۵(۳)+۶=۹-۱۵+۶=۰$$

$$x(۵)=(۵)^{۲}-۵(۵)+۶=۲۵-۲۵+۶=۶$$

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۶-۰}{۵-۳}=۳\ \frac{m}{s}$$

ب :

$$x'(t)=۲t-۵\rightarrow x'(۲)=۲(۲)-۵=-۱\ \frac{m}{s}$$

تمرین : توپی را در راستای قائم از زمین به بالا پرتاب می کنیم. اگر جهت مثبت به طرف بالا و معادلـه ی حرکـت تـوپ بـه صورت $y(t)=-۵t^{۲}+۲۰t$ باشد. (t بر حسب ثانیه و y بر حسب متر)

۱ : نمودار $y(t)$ را رسم کنید.

۲ : دامنه ی $y(t)$ را تعیین کنید.

۳ : سرعت متوسط توپ را از لحظه ی پرتاب $(t=۰)$ تا پایان ثانیه ی دوم $(t=۲)$ حساب کنید.

۴ : سرعت لحظه ای توپ را در یک ثانیه پس از پرتاب $(t=۱)$ را حساب کنید.

۵ : سرعت لحظه ای توپ هنگام برخورد با زمین چه قدر است؟

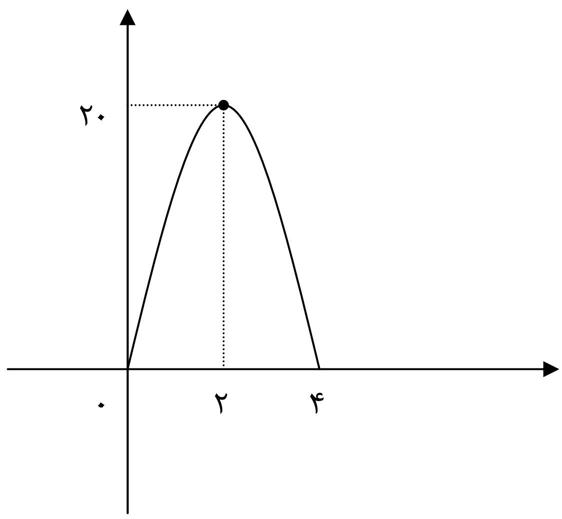
۶ : در چه زمانی توپ به بالا ترین ارتفاع خود می رسد. در این لحظه سرعت توپ چه قدر است و معنای آن چیست.

حل :

۱ : معادله داده شده یک سهمی و چون در آن $a=-۵$. پس نمودار سهمی رو به پایین بوده و دارای نقطه ی Max است.

$$x_\circ=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲۰}{۲(-۵)}=۲$$

x	۰	۲	۴
y	۰	۲۰	۰



۲ : چون بعد از ۴ ثانیه توپ مجدداً به زمین بر می گردد. لذا دامنه ی تابع می شود. $D=[۰,۴]$

۳ :

$$y(t) = -۵t^{۲} + ۲۰t$$

$$y(۰) = -۵(۰)^{۲} + ۲۰(۰) = ۰$$

$$y(۲) = -۵(۲)^{۲} + ۲۰(۲) = -۲۰ + ۴۰ = ۲۰$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(۲) - y(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۲۰ + ۰}{۲} = ۱۰$$

۴ :

$$y(t) = -۵t^{۲} + ۲۰t \rightarrow y'(t) = -۱۰t + ۲۰$$

$$y'(۱) = -۱۰(۱) + ۲۰ = ۱۰ \ \frac{m}{s}$$

۵ :

$$y'(۴) = -۱۰(۴) + ۲۰ = -۲۰ \ \frac{m}{s}$$

۶ : بالا ترین ارتفاع توپ زمانی است که $t = ۲$ باشد. لذا

$$y'(۲) = -۱۰(۲) + ۲۰ = ۰ \ \frac{m}{s}$$

یعنی سرعت لحظه ای توپ در این لحظه برابر صفر است. (ایست لحظه ای)

***

بارم بندی حسابان

فصل	نوبت اول	نوبت دوم – شهریور و دی
اول	۱۰	۴
دوم	۱۰	۴
سوم	–	۳
چهارم	–	۴
پنجم	–	۵
جمع	۲۰	۲۰

ضمیمه :

جدول حروف یونانی

نام فارسی	نام لاتین	حرف کوچک	حرف بزرگ
آلفا	Alpha	α	A
بتا	Beta	β	B
گاما	Gamma	γ	Γ
دلتا	Delta	δ	Δ
اِپسیلون	Epsilon	ϵ	E
زِتا	Zeta	ζ	Z
اِتا	Eta	η	H
تِتا	Theta	θ	Θ
یوتا	Iota	ι	I
کاپا	Kappa	κ	K
لاندا	Lambda	λ	Λ
مو (میو)	Mu	μ	M
نو	Nu	ν	N
زی	Xi	ξ	Ξ
اومیکرون	Omicron	o	O
پی	Pi	π	Π
رو	Rho	ρ	P
سیگما (زیگما)	Sigma	σ	Σ
تاو (تُو)	Tau	τ	T
اوپسیلون	Upsilon	υ	Υ
فی	Phi	ϕ	Φ
خی	Chi	χ	X
سای	Psi	ψ	Ψ
اُمگا	Omega	ω	Ω